

Observation expérimentale de l'instabilité paramétrique sous-harmonique en fluide stratifié.

Baptiste Bourget, Philippe Odier, Sylvain Joubaud, Thierry Dauxois

Laboratoire de Physique, École Normale Supérieure de Lyon, FRANCE

Résumé :

Les ondes internes sont intrinsèquement instables et évoluent en transférant de l'énergie à différentes échelles temporelles et spatiales. La stabilité des ondes internes a été étudiée théoriquement et numériquement, mais il y a eu jusqu'à aujourd'hui peu d'études expérimentales de ce phénomène. À l'aide d'un générateur forçant une onde plane, nous avons observé l'évolution temporelle du champ d'onde. Les mouvements du fluide sont mesurés quantitativement à l'aide de la technique de Schlieren synthétique. Nous présentons des résultats concernant la croissance d'ondes secondaires dues à l'instabilité paramétrique sous-harmonique.

Abstract :

Internal waves are known to be inherently unstable and evolve in time by transferring energy to different length and time scales. While there has been substantial work investigating internal waves stability theoretically and numerically, there has been comparatively few laboratory studies examining these instabilities. Using a wave generator to force a plane wave in a narrow rectangular tank, we observe the evolution of the wave field. The fluid motion is quantitatively measured using synthetic Schlieren. We present results regarding the growth of secondary waves due to parametric sub-harmonic instability.

Mots clefs : internal wave ; instability ; stratified fluid

1 Introduction

Les ondes internes de gravité peuvent devenir instables spontanément, produisant des ondes de fréquence plus faible et de plus grande longueur d'onde. Ce phénomène a été présenté dans un article de revue [1] considérant à la fois des ondes propagatives et des ondes stationnaires. Cette instabilité est un phénomène intéressant dans les situations océaniques, car, répété plusieurs fois, il offre un moyen de transférer de l'énergie à partir des ondes à grande échelle vers des échelles plus petites, où elle peut être dissipée, sans nécessité d'une cascade turbulente au sens où on l'entend habituellement, c'est-à-dire avec un continuum spectral.

Des expériences dans un récipient rectangulaire utilisant des pistons sur les côtés ont été réalisées par Thorpe [2] afin de générer des modes stationnaires. Pour une grande amplitude de forçage, des irrégularités ont été observées qui ont conduit à du déferlement et du mélange. McEwan et ses collaborateurs ont réalisé une série d'expériences pour étudier l'instabilité paramétrique. [3] ont utilisé une palette oscillant dans un fluide linéairement stratifié. Il a observé la formation de brusques discontinuités de densité liées à la croissance des ondes secondaires par l'instabilité paramétrique. Orlandi [4] a étudié des ondes internes stationnaires en examinant en particulier comment des ondes de grande amplitude se brisaient lors d'un forçage à basse fréquence. Benielli et Sommeria [5] ont observé qualitativement une instabilité paramétrique sous-harmonique. Ils ont appliqué une excitation d'ensemble variant de manière paramétrique pour générer une onde stationnaire primaire. La croissance et le déferlement d'ondes secondaires dues à l'instabilité paramétrique sous-harmonique a été observée. À

notre connaissance, aucune étude expérimentale n'a encore été menée sur cette instabilité pour identifier clairement les 3 ondes impliquées, en mesurant leur fréquence et leur vecteur d'onde. C'est à cette tâche que nous nous sommes attelés dans ce travail.

2 Ondes internes et instabilité paramétrique sous-harmonique

Les ondes internes résultent de l'équilibre entre inertie d'une particule de fluide et force de rappel due à la poussée d'Archimède, dans un fluide stratifié. La force d'Archimède est caractérisée par la fréquence de Brunt-Väisälä, $N = \sqrt{g\partial_z\rho/\rho}$ où ρ est la densité du fluide et g l'accélération de la pesanteur. L'équation du mouvement, dans l'approximation de Boussinesq inviscide s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \nabla^2 \psi}{\partial t^2} + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} J(\nabla^2 \psi, \psi) - \frac{\partial}{\partial x} J(\rho', \psi). \quad (1)$$

L'écoulement étant incompressible, nous utilisons une fonction de courant ψ pour représenter la vitesse $\vec{u} = (u, v) = (\partial\psi/\partial z, -\partial\psi/\partial x)$ et ρ' représente le champ de perturbation de densité.

Après linéarisation, le membre de droite de l'équation du mouvement s'annule, ce qui conduit à la relation de dispersion usuelle pour une fréquence ω

$$\omega^2 = N^2 \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) \quad (2)$$

où k et k_z sont respectivement le module et la composante vertical du vecteur d'onde, \vec{k} . Pour de petites amplitudes, on pourrait penser que plusieurs ondes peuvent exister sous forme d'une superposition linéaire. Cependant, dans le cas d'une triade d'interaction résonnante, où les 3 ondes vérifient les conditions de résonance spatiale et temporelle

$$\vec{k}_0 + \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0 \quad (3)$$

$$\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0, \quad (4)$$

les termes non-linéaires agissent comme des termes de forçage, transférant l'énergie entre les 3 ondes. En particulier, pour une amplitude finie, une onde peut produire deux ondes secondaires de plus petite échelle et de plus basse fréquence.

Hasselmann a démontré [6] que la croissance des ondes secondaires se produit uniquement si $|\omega_1| + |\omega_2| = |\omega_0|$. La triade différence, où $||\omega_1| - |\omega_2|| = |\omega_0|$, n'est que neutralement stable. Dans le cas des ondes de grande échelle, comme on peut observer dans l'océan, où la dissipation est faible, le taux de croissance maximum de l'instabilité se produit pour des perturbations de la moitié de la fréquence de l'onde primaire $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega_0/2$, dans la limite des nombres d'onde élevés $||\vec{k}_1|| \simeq ||\vec{k}_2|| \gg ||\vec{k}_0||$. L'instabilité prend alors la forme d'une instabilité paramétrique, et est donc appelée " Instabilité paramétrique sous-harmonique" (PSI). Dans le cas des ondes dans un bassin expérimental, cette condition particulière n'est pas remplie, mais par extension, nous appelons encore PSI le phénomène observé, car le mécanisme physique correspondant est la même.

3 Dispositif expérimental

Un réservoir de 160 cm de long et 17 cm de large est rempli d'eau salée linéairement stratifiée avec une fréquence de Brunt-Väisälä constante N . Une onde interne est générée en utilisant un générateur d'onde similaire à celui utilisé dans les expériences précédentes, décrit dans [7]. Le générateur est constitué de plaques empilées, mises en mouvement grâce à des cames excentrées tournant autour d'un arbre, à l'intérieur des plaques, à fréquence constante. Le mouvement de ces plaques impose une condition aux limites en mouvement générant l'onde souhaitée. Dans les expériences présentées ici, l'onde générée est une onde plane de longueur d'onde $\lambda = 72$ mm. Dans ce cas, le générateur est placé

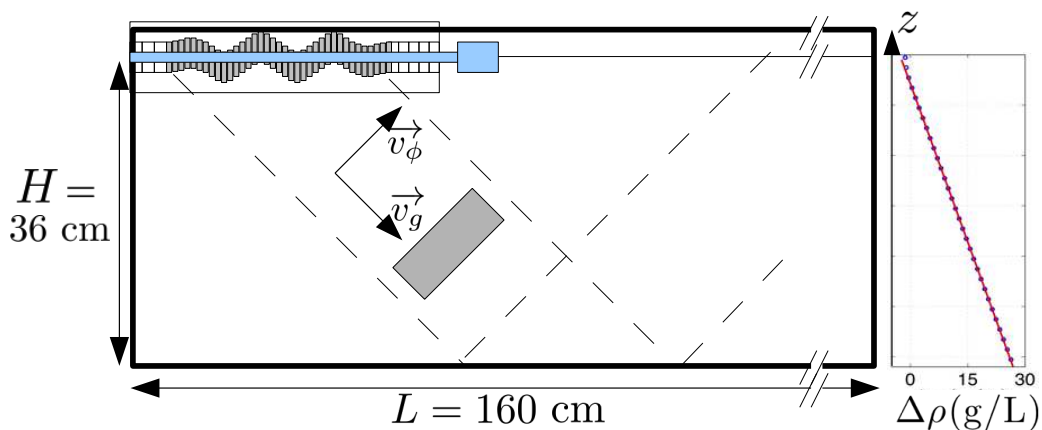


FIG. 1 – Schéma du dispositif expérimental montrant le générateur d’ondes allongé horizontalement à la partie supérieure du réservoir. Les lignes en pointillés délimitent le domaine attendu de propagation du faisceau d’onde, une fois qu’il a été émis par le générateur. Par souci de clarté, la direction de propagation de la phase et la vitesse de groupe sont également indiqués. Le rectangle gris incliné correspond à la zone d’analyse pour l’étude temps-fréquence. Le graphique à droite montre la mesure expérimentale de la variation de densité due au sel, $\Delta\rho = \rho - 1000$, en fonction de la profondeur de l’eau z . Les points correspondent aux mesures expérimentales et la ligne droite est un ajustement linéaire.

horizontalement comme indiqué dans la figure 1. Le mouvement des plaques est donc défini par une vitesse verticale $w(x, z = 0, t) = a\omega_0 \cos(\omega_0 t - 2\pi x/\lambda)$, ω_0 étant la fréquence d’excitation, a l’amplitude d’oscillation des plaques et H la profondeur de l’eau.

Le mouvement du fluide est capturé par la technique Schlieren synthétique en utilisant une grille de points aléatoire derrière le réservoir. Une caméra est utilisée pour acquérir des images de cette grille à 1,875 images par seconde. Un algorithme calcule la corrélation croisée entre l’image à un instant donné et l’image initiale. Cet algorithme donne les gradients de densité horizontal, $\tilde{\rho}_x(x, z, t) = \partial_x(\rho(x, z, t) - \rho_0(z))$, et vertical $\tilde{\rho}_z(x, z, t) = \partial_z(\rho(x, z, t) - \rho_0(z))$, où $\rho(x, z, t)$ et $\rho_0(z)$ sont les densités instantanée et initiale.

4 Résultats

Dans une configuration expérimentale où le réservoir est rempli avec une stratification linéaire produisant une fréquence de Brunt-Väisälä $N = 0.91$ rad/s, une onde plane est générée à une fréquence $\omega_0/N = 0.74$, avec une amplitude du mouvement des plaques de $a = 0.5$ cm. La figure 2(a) montre un aperçu du champ de gradient de densité, obtenu après 10 périodes d’oscillation du générateur d’ondes. On peut observer une onde plane qui s’étend sur deux longueurs d’onde, se propageant à partir du coin supérieur gauche au coin inférieur droit du champ d’observation, tandis que la phase se propage du coin inférieur gauche au coin supérieur droit. Quarante périodes d’oscillation plus tard (figure 2(b)), une forte perturbation de l’onde plane peut être observée. Des motifs à plus petite échelle se sont formés sur toute la surface qui était initialement occupée par le faisceau d’ondes planes.

Les champs mesurés de gradient de densité sont analysés en utilisant une représentation temps-fréquence [8] calculée à chaque point de l’espace

$$S_r(\omega, t) = \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} du \tilde{\rho}_r(u) e^{i\omega u} h(t - u) \right|^2 \right\rangle_{xz}, \quad (5)$$

où r représente x ou z et h est une fenêtre de lissage de Hamming d’énergie unité. Une grande (resp. petite) fenêtre fournit une bonne résolution en fréquence (resp. temps). Pour augmenter le rapport signal sur bruit, les données sont moyennées sur toute la fenêtre d’observation. Dans la suite, nous ne

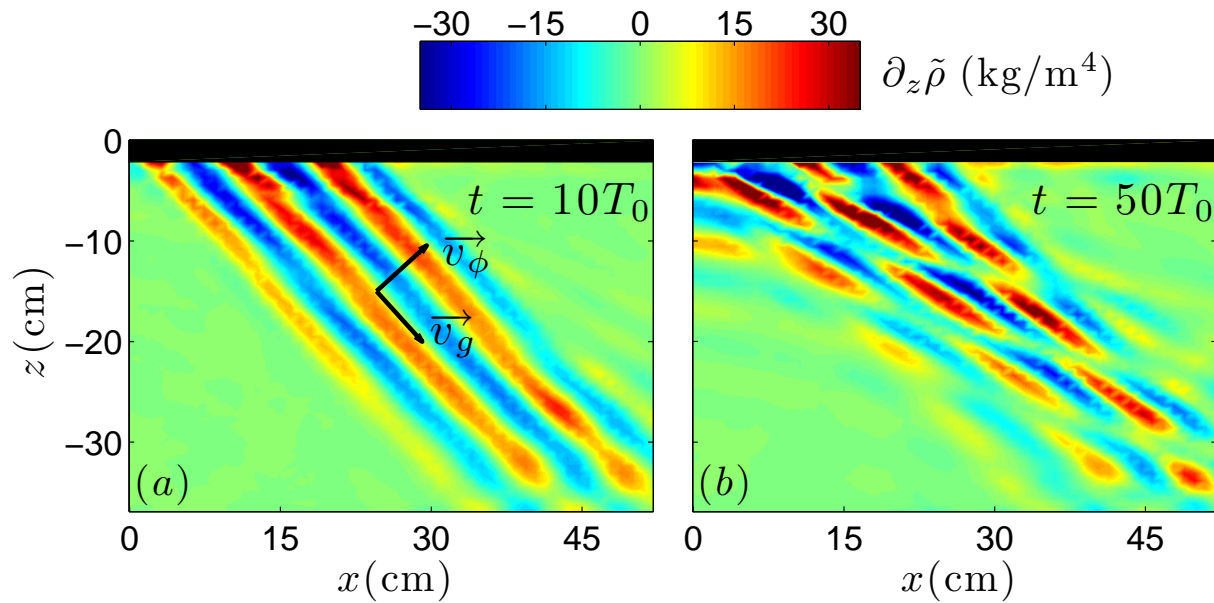


FIG. 2 – Instantanés du champ de gradient vertical de densité pour $t = 10T_0$ (a) et $t = 50T_0$ (b) où $T_0 = 2\pi/\omega_0$ est la période de l'onde primaire. L'onde se propage de la gauche vers la droite. Sur le panneau de gauche, la direction de la vitesse de phase \vec{v}_ϕ et la vitesse de groupe \vec{v}_g sont indiquées. Notez que l'échelle de couleurs est la même dans les deux figures.

considérons que l'analyse du champ de gradient vertical de densité, mais les résultats sont similaires pour le gradient horizontal.

La figure 3(a) montre le spectre temps-fréquence pour l'expérience correspondant à la figure 2. On peut clairement observer qu'au départ, seule la fréquence $\omega_0/N = 0.74$ est présente : elle correspond à l'onde produite par le générateur, que nous appellerons l'onde primaire. Après environ 10 périodes d'oscillation, on remarque la croissance de deux ondes secondaires, de fréquences $\omega_1/N = 0.50$ et $\omega_2/N = 0.24$. Afin de permettre une meilleure observation de ces trois fréquences, nous présentons sur la figure 3(b) une coupe verticale du spectre temps-fréquence à l'instant $t/T_0 = 50$. Comme on peut le constater, les fréquences satisfont à la condition de résonance temporelle $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$. Deux autres fréquences, $\omega/N = 0$ et $\omega/N = 0.98$, ont des contributions non nulles au signal. La première correspond à l'écoulement moyen généré par les plaques du générateur d'ondes par l'intermédiaire d'un entraînement de type vis d'Archimède. Une deuxième source d'écoulement moyen possible pourrait être la réflexion de l'onde primaire sur la partie inférieure du réservoir. L'autre fréquence supplémentaire, $\omega/N = 0.98$, peut être attribuée à l'interaction non linéaire entre les ondes de fréquences $\omega_2/N = 0.24$ et $\omega_0/N = 0.74$.

Pour extraire plus d'informations sur les différentes ondes impliquées dans cet écoulement, on peut filtrer le champ de gradient de densité autour des trois fréquences mesurées ω_0 , ω_1 et ω_2 . Cette opération de filtrage est effectuée en utilisant la méthode de la transformée de Hilbert qui a été développée dans [9]. Le résultat de cette opération appliquée aux champs de densité mesurés est montré sur la figure 4. Les champs de gradient de densité filtrés, associés à chaque fréquence sont montrés sur les figures du haut, à un instant donné. Notez que pour les trois cas différents, nous avons gardé seulement un quart des vecteurs d'onde possibles, comme indiqué sur les schémas au-dessus de la figure. Les vitesses de phase et de groupe étant orthogonales, la direction de propagation est déduite par une rotation de 90° , le sens de rotation étant choisi pour que les composantes verticales des vitesses de phase et de groupe soient de signes opposés. Pour les colonnes de gauche et de centre, cela correspond à une propagation à partir du coin supérieur gauche vers le coin inférieur droit, tandis que pour la colonne de droite, l'onde va du coin inférieur droit vers le coin supérieur gauche. On peut clairement constater que l'opération de filtrage a extrait trois ondes distinctes, chacune associée à l'angle de propagation correspondant.

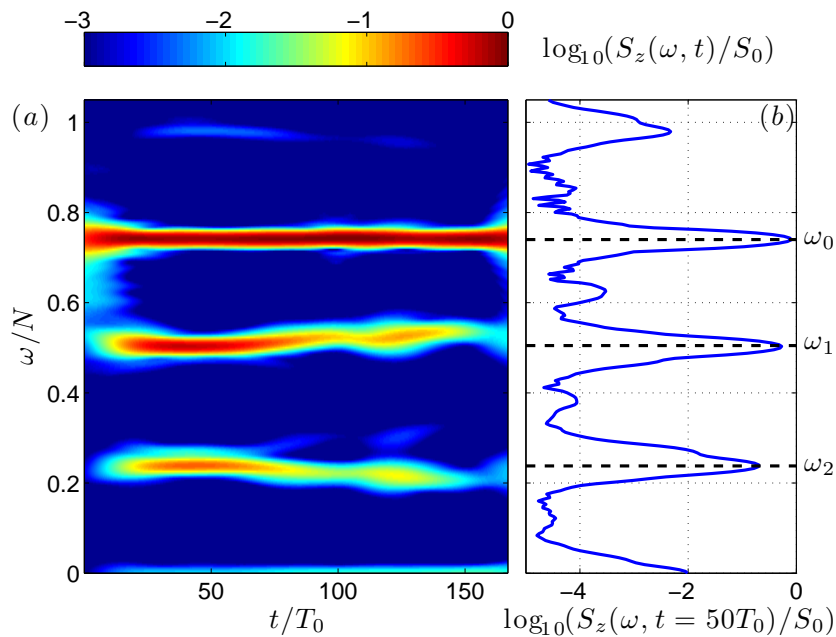


FIG. 3 – (a) Spectre temps-fréquence $S_z(\omega, t)$ du champ de gradient de densité. (b) Spectre fréquentiel $S_z(\omega, t = 50T_0)$. La quantité S_0 est définie comme la moyenne temporelle de la composante principale $S_0 = \langle S_z(\omega_0, t) \rangle_t$.

Comme mentionné précédemment, la transformée de Hilbert permet l'identification de l'orientation de la propagation de chaque onde, montrant que l'onde à la fréquence ω_2 se propage de droite à gauche, contrairement aux deux autres. Cela explique pourquoi nous observons signal à l'extérieur du faisceau d'ondes primaires dans le coin supérieur gauche de la figure 2(b).

Cette procédure permet aussi l'extraction de la phase ϕ_i du signal à une fréquence donnée, $\phi_i(t, x, z) = \omega_i t \pm \ell_i x \pm m_i z$, où (ℓ_i, m_i) sont les composantes horizontale et verticale du vecteur d'onde \vec{k}_i . Le résultat est montré pour $t = 50T_0$ dans la rangée du bas de la figure 4. Là encore, on peut observer clairement un motif de bandes parallèles à la direction de propagation de chaque onde, correspondant à une phase se propageant dans la direction perpendiculaire. À un instant donné et x (respectivement z) fixé, la phase est linéaire avec la position z (resp. x). Les composantes ℓ_i et m_i des vecteurs d'onde pour chaque onde peuvent alors être obtenues en dérivant $\phi_i(t, x, z)$ par rapport à z (resp. x). Pour l'expérience présentée dans la figure 2, on obtient $(\ell_1 + \ell_2)/\ell_0 = 0.89 \pm 0.17$ et $(m_1 + m_2)/m_0 = 0.99 \pm 0.07$. On constate que les trois vecteurs satisfont à la condition de résonance spatiale : $\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$, compte tenu des incertitudes expérimentales.

5 Conclusions

En utilisant une technique de Schlieren synthétique dans un fluide linéairement stratifié, nous avons observé la production, à partir d'une onde interne plane primaire, de deux ondes secondaires de plus petite fréquence et longueur d'onde. Le mécanisme en jeu est une interaction résonante à trois ondes, satisfaisant une condition de résonance temporelle pour les trois pulsations et une condition de résonance spatiale pour les trois vecteurs d'onde. Une étude plus complète, incluant la mesure du taux de croissance de l'instabilité, ainsi qu'une comparaison aux prédictions théoriques, est présentée dans [10].

La pertinence de la PSI pour les ondes internes océaniques a été démontrée récemment par plusieurs simulations numériques avec des conditions réalistes (voir par exemple [11] ou [12]), ainsi que par des mesures de terrain très intéressantes qui ont également souligné la présence d'une activité PSI dans l'océan ([13], [14], [15]).

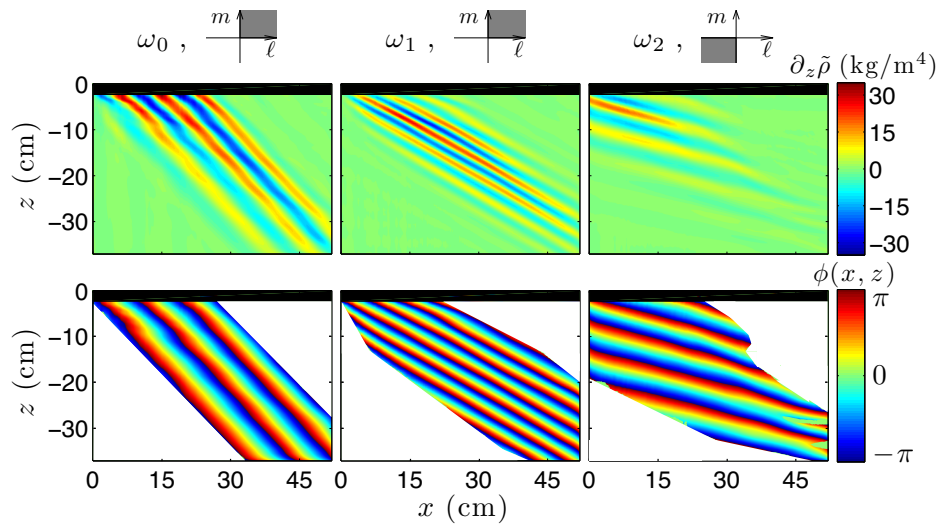


FIG. 4 – Rangée du haut: onde primaire (à gauche) et ondes secondaires (au centre et à droite) obtenues en appliquant le filtrage de Hilbert au champ de gradient de densité à $t/T_0 = 50$. Les schémas sur le dessus indiquent le domaine de vecteur d'onde (ℓ, m) qui sont conservés lors du filtrage spatial de Hilbert pour chaque colonne. Rangée du bas: phases correspondantes associées à chaque fréquence. La phase est affichée uniquement lorsque l'amplitude de l'onde est supérieure à 3% du maximum.

Références

- [1] Staquet, C. and Sommeria, J. 2002 Internal gravity waves: From instabilities to turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **34**, 559–593.
- [2] Thorpe, S. 1968 On standing internal gravity waves of finite amplitude. *J. Fluid Mech.*, **32**, 489–528.
- [3] McEwan, A. 1971 Degeneration of resonantly-excited standing internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **50**, 431–448.
- [4] Orlanski, I. 1972 On the breaking of standing internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **54**, 577–598.
- [5] Benielli, D. and Sommeria, J. 1998 Excitation and breaking of internal gravity waves by parametric instability. *J. Fluid Mech.*, **374**, 117–144.
- [6] Hasselmann, K. 1967 A criterion for nonlinear wave stability. *J. Fluid Mech.*, **30**, 737.
- [7] Gostiaux, L., Didelle, H., Mercier, S., and Dauxois, T. 2007 A novel internal waves generator. *Experiments in Fluids*, **42**, 123–130.
- [8] Flandrin, P. 1999 *Time-Frequency/Time-Scale Analysis, Time-Frequency Toolbox for Matlab*©. Academic Press, San Diego.
- [9] Mercier, M. J., Garnier, N. B., and Dauxois, T. 2008 Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the Hilbert transform. *Phys. Fluids*, **20**, 086601.
- [10] Bourget, B., Dauxois, T., Joubaud, S., and Odier, P. 2013 Experimental study of parametric subharmonic instability for internal plane waves. *J. Fluid Mech.*, **723**, 1–20.
- [11] Hibiya, T., Nagasawa, M., and Niwa, Y. 2002 Nonlinear energy transfer within the oceanic internal wave spectrum at mid and high latitudes. *J. Geophys. Res.-Oceans*, **107**, 3207.
- [12] MacKinnon, J. and Winters, K. 2005 Subtropical catastrophe: Significant loss of low-mode tidal energy at 28.9 degrees. *Geophys. Res. Lett.*, **32**, L15605.
- [13] Rainville, L. and Pinkel, R. 2006 Propagation of low-mode internal waves through the ocean. *J. Phys. Ocean.*, **36**, 1220–1236.
- [14] Carter, G. S. and Gregg, M. C. 2006 Persistent near-diurnal internal waves observed above a site of M-2 barotropic-to-baroclinic conversion. *J. Phys. Ocean.*, **36**, 1136–1147.
- [15] Alford, M. H., MacKinnon, J. A., Zhao, Z., Pinkel, R., Klymak, J., and Peacock, T. 2007 Internal waves across the Pacific. *Geophys. Res. Lett.*, **34**, L24601.