

# Démodulation complexe de signaux expérimentaux appliquée aux ondes internes

Matthieu Mercier<sup>1</sup>, Nicolas Garnier<sup>1</sup>, & Thierry Dauxois<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique, ENS Lyon, 46 allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07

matthieu.mercier@ens-lyon.fr

**Résumé.** Nous montrons comment les propriétés physiques des ondes internes de gravité dans les fluides stratifiés à deux dimensions peuvent être élucidées grâce à l'utilisation de la transformée de Hilbert et à la représentation complexe de signaux expérimentaux [1]. Les ondes internes ont été obtenues expérimentalement par un générateur d'un nouveau genre qui émet des ondes planes monochromatiques [2]. Une onde interne plane solution du problème linéaire se trouve également être solution du problème non-linéaire : les deux comportements ont été rencontrés expérimentalement.

Une fois la source analysée, l'étude de la dissipation, de la réflexion et de la diffraction des ondes internes éclairée par la transformée de Hilbert a permis d'apporter des réponses à des interrogations soulevées par la théorie.

**Abstract.** New insights in the physics of internal waves in two-dimensional fluid have been obtained thanks to the Hilbert Transform [1]. The internal waves were obtained experimentally using a recently developed generator [2] that creates monochromatic internal plane waves. These waves are solutions of both linear and nonlinear problems, and the two regimes have been observed in experiments.

The analysis of dissipation, reflection and diffraction of internal waves using the Hilbert Transform has permitted to answer fundamental questions raised by theory.

## 1 Introduction

Les ondes internes de gravité sont des ondes atypiques se propageant dans les fluides continument stratifiés. Leur originalité se trouve particulièrement dans le fait qu'à une pulsation donnée, les ondes sont contraintes de se propager selon une direction donnée. Une autre particularité des ondes internes est que les solutions en ondes planes du problème linéaire se trouvent également être solutions du problème non-linéaire.

La technique de visualisation appelée "strioscopie synthétique" ('Synthetic Schlieren' [3] en anglais) permet des mesures quantitatives d'ondes internes dans les fluides stratifiés à deux dimensions. Cependant dans de nombreuses situations telles que l'émission d'ondes par des objets oscillants, ou bien encore par des écoulements oscillants au-dessus de topographies, la possibilité d'émettre plusieurs faisceaux pour une seule pulsation d'excitation complique l'analyse des champs observés. La même remarque s'applique lors de réflexions multiples au cours d'expériences dans des cuves de petite taille.

Nous proposons une méthode permettant de discriminer les différents faisceaux émis pour une pulsation donnée, en se basant sur la seule grandeur qui les différencie, leur vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ . Cette technique de démodulation complexe est basée sur la transformée de Hilbert et fournit qui plus est une représentation analytique des signaux qui permet l'extraction de l'enveloppe et de la phase du signal.

Après avoir présenté la technique de démodulation complexe et le dispositif expérimental, nous nous concentrons sur la source d'ondes internes planes avant de l'utiliser pour apporter des réponses aux problèmes fondamentaux de dissipation, réflexion et diffraction des ondes internes.

## 2 Démodulation complexe et dispositif expérimental

### 2.1 Ondes internes à deux dimensions

A deux dimensions, en notant  $t$  la variable temporelle,  $\rho(x, z, t)$  la densité et  $g$  la gravité, on rappelle que la théorie linéaire pour un fluide stratifié stable, i.e.  $\partial\rho/\partial z < 0$ , établit l'équation

$$\psi_{zztt} + N^2\psi_{xx} = 0 \quad (1)$$

où le champ  $\psi(x, z, t)$  peut tout aussi bien être la fonction courant, les composantes de la vitesse, la pression ou les gradients de densité. La constante  $N^2 = -(g/\rho)\partial\rho/\partial z$ , est le carré de la pulsation de Brunt-Väisälä, qui caractérise l'oscillation d'une particule fluide lorsque la stratification est linéaire.

Les solutions en ondes planes  $\psi = \psi_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ , avec  $\mathbf{x} = (x, z)$  et  $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$  vérifient la relation de dispersion  $\omega^2 = N^2 k_x^2 / (k_x^2 + k_z^2) = N^2 \sin^2 \theta$ , où  $\theta$  est l'angle que fait le vecteur d'onde avec la gravité. Ainsi quatre faisceaux peuvent être émis pour chaque valeur de  $\omega$ .

On peut remarquer que ces solutions sont également solutions du problème non-linéaire [4], ainsi les paquets d'ondes planes se révèlent être un outil théorique particulièrement intéressant.

### 2.2 Dispositif expérimental

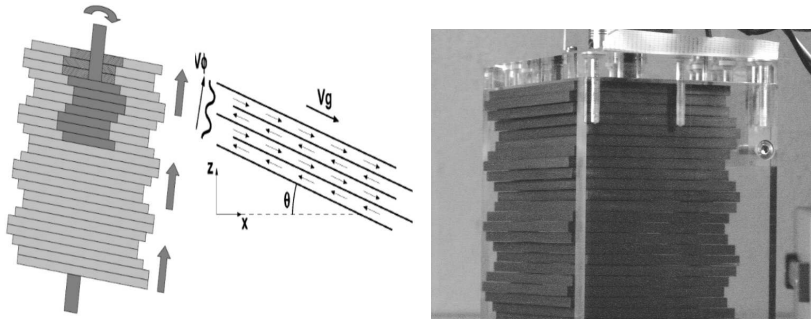
Les expériences présentées par la suite ont été réalisées dans une cuve rectangulaire de dimensions  $80 \times 42.5 \times 17 \text{cm}^3$  remplie d'eau linéairement stratifiée en sel (NaCl). La faible largeur de la cuve nous permet de considérer une approche bi-dimensionnelle. La stratification linéaire est obtenue par la méthode des deux bacs, et le résultat est vérifié directement à partir de mesures de densité à différentes altitudes, estimant la valeur de  $N$  avec une incertitude inférieure à 5%.

La technique de strioscopie synthétique permet de quantifier le gradient de densité. Les perturbations locales de densité dues au passage d'une onde interne sont obtenues en comparant l'image d'une mire à travers la cuve avec un état de référence sans onde. Dans la suite, nous noterons  $U(x, z, t)$  (respectivement  $V(x, z, t)$ ) le gradient horizontal (respectivement vertical) de densité. Ses champs ont été observés avec une caméra classique, de résolution maximale  $1024 \times 1280$  pixels, et calculés grâce au logiciel de corrélation d'images CIVx développé à la plateforme Coriolis de Grenoble.

Les ondes internes générées sont issues d'une source particulière dont le principe est illustré Fig. 1. Le forçage imposé par les plaques oscillant horizontalement est de la forme

$$v_x(x = 0, z, t) = v_0 \cos(\omega t - k_e z) \quad (2)$$

où  $k_e = 2\pi/\lambda_e$  est le nombre d'onde associé à la longueur d'onde  $\lambda_e = 4.4 \text{cm}$  du générateur, et  $v_0 \sim a\omega$  avec  $a = 5 \text{mm}$  l'amplitude de l'oscillation des plaques.



**Fig.1.** Principe du générateur d'ondes internes planes avec le champ de vitesse émis idéalement (gauche) et vue en perspective du générateur (droite).

### 2.3 Démodulation complexe

Nous appelons démodulation complexe (ou transformée de Hilbert) l'opération consistant à obtenir le champ complexe  $\tilde{U}(x, z, t)$  tel que  $U(x, z, t)$  correspond à sa partie réelle  $Re(\tilde{U}(x, z, t))$ . Pour cela nous utilisons la transformée de Hilbert. À noter que le nom de transformée de Hilbert est parfois associé à l'opération consistant à obtenir le champ réel  $Im(\tilde{U})$  à partir du champ  $U$ , étape nécessaire à la construction de  $\tilde{U}$ . Cette technique a permis le calcul de propriétés locales et instantannées d'onde [5] (amplitude, fréquence, longueur d'onde) auparavant, mais jamais à notre connaissance dans le contexte des ondes internes de gravité.

En pratique, nous réalisons la démodulation complexe en trois calculs successifs :

- i) transformée de Fourier de  $U(x, z, t)$  en temps  $t$ ,
- ii) filtrage passe-bande (plus ou moins sélectif) dans l'espace de Fourier centré sur la fréquence positive  $f = \omega/2\pi$ ,
- iii) transformée de Fourier inverse du spectre filtré,

ce qui aboutit à  $\tilde{U}$ .

Il est important de remarquer qu'après cette étape n'opérant que selon la coordonnée temporelle, le champ obtenu se décompose selon quatre faisceaux d'ondes internes à la même pulsation  $\omega$  mais se propageant dans quatre directions différentes

$$\tilde{U}(x, z, t) = \tilde{A}(x, z, t) + \tilde{B}(x, z, t) + \tilde{C}(x, z, t) + \tilde{D}(x, z, t), \quad (3)$$

avec

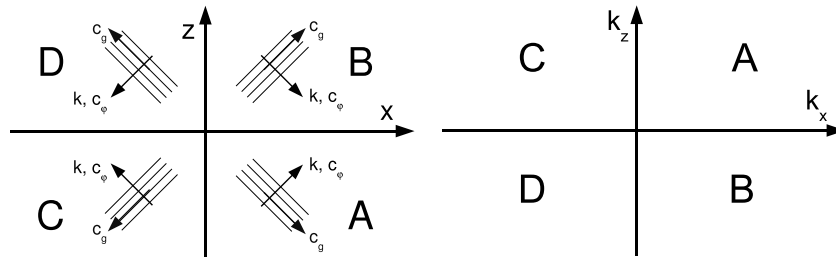
$$\tilde{A}(x, z, t) = A(X, Z, T) \exp[i(\omega t - k_x x - k_z z)], \quad (4)$$

$$\tilde{B}(x, z, t) = B(X, Z, T) \exp[i(\omega t - k_x x + k_z z)], \quad (5)$$

$$\tilde{C}(x, z, t) = C(X, Z, T) \exp[i(\omega t + k_x x - k_z z)], \quad (6)$$

$$\tilde{D}(x, z, t) = D(X, Z, T) \exp[i(\omega t + k_x x + k_z z)]. \quad (7)$$

Il est possible de différencier ces faisceaux par le signe devant chaque composante du vecteur d'onde  $k_x$  et  $k_z$  (cf. Fig. 2). On peut alors isoler une de ces composantes par filtrage dans l'espace de Fourier spatial, selon les nombres d'ondes  $k_x$  et  $k_z$  associés aux coordonnées spatiales  $x$  et  $z$ . Il est important de noter qu'on ne peut différencier les nombres d'ondes positifs et négatifs que pour un signal complexe car le spectre associé n'est pas une fonction paire ; il faut donc avoir réalisé la démodulation complexe auparavant.



**Fig.2.** Décomposition d'une onde interne harmonique selon les composantes se propageant dans les quatre directions de propagation autorisées par la relation de dispersion, dans l'espace réel à gauche et l'espace de Fourier à droite.

Au final, il est possible d'extraire de la mesure de  $U(x, z, t)$  un champ complexe

$$\chi(x, z, t) = |\chi(X, Z, T)| \exp[i\varphi_\chi(x, z, t)], \quad (8)$$

où  $\chi$  correspond à  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ou  $D$ . La phase  $\varphi_\chi$  varie rapidement avec la pulsation de l'onde mais contient également des modulations lentes. On peut extraire ses modulations grâce aux champs

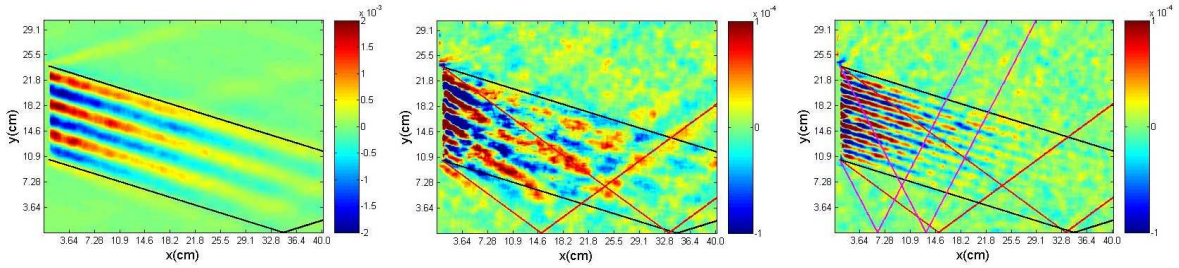
- i) amplitude  $|\chi(X, Z, T)|$ ,
- ii) pulsation  $\omega(x, z, t) = \partial\varphi_\chi/\partial t$ ,
- iii) nombre d'onde selon la direction  $x$  :  $k_x(x, z, t) = \partial\varphi_\chi/\partial x$ ,
- iv) nombre d'onde selon la direction  $z$  :  $k_z(x, z, t) = \partial\varphi_\chi/\partial z$ .

### 3 Caractérisation d'une source d'ondes internes planes

Nous avons appliqué les outils précédents à l'analyse de la source d'ondes internes planes. Du fait du système de plaques oscillantes, la structure du générateur est discrète et susceptible de générer des harmoniques de la pulsation et/ou du nombre d'onde.

#### 3.1 Monochromaticité temporelle

La composante horizontale du gradient filtrée à la pulsation d'excitation  $\omega$ , et aux harmoniques susceptibles de se propager (inférieures à  $N$ ) sont représentées à la Fig. 3. On peut distinguer les harmoniques notamment grâce à l'angle de propagation qui change d'après la relation de dispersion.



**Fig.3.**  $Re(\tilde{U})$  en  $\Delta N^2$  ( $\text{rad.s}^{-1}$ )<sup>2</sup> filtré à  $\omega = 0.18 \text{ rad.s}^{-1}$  (gauche),  $2\omega$  (centre) et  $3\omega$  (droite).  $\omega/N = 0.3$ . Les lignes noires, rouges et violettes délimitent les bords du faisceau à  $\omega$ ,  $2\omega$  et  $3\omega$  d'après la relation de dispersion.

On constate que les structures associées à chaque harmonique sont différentes, ainsi que les amplitudes, ce qui va être étudié par la suite.

#### 3.2 Monochromaticité spatiale

La longueur d'onde émise associée à  $\omega$  vérifie bien la loi imposée par la condition aux limites (2). Ainsi la loi  $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/(k_e \cos \theta)$  a été vérifiée directement.

Cependant les structures associées aux harmoniques  $2\omega$  et  $3\omega$  correspondent à des longueurs d'ondes 2 et 3 fois plus petites que  $\lambda$ . La sélection des longueurs d'ondes étant indépendante de la pulsation pour les ondes internes, ce résultat reste à analyser. Qui plus est ces structures changent avec la propagation de l'onde, suggérant des interactions non-linéaires entre les harmoniques. Quoi qu'il en soit, l'amplitude des harmoniques reste faible devant la composante fondamentale (cf. Fig. 4 à gauche).

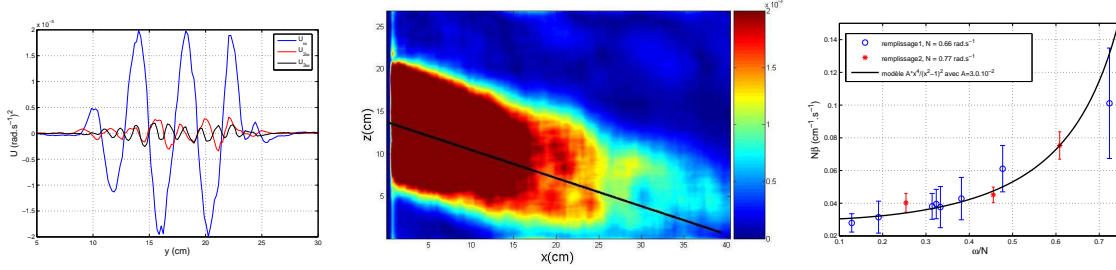
Une mesure indirecte de la longueur d'onde se propageant fait intervenir la dissipation visqueuse. La structure d'une onde interne plane avec viscosité est [6,7]  $\psi(\xi, \eta, t) = \psi_0 e^{-\beta\xi} e^{i(\omega t - k\eta)}$ , où  $\xi$  est la coordonnée longitudinale (selon la ligne noire Fig. 4 au centre) et  $\eta$  la coordonnée transverse. La grandeur

$$\beta = \frac{\nu k^3}{2N \cos \theta} = \frac{\nu k^3}{2N \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{N^2}}}. \quad (9)$$

est l'inverse de la longueur de dissipation. D'après la dépendance de  $k$  avec  $\omega$ , la relation est  $\beta = \nu k_e^3 / 2N \cos^4 \theta$ , qui se réécrit sous la forme plus générique

$$N\beta = \frac{\nu k_e^3}{2} \frac{1}{(1-x^2)^2} \quad \text{avec} \quad x = \omega/N. \quad (10)$$

La vérification expérimentale de la loi (10) pour différentes valeurs de  $N$  est illustrée Fig. 4 à droite. Le trait plein correspond au modèle avec  $k_e$  comme paramètre ajustable. L'estimation de  $\lambda_e = 3.6 \pm 0.2$  cm est en accord avec le forçage.

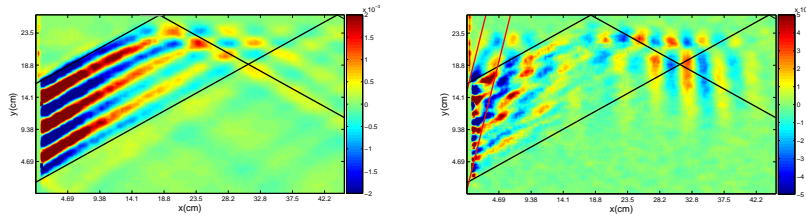


**Fig.4.** *Gauche* : coupe verticale (à  $x = 1.5$ cm) des faisceaux représentés Fig.3. *Centre* :  $|\tilde{A}| = A$  filtré à  $\omega = 0.2$  rad.s $^{-1}$  ( $\omega/N = 0.3$ ). *Droite* : Etude de l'atténuation en fonction de la pulsation pour trois stratifications.  $N = 0.66$  (étoile),  $0.68$  (carré) et  $0.76$  (rond) rad.s $^{-1}$ .

## 4 Applications

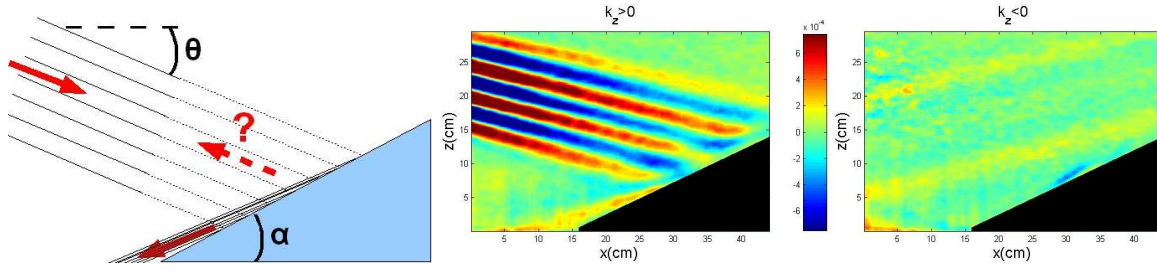
### 4.1 Réflexion non-linéaire

La réflexion des ondes internes est atypique du fait que les ondes se propagent en conservant l'angle qu'elles font avec la gravité. Ainsi les lois de Descartes ne s'appliquent pas. De plus, des non-linéarités sont susceptibles de se produire par interaction du faisceau incident avec le réfléchi. Ceci a été observé expérimentalement lors de la réflexion d'un faisceau d'ondes internes planes à la surface libre (cf. Fig. 5) ainsi que sur un fond plat.



**Fig.5.** Réflexion d'un faisceau sur la surface libre :  $Re(\tilde{U})$  en  $\Delta N^2$  (rad.s $^{-1}$ ) $^2$  filtré à  $\omega = 0.38$  rad.s $^{-1}$  (gauche),  $2\omega$  (droite).  $\omega/N = 0.48$ . Les lignes noires et rouges délimitent les bords du faisceau à  $\omega$  et  $2\omega$  d'après la relation de dispersion.

La réflexion "en retour", ie selon la direction du faisceau incident, est une autre question ouverte soulevée par Baines [8] notamment. La figure 6 illustre le principe et l'absence de ce faisceau dans les expériences réalisées sur un fond plat incliné d'un angle  $\alpha < \theta$  (le cas  $\alpha > \theta$  apporte le même résultat). La discrimination des faisceaux descendants ou montants permet de montrer l'absence de faisceaux remontant après la réflexion.



**Fig.6.** Principe de la réflexion “en retour” à gauche. Faisceaux descendants (au centre,  $Re(\tilde{A} + \tilde{C})$ ) et montants (à droite,  $Re(\tilde{B} + \tilde{D})$ ) en  $\Delta N^2$  ( $\text{rad.s}^{-1}$ )<sup>2</sup>, issus de la réflexion sur une pente ( $\alpha = 14^\circ$ ).  $\omega/N = 0.43$  et  $N = 0.42 \text{ rad.s}^{-1}$ .

## 4.2 Diffraction

Le problème de la diffraction d’une onde interne plane par une fente de largeur comparable à la longueur d’onde est également très intéressant. Le fait que la relation de dispersion impose un angle de propagation signifie que l’onde ne sera pas réémise dans toute les directions comme en optique mais on peut s’attendre à une propagation dans les deux directions autorisées, à la sortie d’une fente dont la largeur est comparable à  $\lambda$ . L’analyse de Hilbert permet alors de mettre en avant les faisceaux émis dans une direction différente de l’onde incidente.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté les intérêts de la transformée de Hilbert appliquée aux ondes internes à deux dimensions. L’atténuation d’ondes internes planes a permis de quantifier l’influence de la pulsation ainsi que de la longueur d’onde. Les interactions non-linéaires sont clairement identifiées bien que les structures spatiales engendrées sont assez complexes. Le problème de la réflexion d’ondes est présenté sous un nouvel aspect permettant de trancher la question d’une onde réfléchie “en retour” lors de la réflexion sur un fond plat. Enfin, la diffraction des ondes internes semble un sujet prometteur, notamment grâce à la relation de dispersion atypique des ondes internes.

## Références

1. M. J. MERCIER, N. B. GARNIER, T. DAUXOIS, Hilbert transform applied to experimental data tackling internal waves issues, *Physics of Fluids*, soumis (2008).
2. L. GOSTIAUX, H. DIDELLE, S. MERCIER, AND T. DAUXOIS, A novel internal waves generator, *Experiments in Fluids*, **42**, 123-130 (2007).
3. S. B. DALZIEL, G. O. HUGHES, AND B. R. SUTHERLAND, Whole-field density measurements by ‘synthetic schlieren’, *Experiments in Fluids*, **28**, 322-335 (2000).
4. A. TABAEI AND T. R. AKYLAS AND K. G. LAMB, Nonlinear Effects in Reflecting and Colliding Internal Wave Beams, *Journal of Fluid Mechanics*, **526**, 217-243 (2005).
5. N. B. GARNIER, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, AND A. PRIGENT, Nonlinear dynamics of waves and modulated waves in 1d thermocapillary flows. i. general presentation and periodic solutions, *Physica D*, **174**, 1-29 (2003).
6. N. H. THOMAS AND T. N. STEVENSON, A similarity solution for viscous internal waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **54**, 495-506 (1972).
7. D. G. HURLEY AND G. KEADY, The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. part 2. approximate viscous solution, *Journal of Fluid Mechanics*, **351**, 119-138 (1997).
8. P. G. BAINES, The reflexion of internal/inertial waves from bumpy surfaces. part 2. split reflexion and diffraction, *Journal of Fluid Mechanics*, **49**, 113-131 (1971).