Archimède m'a trompé !

par **Thierry DAUXOIS**
École Normale Supérieure de Lyon - 69364 Lyon Cedex 07
Thierry.Dauxois@ens-lyon.fr
et **Florence RAYNAL**
École Centrale de Lyon - 69134 Écully

RÉSUMÉ

La notion de force d'Archimède étant souvent mal utilisée par les meilleurs étudiants, nous souhaiterions faire un peu de publicité à un petit exercice très simple, mais au résultat contre-intuitif qui fera réaliser les limites de ce que l'on nomme force d'Archimède, ainsi que les hypothèses.

En cette année 2004 où la Grèce est à l'honneur, sportivement tout particulièrement, il semble nécessaire de revenir sur la force d'Archimède qui, faussement simple, induit en erreur les meilleurs étudiants. C'est à Syracuse en Sicile, qu'ARCHIMÈDE (-287/-212), protégé par le souverain et mis donc à l'abri des soucis matériels, put se consacrer à ses recherches scientifiques. Ce brillant physicien, qui fut aussi un formidable mathématicien, élabora dans son « Traité des corps flottants », la célèbre loi : *« tout corps plongé dans un fluide subit une poussée verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du fluide déplacé »*. L'hypothèse sous-jacente, et souvent oubliée, est que l'on se place dans le cadre de l'hydrostatique.

C'est la raison pour laquelle on peut proposer de « Déterminer la position d'équilibre d'une balle de ping-pong attachée par un fil inextensible au fond d'un bêcher rempli de liquide, lorsque le récipient est mis en rotation ». L'énoncé peut être accompagné de la figure 1 qui permet d'éviter tout malentendu.

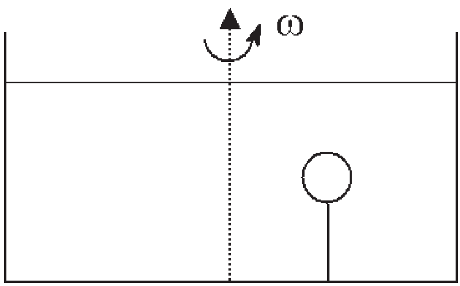

Figure 1 : On étudie une balle de ping-pong accrochée par un fil inextensible au fond d'un récipient rempli d'eau et mis en rotation.

Cet exercice rappelle fortement l'exercice classique où l'on recherche l'équation de la surface libre à l'équilibre d'un récipient rempli de liquide lorsque celui-ci est mis en rotation. Mais ici, et c'est généralement l'origine des difficultés, on s'intéresse à la balle de ping-pong, plutôt qu'au liquide.

Du point de vue de l'analyse physique, le bilan des forces ne pose pas de problèmes puisque l'on identifie sans difficulté l'importance de la gravité, de la tension du fil, des forces de pression et des forces d'inertie. Mais lors de la mise en équation, les étudiants affirment trop souvent de manière péremptoire que les forces de pression sont verticales et correspondent à l'opposé du poids qu'aurait un volume d'eau placé en lieu et place de la balle. Ils affirment alors sans sourciller que cela correspond à la force d'Archimède, qui doit se retourner dans sa… baignoire.

Un tel raisonnement conduit inévitablement à prédire que la balle de ping-pong va aller vers le bord du récipient alors que l'expérience montre l'effet opposé : la balle de ping-pong se rapproche du centre ! Effectuons donc un raisonnement correct.

Dans un premier temps, exprimons la relation d'équilibre de la balle dans le référentiel tournant. Comme il est non galiléen, il ne faut évidemment pas oublier la force d'inertie d'entraînement, celle de Coriolis étant identiquement nulle puisque la balle est en équilibre. On notera V le volume de la balle, g l'accélération de pesanteur, m sa masse, H la projection du centre G de la balle sur l'axe de rotation, ω la vitesse de rotation du récipient cylindrique et $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire radial lié au repère tournant (*cf.* figure 2a). En introduisant $\vec{T}$ la tension du fil et $\vec{\Pi}$ la résultante des forces de pression (la fameuse poussée d'Archimède), l'équilibre de la balle s'exprime sous la forme :

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{\Pi} + m\omega^2\, HG\vec{u}_r. \tag{1}$$

Pour évaluer $\vec{\Pi}$, on utilise le fait que le champ de pression régnant sur la surface délimitée par la balle est inchangé, que la balle soit effectivement présente ou pas. Cela nous amène donc à considérer, cette fois, l'équilibre du volume de fluide qui serait à la place de la balle, en son absence. En notant ρ la densité de l'eau, la masse de ce volume de fluide est ρV. L'équilibre s'écrit alors :

$$\vec{0} = \rho V\,\vec{g} + \vec{\Pi} + \rho V\,\omega^2\, HG\vec{u}_r, \tag{2}$$

puisque l'on ne doit plus tenir compte de la force de tension. On réalise par conséquent, que la poussée d'Archimède n'est effectivement pas verticale dans cet exemple, mais inclinée par rapport à l'axe de rotation du récipient, puisque l'on aboutit à l'égalité :

$$\vec{\Pi} = -\,\rho V\left(\vec{g} + \omega^2\, HG\,\vec{u}_r\right), \tag{3}$$

qui fait donc apparaître un terme supplémentaire par rapport à « l'opposé du poids du fluide déplacé ». En combinant, les équations (1) et (3), on obtient alors :

$$\vec{T} = (\rho V - m)\left(\vec{g} + \omega^2\, HG\,\vec{u}_r\right). \tag{4}$$

Cette équation met clairement en évidence dans le cas présent où la masse de la balle est inférieure à la masse d'eau déplacée ($m < \rho V$), que la force de tension du fil, donnée par l'équation (4), a une direction opposée à la force d'Archimède $\vec{\Pi}$. La balle s'est donc bien rapprochée de l'axe central puisque la composante horizontale de la tension exprimée selon $\vec{u}_r$ est positive.

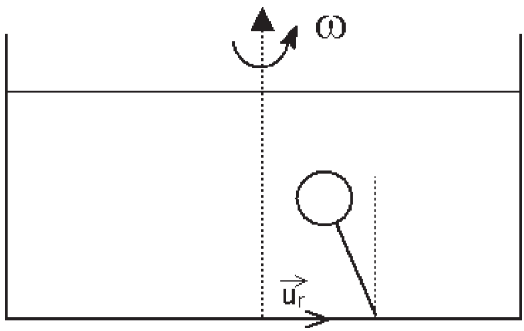

Figure 2a : Lorsque le récipient est mis en rotation, la balle de ping-pong se rapproche de l'axe de rotation.

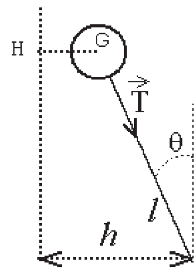

Figure 2b : Représentation des différentes quantités introduites dans le texte.

On peut alors déduire sans difficulté l'angle θ entre la verticale et le fil en introduisant la longueur du fil l et la distance h entre le point d'attache du fil et le centre du récipient. On obtient le résultat :

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 HG}{g} = \frac{\omega^2 (h - l\sin\theta)}{g}. \qquad (5)$$

Outre le caractère pédagogique de cet exercice, on peut faire plusieurs remarques susceptibles d'intéresser les étudiants les plus curieux. Il est tout d'abord important de réaliser que la formule donnant l'angle est indépendante de la densité du fluide. Ce résultat peu évident *a priori*, cache le fait que l'analyse proposée suppose implicitement que le fil est toujours tendu. Cela exclut par conséquent l'exemple où le fluide est de l'air !

La détermination de la surface libre en l'absence de balle est un exercice très classique : les étudiants l'ont généralement établi en cours de mécanique des fluides et évoqué lors du cours d'optique, puisque c'est une technique utilisée pour créer des miroirs paraboliques de très bonne qualité. Il existe donc une seconde méthode très élégante pour déterminer la position du fil : le fil s'alignera selon une direction orthogonale aux équipotentielles, qui s'avèrent être ici des paraboles. Géométriquement, il est alors immédiat que la balle se penche vers l'axe vertical. Cette méthode révèle également que, pour amplifier le phénomène, il vaut mieux écarter le point d'accrochage le plus possible du centre, c'est-à-dire augmenter la distance h.

Considérons maintenant plusieurs prolongements possibles. Si le fil se casse, la balle va remonter vers la surface, et l'on peut suggérer d'établir la trajectoire de la balle en fonction du temps. On peut imaginer aussi établir la fréquence d'oscillation de la balle lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre en proposant que la balle soit attachée par un ressort.

Enfin, terminons par deux variantes possibles de cet exercice. Si au lieu d'être dans de l'eau la balle se trouve dans de l'hélium, cela implique bien sûr de présenter le récipient à l'envers afin que le gaz ne s'échappe pas puisque ce dernier est plus léger que l'air. L'équation (4), avec cette fois $\rho V < m$, montre que la balle sera déviée vers l'extérieur du récipient.

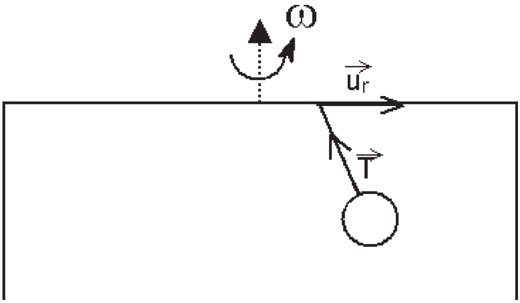

Figure 3 : Lorsque le récipient est préalablement rempli d'hélium, la balle de ping-pong s'éloigne de l'axe de rotation

Dans la deuxième variante, on peut considérer une bougie dans un récipient en rotation, un manège par exemple. La densité de l'air chauffé par la flamme étant inférieure à celle de l'air environnant, on se retrouve dans un cas analogue à celui de la balle de ping-pong : la flamme va donc se pencher vers l'axe de rotation du manège.

En conclusion, nous espérons que la diffusion de cet exercice permettra une meilleure compréhension des phénomènes liés à la poussée d'Archimède en présentant un exemple ludique, intrigant mais très formateur.

Thierry DAUXOIS
Chercheur au CNRS
Laboratoire de physique de l'ENS
Lyon (Rhône)

Florence RAYNAL
Chercheur au CNRS
Laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique
École centrale de Lyon
Écully (Rhône)