

Propagation et réflexion d'ondes internes dans l'océan : le mystère de l'angle critique

par **Louis GOSTIAUX** et **Thierry DAUXOIS**
Laboratoire de physique de l'ENS de Lyon
UMR CNRS 5672 – 69364 Lyon Cedex 07
Thierry.Dauxois@ens-lyon.fr

RÉSUMÉ

Nous présentons un phénomène physique original où les notions de vitesses de phase et de groupe sont clairement distinguées, puisque orthogonales : il s'agit des ondes de gravité internes se propageant à l'intérieur des fluides stratifiés, comme les océans mais aussi l'atmosphère ou les étoiles. Outre son aspect nouveau, il s'avère que le processus de réflexion de ces ondes de densité, lui aussi particulier et paradoxal, est évoqué pour expliquer les processus de mélange (de planctons notamment) et les échanges entre les zones proches des fonds marins et l'intérieur de l'océan. Ceci a été mis en évidence récemment dans les océans.

1. INTRODUCTION

Il existe de nombreux domaines de la physique où la densité des fluides étudiés n'est pas homogène. Lorsque les variations se font selon une seule direction, on parle de fluides stratifiés. L'eau des océans est plus salée en profondeur. L'eau des océans et des lacs est aussi plus froide, donc plus dense, au fur et à mesure que l'on descend (la plongée sous-marine permet d'expérimenter très vite ce phénomène !). L'atmosphère également devient moins dense avec l'altitude, et la portance des avions s'en ressent. Dans les étoiles, la densité augmente en allant vers le centre. Enfin, au point critique des corps purs, la divergence de la compressibilité permet d'observer une stratification à petite échelle due à la gravité. On peut retrouver des ondes internes dans toutes ces situations physiques, mais nous nous limiterons ici aux océans.

Les données physiques définissant les principales propriétés de l'eau de mer sont au nombre de trois : salinité, température et pression. Considérons d'abord les domaines de variation de ces paramètres.

La salinité est la quantité d'ions dissoute dans l'eau, généralement exprimée en grammes par kilogramme d'eau de mer (ce qui en fait un nombre sans dimension) : elle vaut en moyenne 34,7 dans l'océan. Elle est due essentiellement au chlorure de sodium (à 80 %), puis viennent le chlorure de magnésium (10 %), le sulfate de magnésium (5 %), le sulfate de calcium (3 %) et le sulfate de potassium (2 %). Cette salinité varie relativement peu sur l'ensemble des océans puisque 50 % de l'eau de mer a une salinité comprise entre 34,6 et 34,7 [9]. Si l'on omet quelques zones très particulières (Mer Morte (= 275), Grand Lac Salé d'Utah (= 150), Mer Rouge (= 41), ...), la gamme de variation se situe entre 34 et 37.

La température moyenne de l'eau de mer est-elle de 3,5 °C, et pour 50 % de la masse des océans reste entre 1,3 et 3,8 °C [9]. En revanche, l'influence de la surface donne une

plus grande plage de variation allant jusqu'à 25 °C en été sur nos plages. Quant à la pression, on se limitera à rappeler qu'elle augmente tous les dix mètres d'une atmosphère et que la profondeur moyenne des océans est de 3 500 m.

La température, la salinité et la pression déterminent la masse volumique¹ du fluide selon son équation d'état. Une formule empirique permet ainsi d'obtenir ces variations dans la gamme mise en jeu à partir des relevés *in situ* des grandeurs précédentes [1]. On peut ainsi mesurer localement la stratification des océans (cf. annexe).

2. LA FRÉQUENCE DE BRUNT-VÄISÄLÄ

Considérons une particule de fluide écartée de son altitude d'équilibre z_0 d'une distance δz selon la verticale (cf. figure 1). On se limitera à un problème bidimensionnel dans un plan vertical (O, \vec{e}_x , \vec{e}_z). La particule se dilate adiabatiquement et acquiert une densité ρ_1' différente de la densité ρ_1 du fluide environnant (la stratification est due en partie à la pression, dont l'effet disparaît ici avec la dilatation, mais également à la salinité et la température qui ne s'équilibrent pas avec le fluide environnant). Elle subit donc, outre son poids une poussée d'Archimède proportionnelle au gradient de densité (auquel on retranche l'effet de la compressibilité du fluide, ce qui définit une densité potentielle $\bar{\rho}$, cf. annexe). La projection de l'équation du mouvement de la particule selon la direction verticale s'écrit alors en utilisant l'approximation de Boussinesq :

$$\rho_0 \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} = -g [\rho_1' - \rho_1] = g \frac{d\bar{\rho}}{dz} \delta z \quad (1)$$

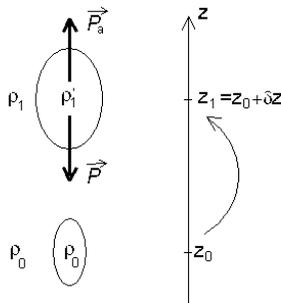


Figure 1 : Déplacement adiabatique d'une particule de fluide initialement à l'altitude z_0 et de masse volumique ρ_0 . Élevée de δz elle oppose à son poids la poussée d'Archimède.

Comme la densité potentielle est une fonction décroissante de l'altitude (condition de stratification stable), la force totale est du signe opposé à δz . La dynamique correspond donc à des oscillations harmoniques autour d'une position stable, avec une pulsation caractéristique :

¹ Il est fréquent en océanographie d'utiliser abusivement le terme densité pour masse volumique, notamment dans l'introduction de la densité potentielle (le terme "masse volumique potentielle n'existe pas). Nous nous permettons cet usage dans la suite de l'article.

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz}}, \quad (2)$$

appelée fréquence de Brunt-Väisälä. L'énergie potentielle associée s'écrit :

$$e_p = \frac{1}{2} \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz} \delta z^2. \quad (3)$$

Dans le cas de l'océan, le gradient de densité potentielle est de l'ordre de $1,2 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^{-4}$ ce qui correspond à une fréquence de Brunt-Väisälä de l'ordre de 10^{-3} Hz : la période d'oscillation des masses de fluide est de l'ordre de vingt minutes ! On peut comparer cette période au temps caractéristique d'équilibre thermique et salin, défini à partir des constantes de diffusion thermique et saline qui sont du même ordre de grandeur : $\kappa = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Cette valeur est une diffusivité effective qui prend en compte le mélange par turbulence aux petites échelles, dominant par rapport au processus de diffusion classique. En vingt minutes, le fluide est homogénéisé sur 8 cm, alors que dans l'océan les masses déplacées font plusieurs kilomètres cubes... L'approximation de Boussinesq est par conséquent validée *a posteriori* (cf. annexe).

3. PROPAGATION DES ONDES INTERNES

Un fluide stratifié peut donc être considéré comme un milieu continu dont chaque élément est susceptible de vibrer autour de sa position d'équilibre. Il est par conséquent légitime d'étudier la propagation d'ondes dans ce milieu et, comme nous allons le voir, cela conduit à des résultats étonnants.

Considérons donc un fluide caractérisé à l'équilibre par une stratification verticale $\rho_0(z)$ et une pression $P_0(z)$. On considérera le cas d'une stratification uniforme, c'est-à-dire $N = \text{cst}$. La pression P et la densité ρ peuvent alors s'exprimer [2] en introduisant les perturbations, supposées faibles, de pression P_e , et de densité ρ_e , dues à l'onde :

$$P = P_0(z) + P_e(x, z, t), \quad (4)$$

$$\rho = \rho_0(z) + \rho_e(x, z, t). \quad (5)$$

Le champ de vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = v_x(x, z, t) \vec{e}_x + v_z(x, z, t) \vec{e}_z. \quad (6)$$

3.1. L'équation d'onde

L'équation d'Euler peut s'écrire sous la forme approchée :

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}. \quad (7)$$

en utilisant [2] l'approximation de Boussinesq (on néglige ρ_e devant ρ_0 dans le terme inertiel mais on le laisse en facteur de g pour traduire la poussée d'Archimède). Au premier ordre, on retrouve l'équilibre hydrostatique :

$$\frac{dP_0}{dz} + \rho_0 g = 0. \quad (8)$$

On obtient à l'ordre 1 les deux équations suivantes :

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial P_e}{\partial x}, \quad (9)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = - \frac{\partial P_e}{\partial z} - \rho_e g. \quad (10)$$

La conservation de la densité *potentielle* (cf. annexe) le long des lignes de courant s'écrit quant à elle :

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + v_z \frac{d\bar{\rho}}{dz} = 0, \quad (11)$$

et enfin l'incompressibilité conduit dans le cadre de l'approximation de Boussinesq à :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

Nous avons donc les quatre équations (9), (10), (11) et (12), pour les quatre inconnues v_x , v_z , ρ_e et P_e .

La dérivée temporelle de l'équation (12), combinée à la dérivée par rapport à x de l'équation (9), conduit à :

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t \partial z} = - \frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial x} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}. \quad (13)$$

La dérivée temporelle de l'équation (10) combinée à l'équation (11), donne :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 P_e}{\partial t \partial z} - g \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = - \frac{\partial^2 P_e}{\partial t \partial z} + g v_z \frac{d\bar{\rho}}{dz}. \quad (14)$$

En introduisant la pulsation de Väisälä, on peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 P_e}{\partial t \partial z} - N^2 \rho_0 v_z. \quad (15)$$

L'opérateur ∂_x^2 appliqué à l'équation (15) conduit à :

$$\rho_0 \frac{\partial^4 v_z}{\partial t^2 \partial x^2} = - \frac{\partial^4 P_e}{\partial t \partial z \partial x^2} - N^2 \rho_0 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}, \quad (16)$$

alors que l'opérateur $\partial_t \partial_z$ appliqué à l'équation (13) donne² :

$$\frac{\partial^4 v_z}{\partial t^2 \partial z^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^4 P_e}{\partial x^2 \partial t \partial z}. \quad (17)$$

En regroupant finalement les équations (16) et (17), on aboutit à :

$$\frac{\partial^4 v_z}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 v_z}{\partial t^2 \partial z^2} = - N^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}. \quad (18)$$

² On néglige ici la dérivée de ρ_0 par rapport à z , ce qui revient à supposer $k_z \gg N^2 / g$ (voir ci-après pour la définition de k_z). L'approximation est tout à fait légitime en milieu faiblement stratifié.

Il est important de noter que l'on aboutit à la même équation pour les trois autres variables, u , P_e et ρ_e après un nombre d'étapes identiques.

3.2. Ondes progressives

Si l'on recherche des solutions progressives de l'équation (18) sous la forme :

$$[v_x, v_z, P_e, \rho_e] = [\hat{v}_x, \hat{v}_z, \hat{P}_e, \hat{\rho}_e] e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)}, \tag{19}$$

on obtient la relation de dispersion :

$$\omega^2 (k_x^2 + k_z^2) - N^2 k_x^2 = 0, \tag{20}$$

soit encore :

$$\omega = \pm N \frac{k_x}{k} = \pm N \sin \beta \tag{21}$$

en notant β l'angle du vecteur d'onde avec la verticale et $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$.

Cette formule est assez surprenante car le module du vecteur d'onde $k = |\vec{k}|$ n'y figure plus : il ne reste que la direction du vecteur d'onde, β . La première propriété étonnante des ondes internes est donc de se propager selon une *direction fixe* lorsque la fréquence est fixée ; la longueur d'onde est en revanche quelconque.

On peut déduire de l'équation (21) quelques conséquences immédiates :

- ♦ si $\omega = 0$, il n'y a pas de variation horizontale et $k_x = 0$. Il ne peut y avoir de recirculation et le fluide est bloqué ;
- ♦ toutes les pulsations $0 < \omega < N$ peuvent se propager ;
- ♦ pour $\omega = N$, $k_x \neq 0$ et $k_z = 0$, chaque colonne oscille complètement indépendamment de ses voisines, par conséquent $\vec{v} = v_z(x) \vec{e}_z$. Tous les vecteurs d'ondes parallèles à x sont donc autorisés ;
- ♦ pour $\omega > N$, le vecteur d'onde \vec{k} a une partie imaginaire et l'onde est amortie.

On retiendra donc que l'anisotropie du milieu impose que ces ondes soient dispersives, de relation de dispersion anisotrope et de pulsation inférieure à N (une particule de fluide déplacée horizontalement n'oscillera pas).

La vitesse de phase peut être calculée à partir de la relation de dispersion :

$$\overline{v}_\varphi = \frac{\omega}{k^2} \vec{k} \tag{22}$$

$$= \pm \frac{N}{k} \sin \beta \left[\sin \beta \vec{e}_x + \cos \beta \vec{e}_z \right]. \tag{23}$$

En différenciant la relation de dispersion $\omega^2 = N^2 k_x^2 / (k_x^2 + k_z^2)$, on obtient également la vitesse de groupe :

$$\overline{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \vec{e}_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \vec{e}_z \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pm \frac{Nk_z}{(k_x^2 + k_z^2)^{3/2}} [k_z \bar{e}_x - k_x \bar{e}_z] \\
 &= \pm \frac{N}{k} \cos \beta [\cos \beta \bar{e}_x - \sin \beta \bar{e}_z] \quad (25)
 \end{aligned}$$

En effectuant le produit scalaire des expressions (23) et (24), on montre que la vitesse de groupe est donc perpendiculaire à la vitesse de phase des ondes internes : par conséquent, un rayon d'ondes internes se *propage parallèlement à ses plans d'onde* !

Notons enfin que l'équation de continuité (12) conduit à l'expression :

$$\frac{\hat{v}_x}{\hat{v}_z} = -\cotan \beta. \quad (26)$$

Les deux vitesses étant en phase, les particules se déplacent perpendiculairement au vecteur d'onde, ce que l'on résume sur la figure 2. Nous omettrons donc par la suite les notations complexes \hat{v}_x , \hat{v}_z . Une étude tenant compte de la force de Coriolis rend néanmoins cette notation pertinente, les trajectoires devenant alors des ellipses...

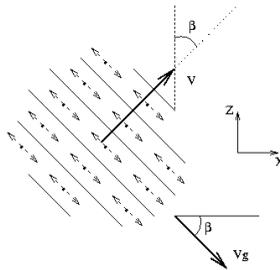


Figure 2 : Représentation des plans d'ondes, de la vitesse de phase, de la vitesse de groupe, et de la trajectoire des particules de fluide.

L'expérience de MOWBRAY et RARITY (1967) conçue pour vérifier la relation de dispersion est à ce stade particulièrement intéressante pour bien comprendre les conséquences de résultats inhabituels. Il s'agit d'observer dans une cuve rectangulaire les ondes générées par un barreau oscillant verticalement à une fréquence donnée ω . La cuve est remplie d'eau salée de manière à obtenir une stratification linéaire (l'eau plus salée et donc plus dense se situe par conséquent en bas) et les ondes sont observées par ombroscopie, en utilisant le fait que l'indice optique dépend de la concentration en sel. Si des mouvements sont forcés à la pulsation ω_i dans un fluide de gradient de masse volumique constant, toute onde de vecteur d'onde faisant un angle $\beta = \arcsin(\omega_i / N)$ avec la verticale est théoriquement excitée. Comme les rayons sont donnés par les directions de la vitesse de groupe, on voit donc apparaître *une croix* (cf. figure 3), avec quatre branches, chacune faisant un angle β avec l'horizontale. On est donc bien loin de l'onde circulaire que donnerait une émission acoustique localisée par exemple.

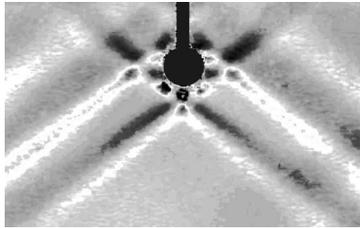


Figure 3 : Visualisation par ombroscopie des mouvements d'un fluide stratifié lorsqu'il est excité par un barreau oscillant verticalement [10]. Les ondes excitées se propagent avec un angle β par rapport à la verticale en formant une croix (d'après [10]).

La relation de dispersion (21) montre également qu'aucune échelle caractéristique n'est associée aux ondes internes. Notons que ceci ne préjuge pas des phénomènes physiques sélectionnant le nombre d'onde de l'onde, puisque cette relation a été obtenue en l'absence de source. La réalité montre qu'une longueur d'onde, de l'ordre d'une grande échelle caractéristique de l'expérience, est généralement sélectionnée : ici, cela sera la taille de l'objet immergé oscillant. Ce sont néanmoins des questions toujours d'actualité [7].

4. ASPECTS ENERGETIQUES

En repartant des équations (9) et (10), que l'on multiplie par v_x et v_z respectivement et que l'on somme, on obtient :

$$\frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial v_x^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial v_z^2}{\partial t} = -v_x \frac{\partial P_e}{\partial x} - v_z \frac{\partial P_e}{\partial z} - v_z \rho_e g \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_0}{2} (v_x^2 + v_z^2) = -(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) P_e - v_z \rho_e g \quad (28)$$

$$= -\text{div} (P_e \vec{v}) + P_e \underbrace{\text{div} \vec{v}}_{=0} - v_z \rho_e g \quad (29)$$

$$= -\text{div} \vec{I} - v_z \rho_e g. \quad (30)$$

Le membre de gauche correspond à la variation de l'énergie cinétique. $\text{div} \vec{I}$ est associé au travail des forces de pression ; il peut également être interprété comme étant la divergence d'une densité de flux de travail $P_e \vec{v}$ qui modifie l'énergie de l'onde. Le troisième terme, $v_z \rho_e g$ temporelle, correspond au travail de la poussée d'Archimède.

Cette force étant conservative, on peut montrer qu'elle dérive de l'énergie potentielle (3) en utilisant la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = \frac{N^2 \rho_0}{g} \frac{\partial \delta z}{\partial t} \Rightarrow \rho_e = \frac{N^2 \rho_0}{g} \delta z. \quad (31)$$

On peut donc réécrire l'équation (27) sous la forme classique suivante :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial (e_k + e_p)}{\partial t} = -\text{div} \vec{I}, \quad (32)$$

e correspondant à l'énergie totale de l'onde par unité de volume. Nous avons donc vérifié que les équations linéarisées que nous avons utilisées conduisent à une équation de conservation de l'énergie avec un flux d'énergie et une densité d'énergie totale e, somme de la partie cinétique et potentielle.

Montrons que, puisque le système est conservatif et harmonique, il vérifie la loi d'équipartition de l'énergie, en moyenne. On a d'une part :

$$\langle e_k \rangle = \left\langle \frac{\rho_0}{2} (v_x^2 + v_z^2) \right\rangle = \frac{\rho_0}{4} v^2, \tag{33}$$

et d'autre part :

$$\langle e_p \rangle = \left\langle \frac{1}{2} N^2 \rho_0 (\delta z)^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \frac{N^2 \rho_0 v_z^2}{\sin^2 \beta} = \frac{\rho_0}{4} v^2. \tag{34}$$

L'énergie totale donne finalement :

$$\langle e \rangle = \langle e_k \rangle + \langle e_p \rangle = \frac{\rho_0}{2} v^2 = 2 \langle e_k \rangle = 2 \langle e_p \rangle. \tag{35}$$

On obtient donc bien une équipartition de l'énergie ondulatoire.

Ceci nous permet de mieux comprendre la signification du vecteur \vec{i} . En effet, en utilisant l'équation (9), on a :

$$P_e = \mp \frac{\rho_0 \omega v_x}{k_x} = \mp \frac{\rho_0 N \sin \beta v_x}{k_x}. \tag{36}$$

Par conséquent,

$$\vec{i} = \mp \frac{\rho_0 N \sin \beta v_x}{k_x} (v_x \vec{e}_x + v_z \vec{e}_z) \tag{37}$$

$$= \mp \frac{\rho_0 N v^2}{k} \cos \beta (-\cos \beta \vec{e}_x + \sin \beta \vec{e}_z) \tag{38}$$

$$= \pm \frac{\rho_0 N v^2}{k} \cos \beta (\cos \beta \vec{e}_x - \sin \beta \vec{e}_z) \tag{39}$$

$$= \langle e \rangle \vec{v}_g. \tag{40}$$

Le bilan d'énergie (32) s'écrit finalement :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\text{div} (\langle e \rangle \vec{v}_g). \tag{41}$$

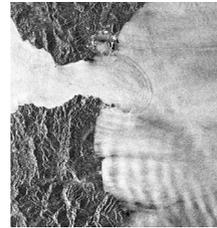
On retrouve donc une équation-bilan en l'absence de terme de source.

5. LES ONDES INTERNES DANS L'OCEAN

L'observation des ondes internes est rendue difficile par le fait qu'on ne peut faire des relevés océanographiques de température, salinité, pression et vitesse que localement, à l'aide de sondes généralement. Pourtant, dans certains cas, les ondes internes peu profondes (centaine de mètres) peuvent déformer la surface des océans à leur passage [3]. L'interférométrie radar par satellite permet alors de voir ces déformations (comme on regarderait des franges d'égale épaisseur dans le domaine optique) et de suivre des paquets d'ondes internes.



a) Au détroit de Lombok près de Bali, le nord étant à gauche.



b) Au détroit de Gibraltar.

Figure 4 : Diffraction d'ondes internes (image NASA®)

La figure 4a montre l'île de Bali (en bas) et le détroit de Lombok (au-dessus). On peut distinguer deux paquets d'onde se propageant vers la gauche et vers la droite du détroit; ils sont dus à la présence de forts courants de marée, jusqu'à $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, qui interagissent avec un saut de relief (parfois appelée montagne sous-marine) situé au fond du détroit. La largeur du paquet d'ondes de gauche atteint 80 km. Les longueurs d'ondes les plus courtes, typiquement de l'ordre de 5 à 10 km, se propagent plus lentement comme le prédit la relation de dispersion. Notons également la diffraction de ces ondes par le détroit.

La figure 4b montre des ondes internes générées par les courants de marée à l'est du détroit de Gibraltar. On remarque la nette diffraction de ces ondes. On peut également distinguer sur le bas du même cliché, la présence d'ondes internes atmosphériques, dites ondes de « lee ». Ce mot (n'ayant pas de traduction française) signifie « côté sous le vent » d'un bateau ou d'une montagne. De telles ondes sont engendrées par la turbulence provoquée dans un écoulement atmosphérique au passage sur un relief. On observe fréquemment dans le ciel ces rouleaux de nuages, qui sont la manifestation d'ondes internes dans l'atmosphère.

La mer d'Andaman, située dans l'océan indien à l'ouest de la Thaïlande, est un site réputé pour la présence mais surtout les effets parfois dévastateurs de ces ondes. En 1980, OSBORNE et BURCH étudièrent ainsi les mesures réunies par l'entreprise américaine Exxon [4], de manière à mieux connaître ces ondes mais surtout leurs effets sur les plates-formes pétrolières bien évidemment. Par ailleurs, ce type d'onde est une des raisons évoquées pour expliquer la perte, peu documentée, du sous-marin nucléaire américain USS Thresher, disparu en 1969, à la suite d'une descente trop rapide.

6. REFLEXION DES ONDES INTERNES: LE MYSTERE DE L'ANGLE CRITIQUE

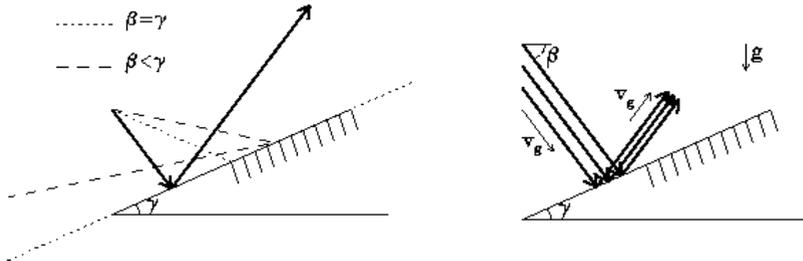
6.1. Le paradoxe

Considérons maintenant l'interaction d'une onde interne avec un fond marin que nous supposons incliné avec un angle γ par rapport à l'horizontale. Comme lors de tout phénomène de réflexion, la pulsation de l'onde est conservée de manière à respecter les conditions aux limites dans l'approximation linéaire. Par conséquent, étant donné la relation de dispersion (21), lorsqu'une onde interne se réfléchit, son angle de propagation par rapport à l'horizontale sera conservé, *indépendamment de l'angle de la pente* : il n'y aura donc plus de réflexion spéculaire comme pour des ondes acoustiques ou optiques, mais une réflexion qui dépend de l'angle γ de la pente avec l'horizontale.

Comme le montre la figure 5a, il existe les trois possibilités suivantes :

- ◆ $\gamma < \beta$: réflexion vers le haut :
- ◆ $\gamma > \beta$: réflexion vers le bas ;
- ◆ $\gamma = \beta$: réflexion le long du plan incliné.

Il apparaît donc un angle critique, $\gamma = \beta$, sans équivalent dans le cadre de la réflexion d'ondes acoustiques, puisque dans ce dernier cas, c'est l'angle par rapport à la normale à la surface qui est conservé, donnant lieu à la réflexion spéculaire.



a) Réflexion d'une onde interne selon que $\gamma < \beta$ (réflexion vers le haut avec la ligne continue), $\gamma > \beta$ (réflexion vers le bas avec la ligne traits tirés) et $\gamma = \beta$ (réflexion critique avec la ligne pointillée). b) Réflexion d'un faisceau d'ondes internes dans le cas où l'angle γ de la pente, est inférieur à celui caractérisant l'onde incidente, β .

Figure 5 : Représentation schématique de la réflexion d'ondes internes.

Si l'on considère désormais un faisceau d'ondes internes se réfléchissant sur une paroi inclinée, la figure 5b) met en évidence un fort rétrécissement de la largeur du faisceau après la réflexion, lorsque les conditions sont proches de cet angle critique. Par conservation de l'énergie, il sera accompagné d'une augmentation de la densité d'énergie de l'onde réfléchie. Ce raisonnement simple et géométrique indique par conséquent que la largeur du faisceau réfléchi s'annulera pour l'angle critique alors que l'amplitude de l'onde deviendra infinie ! Comme nous avons vu que le flux d'énergie est égal au produit de l'énergie par la vitesse de groupe (cf. Eq. (40)), cela signifie également que la vitesse de groupe de l'onde réfléchie s'annule.

Ce paradoxe n'est évidemment qu'apparent, puisque ces résultats ne respectent pas toutes les hypothèses qui nous ont permis d'établir les lois utilisées. Nous avons ainsi mené une étude linéaire : évidemment, si l'amplitude diverge, on devra tenir compte des effets non linéaires, et cela même si l'amplitude de l'onde initiale est faible. Nous avons, par ailleurs, négligé les effets de viscosité. Ceux-ci ne sont évidemment plus négligeables lorsque la vitesse le long de la pente devient très grande : l'énergie sera absorbée par dissipation visqueuse.

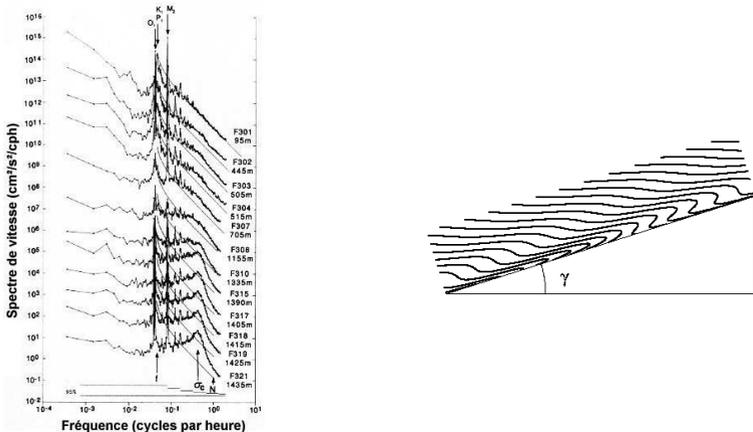
Traiter le problème non linéaire et visqueux est possible mais clairement une tâche plus ardue. Nous avons donc choisi des méthodes analytiques (échelles multiples et raccordements asymptotiques) pour résoudre ce problème [5]. Cette approche se révèle tout à fait appropriée et permet de lever cette singularité, non résolue depuis trente ans. Un aspect très particulier de cette théorie faiblement non linéaire est que la description réduite finale est une équation linéaire (i.e. qu'à l'ordre où intervient la condition de compatibilité, toutes les contributions résonantes non linéaires s'annulent), alors que l'on

s'attendait à une équation non linéaire de type Korteweg de Vries, comme dans le cas des vagues en eau peu profonde. Il faut cependant noter que la non linéarité intervient, néanmoins, de manière importante dans la physique du problème. Nous avons ainsi pu résoudre ce vieux paradoxe et, pour la première fois, comprendre les effets de la non linéarité, de la viscosité ainsi que les effets transitoires près de la paroi.

6.2. Mise en évidence expérimentale

Charles ERIKSEN a effectué des relevés océanographiques [6] dans l'océan Pacifique par analyse spectrale des mouvements d'eau en fonction de la profondeur au voisinage d'un fond océanique faisant un angle moyen de $\gamma = 24^\circ$ avec l'horizontale. Ces relevés permettent de confirmer de manière splendide que les ondes internes arrivant sur cette montagne sous-marine avec un angle quasi-critique sont, effectivement, majoritairement bloquées au voisinage de la pente.

La figure 6a révèle ainsi que près du fond marin, il y existe un très fort signal autour de 0,4 cpH, la fréquence critique associée à la pente locale de la montagne sous-marine ($N = 1$ cpH conduit à $N \sin \gamma = 0,41$ cpH). Au fur et à mesure que l'on s'éloigne du fond, le pic disparaît progressivement, prouvant ainsi le lien étroit entre la présence de ce pic et celle de la pente. La sur-représentation de ces ondes dans cette bande de fréquence indique qu'il y a une très forte amplification des ondes réfléchies près de cette fréquence critique, et qu'elles sont bloquées près de la pente comme l'étude théorique précédente l'avait suggérée. Lorsque la distance au fond marin augmente, l'amplitude de la bosse se réduit : on obtient alors le spectre, dit de Garrett et Munk, qui est très bien vérifié au milieu de l'océan.



- a) Relevé des spectres (amplitude des oscillations) d'ondes internes obtenus près d'une montagne sous-marine faisant un angle moyen de $\gamma = 24^\circ$ avec l'horizontale [6]. Les différents spectres correspondent à différentes profondeurs, exprimées en mètre et indiquées sur l'échelle de droite. Les traits continus correspondent à une prédiction théorique très bien vérifiée à l'intérieur de l'océan.
- b) Déformation à un instant donné des lignes isodensité obtenues à partir des prévisions théoriques lors de la réflexion d'ondes internes dans un cas quasi-critique [5].

Figure 6 : Réflexion d'ondes internes.

On peut noter également que l'énergie mise en jeu dans ce phénomène n'est aucunement négligeable devant le reste du spectre : une meilleure compréhension des conséquences de cette réflexion sur le mélange et la turbulence des eaux profondes permettra sans doute d'améliorer les simulations d'évolution océaniques déjà existantes. C'est l'objectif de la prochaine partie.

6.3. Conséquences sur le mélange

La théorie faiblement non linéaire prévoit alors une instabilité des plans d'onde qui déferlent (*cf.* figure 6b) le long de la pente [5]. La situation la plus propice pour le mélange correspond bien sûr au cas où l'angle de propagation de l'onde incidente est approximativement égal à l'angle de la pente. L'amplitude de l'onde réfléchie étant importante, les couches de fluides sont instables près de la pente et donnent naissance à des rouleaux convectifs. Cela a pour effet de créer des langues de fluides bien mélangées qui se propagent vers l'intérieur de l'océan sur des distances très importantes.

Cette réflexion est considérée comme l'un des éléments essentiels pour expliquer les processus de mélange et les échanges entre les régions proches des fonds marins et l'intérieur de l'océan. En effet, si des mesures récentes des phénomènes de mélange à l'intérieur de l'océan ont confirmé plusieurs décennies de déductions théoriques, certains relevés, près des bords ou *près de structures topographiques*, ont montré l'importance qualitative et quantitative de la réflexion des ondes internes sur les processus de mélange [8].

CONCLUSION

Les ondes internes présentent de nombreuses particularités dans leur propagation (vitesse de phase et de groupe orthogonales, absence d'échelle de longueur, ...) qui permettent de voir sous un jour nouveau plusieurs questions traditionnelles relatives aux phénomènes ondulatoires.

Elles sont aussi susceptibles de se réfléchir sur un fond marin de manière très particulière : contrairement aux ondes acoustiques, ce n'est pas l'angle par rapport à la normale à la surface qui est conservé mais l'angle par rapport à la verticale. Cela donne lieu à des constructions géométriques étonnantes... mais surtout mise en évidence récemment dans les océans et à l'origine de questions importantes sur les phénomènes de mélange (de planctons notamment) dans les océans. Il s'agit de plus d'un sujet encore ouvert, qui par ses retombées géophysiques est un des nombreux enjeux d'une meilleure compréhension du système climatique terrestre.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier Frédéric MASSIAS pour une lecture attentive de la première version de ce document.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Données sur la composition des océans : <http://isitv.univ-tln.fr/lecalve/oceano/>
- [2] KUNDU P. K. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 1990.

- [3] Photos satellites d'ondes internes et autres phénomènes.
<http://www.ifm.uni-hamburg.de/ers-sar/>
- [4] OSBORNE A. R. et BURCH T. L. Internal solitons in the Andaman. *Science*, 1980, n° 208, p. 451-460.
- [5] DAUXOIS T. et YOUNG W. R. Near critical reflection of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, n° 390, p. 271-295.
- [6] Eriksen C. C. Internal wave reflection and mixing at Fieberling Guyot. *Journal of Geophysical Research*, 1998, n° 103, p. 2977-2994.
- [7] VOISIN B. The formation of internal wave beams. Part 1. Limit states, soumis à *Journal of Fluid Mechanics*, 2002.
- [8] POLZIN K. L., TOOLE J. M., LEDWELL J. R. et SCHMITT R. W. Spatial variability of turbulent mixing in the abyssal ocean. *Science*, 1997, n° 76, p. 93-96.
- [9] Stewart R. H. *Physical Oceanography*.
http://oceanworld.tamu.edu/resources/ocng_textbook/PDF_files/book_pdf_files.html
- [10] DAUXOIS T., DIDIER A. et FALCON E. Observation of near critical reflection of internal waves in a stably stratified fluid, soumis à *Physics of Fluids*, 2003.



Louis GOSTIAUX
 Doctorant
 Laboratoire de physique de l'ENS
 Lyon (Rhône)



Thierry DAUXOIS
 Chercheur au CNRS
 Laboratoire de physique de l'ENS
 Lyon (Rhône)

Annexe

Densité potentielle et approximation de Boussinesq

La densité de l'eau de mer est une fonction de la température, de la pression et de la salinité $\rho(T, P, S)$. L'équation d'état empirique aujourd'hui utilisée est « l'équation d'état internationale (1980) ». Les mesures de T , P et S permettent d'avoir la densité réelle fonction de la profondeur, et celle-ci croît au fur et à mesure que l'on descend. Néanmoins, cela ne garantit pas la stabilité de l'océan : lorsqu'on déplace une particule fluide, elle équilibre sa pression avec le fluide environnant. Il faut donc comparer les densités à pression égale, par exemple la pression atmosphérique.

La figure 7 présente l'évolution de la température, de la salinité et de la densité ramenée à $P_0 = 1$ bar en fonction de la profondeur pour la fosse Mindanao près des Philippines. La stratification est stable si cette densité fictive croît avec la profondeur : ce n'est pas le cas ici... En effet, une particule déplacée vers le haut se retrouvera entourée de fluide plus dense et sera poussée vers le haut par la force d'Archimède, déstabilisant ainsi la stratification.

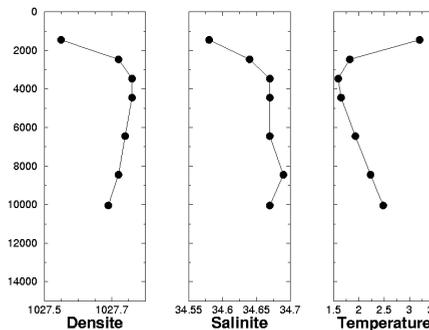


Figure 7 : Évolutions typiques de la densité à la pression de référence 1 bar, de la salinité et de la température en fonction de la profondeur dans l'océan [1].

Cependant, lorsque la particule s'élève, elle subit une détente puisque la pression diminue. Si cette détente est suffisamment rapide, elle peut être considérée comme adiabatique. En se refroidissant, elle peut dans certaines conditions devenir plus dense que le fluide environnant et retomber : il faut donc tenir compte des changements de température de la particule pour étudier la stabilité de la stratification.

Considérons une particule fluide de densité $\rho(T_1, P_1, S_1)$ qui se déplace verticalement dans une zone de densité $\rho(T_2, P_2, S_2)$. Elle se retrouve à la pression P_2 , puisque l'équilibre des pressions est quasi instantané. Si elle conserve sa salinité S_2 , elle voit cependant sa température varier et prendre une valeur T'_1 compte tenu de la détente subie : elle a par conséquent une densité $\rho(T'_1, P_2, S_1)$ que l'on doit comparer avec la densité $\rho(T_2, P_2, S_2)$. Il est alors commode pour effectuer la comparaison de ramener (par la pensée) adiabatiquement les deux masses volumiques à la pression de la surface

($P_0 = 1 \text{ bar}$). Les particules ont alors des températures θ_1 et θ_2 appelées températures potentielles. On compare alors les densités, dites potentielles, $\bar{\rho}_1 = \rho(\theta_1, P_0, S_1)$ et $\bar{\rho}_2 = \rho(\theta_2, P_0, S_2)$: ce sont les densités du fluide ramené de manière adiabatique au niveau de la mer. Lorsque l'on trace cette densité potentielle en fonction de la profondeur (cf. figure 8), on retrouve une augmentation au fur et à mesure de la descente qui met en évidence la stratification stable des océans.

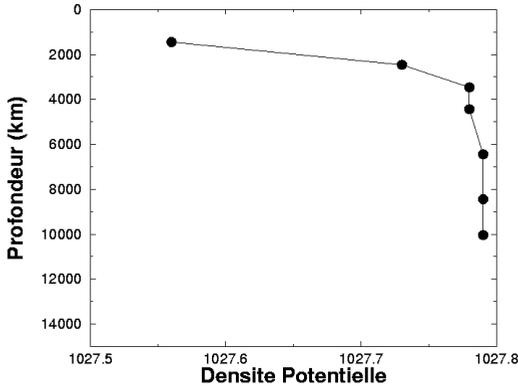


Figure 8 : Évolution de la densité potentielle dans l'océan.

On remarque deux zones distinctes : la première jusqu'à 2500 m correspond au gradient de densité observé dans l'ensemble des océans jusqu'à la plaine abyssale. La seconde, plus rare, correspond à la très faible variation de densité dans la fosse. Nous nous intéresserons ici uniquement à la stratification supérieure, que l'on estime ici à $1,2 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-4}$.

L'introduction de cette densité peut simplifier énormément les calculs. Revenons pour cela à l'équation de conservation de la masse (dite de continuité), qui peut s'écrire de deux manières, suivant que l'on prend le point de vue eulerien :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \tag{42}$$

ou le point de vue lagrangien :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \tag{43}$$

Ces deux équations sont des conséquences de la définition de la particule fluide de masse δm constante (l'équation de continuité étant en effet équivalente à $\frac{D\delta m}{Dt} = 0$ et de la formule de cinématique reliant le taux de dilatation de la particule fluide de volume $\delta \tau$ à la divergence du champ de vitesse :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\delta \tau} \frac{D\delta \tau}{Dt}. \tag{44}$$

Pour des écoulements lents devant la vitesse du son et devant les temps caractéristiques de diffusion de la chaleur, les compressions et dilatations des particules fluides sont adiabatiques et laissent donc inchangées la densité potentielle de la particule fluide. Le fluide traverse donc des zones de densité différente où il subit la poussée d'Archimède, laquelle est proportionnelle à la différence de densité potentielle. On peut donc écrire les équations de la mécanique des fluides avec cette nouvelle grandeur conservée le long des lignes de courant. C'est l'approximation de Boussinesq, qui donne dans l'équation de continuité :

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (45)$$