Chapitre C

Stabilité de Tourbillons

L'émergence de structures cohérentes est une caractéristique bien connue des fluides quasi-géostrophiques [1], de la turbulence bidimensionnelle, des films de savon [2],... L'étude de ces tourbillons en géométrie bidimensionnelle est donc avant tout intéressante d'un point de vue physique. Par ailleurs, l'analyse des écoulements bidimensionnels a beaucoup d'attraits d'un point de vue mathématique, à cause de la richesse qui découle de la conservation de la vorticité potentielle, de leur structure Hamiltonienne et des théorèmes de stabilité qui leur sont associés. Enfin, les problèmes bidimensionnels sont simulés de manière très satisfaisante par la génération actuelle d'ordinateurs, de telle sorte que l'on peut avoir une bonne confiance dans la fidélité des solutions. Il est clair que ce n'est pas encore le cas en ce qui concerne la plupart des problèmes tridimensionnels qui interviennent dans les phénomènes atmosphériques et océaniques.

C.1 Introduction

Les écoulements bidimensionnels sont l'objet de nombreuses études du fait de la dynamique et des propriétés d'advection des écoulements géophysiques. L'arrivée de l'imagerie par satellite a nettement mis en évidence que les structures tourbillonnaires avaient des durées de vie très longues dans l'atmosphère de la terre ainsi que dans les océans : en effet, d'une part, la rotation rapide des planètes supprime les vitesses verticales. D'autre part, la stratification en densité, associée aux gradients de température et de salinité, dans les océans et dans les atmosphère planétaires, contraint les écoulements géophysiques à une dynamique quasi bidimensionnelle. Les océans et l'atmosphère correspondant à de très fines couches, les contraintes de type géométrique renforcent encore ce phénomène. De manière encore plus générale, on rencontre en physique des plasma et en astrophysique de nombreux écoulements bidimensionnels présentant des structures tourbillonaires.

L'émergence et la durée de vie de ces structures sont le résultat de propriétés remarquables des écoulements bidimensionnels : contrairement au cas tridimensionnel, ces écoulements sont caractérisés par une cascade d'énergie inverse, qui a tendance à créer des structures de plus en plus larges. Certains exemples de structures cohérentes et persistantes sont très connus : la tache rouge de Jupiter (observée pour la première fois par Hooke il y a plus de 300 ans) en est le plus fameux. On observe également des structures dipolaires comme celle qui se trouve souvent au niveau des Pays-Bas et à l'origine de blocages atmosphériques. Des structures similaires ont été dynamiquement créées à des échelles bien plus petites en utilisant des fluides stratifiés en rotation (voir les superbes expériences de van Heijst & Flor [3]).

Comme dans les écoulements géophysiques de grande échelle, où les mouvements horizontaux sont beaucoup plus grands que les verticaux, le mouvement d'un film de savon est également bidimensionnel. Les belles expériences de Couder & Basdevant [2] ont montré de manière éclatante les propriétés d'auto-organisation de ces écoulements : en déplaçant un cylindre très fin à travers un film de savon, ils ont mis en évidence que l'écoulement du sillage avait une structure remarquablement bien ordonnée, correspondant à une multitude de tourbillons dipolaires.

Il est important de noter que les lois de conservation sont obtenues dans la limite non visqueuse, mais la présence d'une viscosité modérée ne modifie cependant pas de manière significative les processus physiques : comme les effets visqueux ne sont importants qu'au niveau des plus petites échelles, ils ne touchent par conséquent que très faiblement les structures les plus larges. C'est la raison pour laquelle les écoulements bidimensionnels sont faiblement dissipatifs et que les processus d'auto-organisation ont une durée de vie si longue. Ceci a été montré très nettement par les simulations numériques directes de Legras, Santangelo et Benzi [4] à partir d'une distribution de vorticité bidimensionnelle, initialement aléatoire.

C.2 Breathers et tourbillons

En l'absence de force extérieure et de viscosité, la dynamique d'un écoulement bidimensionnel se réduit à l'équation d'Euler

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = J(\psi, \nabla^2 \psi) \quad , \tag{C.1}$$

où ψ est la fonction de courant et J le jacobien. Dans les cas stationnaires, la vorticité $\nabla^2 \psi$ est donc constante le long des contours de la fonction de courant. L'étude des écoulements stationnaires plans en l'absence de viscosité se réduit donc à résoudre l'équation

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = F(\psi) \quad , \tag{C.2}$$

où F est une fonction arbitraire.

L'invariance par rotation de l'équation (C.2) nous permet de faire l'hypothèse, sans perte de généralité, que les coordonnées x et y sont respectivement parallèle et orthogonale à la direction de propagation des tourbillons. Intéressons nous plus particulièrement au cas où la fonction de courant ψ est périodique dans la direction x. Par la transformation $x \to \pm it$, toujours en l'absence de terme d'amortissement et de force extérieure, le problème initial se résume à trouver les solutions localisées, périodiques en temps, de l'équation de Klein-Gordon

$$\psi_{tt} - \psi_{yy} + F(\psi) = 0 \quad . \tag{C.3}$$

Ces excitations sont, bien sûr, des exemples de solutions breathers, comme celles dont nous avons parlé dans le contexte notablement différent où le système est discret (cf. partie A).

Dans le cas continu, ces excitations ont fait l'objet de très nombreuses études ces vingt dernières années [5, 6, 7] ; les raisons pour étudier les solutions périodiques des équations aux dérivées partielles non linéaires sont multiples : ce sont non seulement de fascinants objets mathématiques, mais les équations de Klein-Gordon non linéaires apparaissent aussi dans de très nombreux modèles physiques. Les breathers sont des objets fragiles qui, sous l'effet de perturbations, peuvent se désintégrer ou disparaître lentement sous la forme de radiations, exploser ou se séparer en une paire de kink-antikink . Les expériences numériques montrent que ces solutions peuvent être stables pendant des temps gigantesques, et cela explique pourquoi les breathers, rayonnant faiblement, sont si souvent évoqués dans les modèles physiques. Enfin, il est important de rappeler le résultat surprenant [7] montrant qu'il existe une grande classe d'équations non linéaires de type Klein-Gordon, mais dissipatives, qui possèdent des solutions breathers.

Intéressons nous ici à quelques solutions particulières. Le cas $F(\psi) = \sinh\psi$, que l'on appelle dans la littérature de la physique des plasma l'équation de sinh-Poisson, est la version elliptique de l'équation de sinh-Gordon. Cette dernière, tout comme l'équation de sine-Gordon, peut être résolue de manière exacte par la méthode de la diffusion inverse [8]. Il existe de plus une transformation de Bäcklund entre les solutions réelles des équations de sine et sinh-Gordon. Cependant, la nature purement imaginaire de la transformation qui permet de passer de l'équation de sine-Gordon à l'équation de sinh-Poisson ne permet pas de générer simplement de nouvelles solutions de la deuxième équation à partir des nombreuses solutions de la première. On est donc obligé de repartir des premiers principes pour trouver les solutions possibles. Une publication [9] très récente a ainsi élégamment présenté plusieurs solutions obtenues par la méthode bilinéaire de Hirota (S. Takeno et moi-même avions commencé cette approche lors de sa visite de l'été 1995, mais nous avons été malheureusement moins efficaces).

Il est aussi important de noter que l'équation de sine-Gordon est l'unique équation aux dérivées partielles qui possède une solution breather *exacte*, contrairement au cas discret qui nous a intéressé jusqu'ici. Malheureusement, la plupart des études ont été menées dans un domaine infini dans la direction y. Les conditions aux bords introduisent des restrictions de symétrie très différentes au niveau de la résolution par diffusion inverse. Dans leur travail [10], Ting, Chen & Lee ont ainsi obtenu des structures très exotiques en utilisant une méthode combinant méthode inverse et géométrie des surfaces Riemanienne. La richesse de ces solutions est en accord avec les résultats obtenus dans le cas des breathers sur un domaine fini. Notons également qu'il existe beaucoup plus de solutions breathers lorsque l'on impose des conditions aux bords de type Dirichlet, même si les résultats dépendent de conditions arithmétiques entre la période et la longueur du domaine.

C.3 L'expérience

La présence d'un champ magnétique peut avoir sur un fluide magnétohydrodynamique le même effet que la rotation sur un fluide ordinaire. Ce mécanisme a été exploité par Nguyen & Sommeria [11] dans leur expérience utilisant une fine couche de mercure. L'expérience, à l'origine de nos travaux, utilise également l'effet du champ magnétique ainsi qu'une épaisseur très fine de fluide pour maintenir le caractère bidimensionnel de la dynamique. Dans cette expérience, développée par Tabeling, Perrin et Fauve [12], un courant électrique couplé à un champ magnétique, crée dans la cuve remplie d'acide sulfurique un réseau unidimensionnel de tourbillons contrarotatifs. Cette expérience modèle très simple a permis l'étude de nombreux phénomènes ; l'étude du régime chaotique, l'étude de la relaxation vers l'équilibre lorsque l'on éteint le courant électrique, les réseaux bidimensionnels, les phénomènes d'intermittence spatio-temporelle,...

Notre point de vue a été légèrement différent, puisque nous nous sommes intéressés uniquement à l'expérience de départ, avec principalement à l'esprit de faire la connexion entre certaines solutions de l'équation d'Euler, visuellement très proches des résultats de l'expérience, et les solutions de l'équation de Navier-Stokes.

Les résultats expérimentaux mettent en évidence trois régimes principaux (cf Fig. C.1) :

FIG. C.1 - *Vue de dessus des résultats de l'expérience de Tabeling, Perrin et Fauve [12]. On distingue les trois régimes décrits dans le texte : le réseau de tourbillons contra-rotatifs en haut, le réseau des tourbillons inclinés et asymétriques au milieu, enfin en bas, le réseau de tourbillons corotatifs.*

(i) Pour les courants faibles, l'écoulement correspond à un réseau de tourbillons contra-rotatifs.

(ii) Au dessus d'un courant critique, cet état se déstabilise et donne naissance à un réseau de tourbillons inclinés, alternativement grands et petits.

(iii) Si l'on augmente encore le courant électrique, on atteint un réseau de tourbillons corotatifs de taille double par rapport aux tourbillons initiaux.

Le but du travail a été de comprendre et d'expliquer le comportement de cette expérience très instructive. Nous avons tout d'abord obtenu les conditions de *stabilité non linéaire* du réseau de tourbillons contra-rotatifs à l'intérieur d'une boîte rectangulaire et en l'absence de viscosité (Dauxois, *Physics of Fluids*, **6**, 1625 (1994)). Ce travail analytique utilise la richesse de la structure hamiltonienne. Après avoir introduit la viscosité et la force extérieure, nous avons obtenu un modèle qui explique l'apparition de l'instabilité lorsque l'on augmente le courant électrique : une viscosité renormalisée décroît avant d'atteindre une viscosité critique ν_c que nous avons obtenue par une analyse numérique linéaire. Au dessus de ce seuil, l'évolution de ce système mène à un état d'équilibre analogue à celui que l'on obtient si l'on ajoute un terme phénoménologique de *friction linéaire* à l'équation de Navier-Stokes habituelle. Ce terme modélise la friction au fond de la boite. Depuis notre travail, le groupe de Tabeling tient désormais compte de ce terme qui modifie de manière notable la dynamique et donc les états d'équilibre. Ces derniers résultats sont présentés dans l'article qui suit (Dauxois, Fauve & Tuckerman, *Physics of Fluids*, **8**, 487 (1996)).

Références

[1] G. R. Flierl, Isolated eddy models in geophysics, *Annual Review of Fluid Mechanics* **19**, 493-530 (1987).

[2] Y. Couder & C. Basdevant, Experimental and numerical study of vortex couples in two-dimensional flows, *Journal of Fluid Mechanics* **173**, 225-251 (1986).

[3] G. J. F van Heijst & J. B. Flor, Dipole formation and collisions in a stratified fluid, *Nature* **340**, 212-215 (1994).

[4] B. Legras, P. Santangelo & R. Benzi, High resolution numerical experiments for forced two-dimensional turbulence, *Europhysics Letters* **5**, 37-42 (1988).

[5] C. A. Wingate, SIAM, *Journal of Applied Mathematics*, **43**, 120 (1983).

[6] D. K. Campbell & M. Peyrard, Chaos and order in nonintegrable model field theories, in *Chaos*, D. K. Campbell editor, American Institute of Physics, New-York, 305-334 (1990).

[7] R. Grauer & B. Birnir, The center manifold and bifurcations of damped and driven sine-Gordon breathers, *Physica D* **56**, 165-184 (1992).

[8] R. A. Pasmanter, On long lived vortices in 2D viscous flows, most probables states of inviscid flows and a soliton equation, *Physics of Fluids* **6**, 1236-1241 (1994).

[9] K.W. Chow, N. W. M. Ko, R. C. K. Leung & S. K. Tang, Inviscid two dimensional vortex dynamics and a soliton expansion of the sinh-Poisson equation, *Physics of Fluids* **10**, 1111-1119 (1998).

[10] A. C. Ting, H. H. Chen & Y. C. Lee, Exact solutions of a nonlinear boundary value problem : the vortices of the two dimensional sinh-Poisson equation, *Physica D* **26**, 37-66 (1987).

[11] J. M. Nguyen & J. Sommeria, Experimental characterization of steady two-dimensional vortex couples, *Journal of Fluid Mechanics* **192**, 175-192 (1988).

[12] P. Tabeling, B. Perrin & S. Fauve, Instability of a linear array of forced vortices, *Europhysics Letters* **3**, 459-465 (1987).