

---

# Systemes Dynamiques et Chaos

---

## Résumé

Ce cours présente une introduction aux méthodes de résolution des systèmes non linéaires ainsi qu'aux notions de chaos. La présentation privilégie l'étude d'un nombre restreint d'équations modèles à l'aide de méthodes analytiques simples ou bien de méthodes géométriques élémentaires. La présentation s'appuie sur une progression systématique à partir des équations différentielles du premier ordre, avant d'étudier des exemples dans le plan de phase, les cycles limites et leurs bifurcations. Le cours se termine par l'étude des phénomènes de chaos à partir du modèle de Lorenz ou sur des applications itérées. Les notions de fractales, d'attracteurs étranges ou d'exposants de Lyapunov sont brièvement abordées. Les différentes notions sont illustrées à l'aide de nombreux exemples de physique, de mécanique, d'électronique, de chimie, de biologie, d'écologie,...

**Thierry Dauxois**

[Thierry.Dauxois@ens-lyon.fr](mailto:Thierry.Dauxois@ens-lyon.fr) / tél. (+33) 4 72 72 81 42



# Avant propos

Ce document est bâti à partir des notes du cours donné par Thierry Dauxois (2005-2013) puis par Ludovic Bellon (2014-2017), lui-même fortement inspiré de l'ouvrage de Steven Strogatz : *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Westview Press (2000) – ISBN 0-7382-0453-6. Les premières notes de cours mises en forme par Robin Guichardaz contribuent également pour une part importante à ce document. Il est en phase de rédaction et contient certainement de nombreuses coquilles ou imprécisions, en plus d'être largement incomplet.

N'hésitez pas à me faire part de toutes vos observations et remarques pour améliorer ce document : [Thierry.Dauxois@ens-lyon.fr](mailto:Thierry.Dauxois@ens-lyon.fr)

Version préliminaire du 28 novembre 2019



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1	Bref historique	10
1.1.1	L'analytique triomphant (jusqu'à la fin du XIXème siècle)	10
1.1.2	Premiers doutes (fin XIXème - début XXème)	10
1.1.3	Avènement des concepts fondamentaux (1920 - 1970)	11
1.1.4	Explosion du chaos (depuis 1970)	11
1.2	Vocabulaire	11
1.3	Bibliographie	15
<b>I</b>	<b>Systèmes dynamiques du premier ordre</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Flot sur une ligne</b>	<b>19</b>
2.1	Pensons de manière géométrique!	19
2.2	Points fixes et stabilité	21
2.3	Croissance des populations	23
2.4	Analyse de stabilité linéaire	24
2.5	Les oscillations sont impossibles	25
2.6	Potentiel	26
2.7	Résolution numérique	28
2.7.1	Méthode d'Euler	28
2.7.2	Méthodes d'ordre plus élevé	29
<b>3</b>	<b>Bifurcations</b>	<b>31</b>
3.1	Bifurcation Noeud-Col (Saddle-Node)	31
3.2	Bifurcation transcritique (ou bifurcation avec échange de stabilité)	34
3.3	Seuil pour un laser	35
3.4	Bifurcation fourche (pitchfork)	36
3.4.1	Bifurcation fourche supercritique	37
3.4.2	Bifurcation fourche sous-critique	42
3.5	Classification des bifurcations	44
3.6	Température d'un micro-levier en silicium	46
3.6.1	Absorption	46
3.6.2	Conduction thermique et profil de température	46
3.6.3	Variation de la température avec la puissance	48

<b>4</b>	<b>Après la ligne, le cercle : oscillations</b>	<b>51</b>
4.1	Exemple et définition . . . . .	51
4.2	Oscillateurs . . . . .	52
4.3	Exemples d'oscillateurs . . . . .	54
4.3.1	Pendule sur-amorti . . . . .	54
4.3.2	Jonction Josephson . . . . .	55
4.3.3	Lucioles . . . . .	57
<b>II</b>	<b>Systèmes dynamiques du second ordre</b>	<b>59</b>
<b>5</b>	<b>Systèmes linéaires en 2 dimensions</b>	<b>61</b>
5.1	Définitions et exemples . . . . .	61
5.1.1	Premier exemple : l'oscillateur harmonique . . . . .	61
5.1.2	Second exemple : deux ODE découplées . . . . .	63
5.1.3	Définitions et vocabulaire . . . . .	64
5.2	Classification des systèmes linéaires . . . . .	65
5.2.1	Deux valeurs propres réelles : $\tau^2 - 4\Delta > 0$ . . . . .	66
5.2.2	Deux valeurs propres complexes : $\tau^2 - 4\Delta < 0$ . . . . .	68
5.2.3	Une seule valeur propre : $\tau^2 - 4\Delta = 0$ . . . . .	69
5.2.4	Graphe récapitulatif . . . . .	70
5.3	Dynamique amoureuse . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Plan de phase</b>	<b>75</b>
6.1	Portrait de phase . . . . .	75
6.2	Existence, unicité et conséquence . . . . .	77
6.3	Points fixes et linéarisation . . . . .	78
6.4	Modèle de compétition entre moutons et lapins . . . . .	82
6.5	Systèmes conservatifs . . . . .	84
6.6	Stabilité des systèmes visqueux . . . . .	88
6.7	Le pendule . . . . .	88
6.7.1	Sans dissipation . . . . .	88
6.7.2	Avec dissipation . . . . .	90
6.8	Tourbillons ponctuels dans un écoulement . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Cycles limites</b>	<b>93</b>
7.1	Introduction . . . . .	93
7.2	Exemples . . . . .	94
7.2.1	Un premier exemple trivial . . . . .	94
7.2.2	Un exemple très important : l'oscillateur de van der Pol (1926) . . . . .	94
7.3	Éliminer la possibilité des orbites fermées . . . . .	96
7.3.1	Système gradient . . . . .	96
7.3.2	Fonction de Lyapunov . . . . .	97
7.3.3	Critère de Dulac . . . . .	98
7.4	Le théorème de Poincaré-Bendixson . . . . .	100
7.5	Oscillations de relaxation . . . . .	101
7.6	Oscillations faiblement non linéaires . . . . .	103
7.6.1	Théorie des perturbations régulières (Poincaré-Lindstedt) . . . . .	104
7.6.2	Méthode des échelles multiples . . . . .	106

7.6.3	Cas général	108
7.6.4	Analyse qualitative par la méthode de la moyenne	108
7.7	Évolution dans l'espace des phases	110
<b>8</b>	<b>Retour sur les bifurcations</b>	<b>115</b>
8.1	Bifurcations nœud-col, transcritiques et fourches	115
8.1.1	Bifurcation nœud-col	115
8.1.2	Bifurcations fourches et bifurcations transcritiques	118
8.2	Bifurcation de Hopf	120
8.2.1	Bifurcation de Hopf supercritique	120
8.2.2	Bifurcation de Hopf sous-critique	121
8.3	Réactions chimique oscillantes : oscillateurs chimiques.	123
8.4	Bifurcation globale de cycles	123
8.5	Sections de Poincaré	124
<b>III</b>	<b>Dynamique chaotique</b>	<b>127</b>
<b>9</b>	<b>Modèle de Lorenz</b>	<b>129</b>
9.1	Introduction	129
9.1.1	Dérivation du modèle de Lorenz	130
9.1.2	Au delà de la convection.	131
9.2	Propriétés simples des équations de Lorenz	132
9.3	Chaos sur un attracteur étrange	135
<b>10</b>	<b>Application Unidimensionnelles</b>	<b>141</b>
10.1	Point fixe et Toile d'araignée	141
10.1.1	Point fixe et stabilité linéaire	141
10.1.2	Toile d'araignée	142
10.2	L'application logistique	143
10.3	Analyse de l'application logistique	146
10.4	Fenêtre périodique de période 3	147
10.5	Exposant de Lyapunov	148
10.6	Universalité	150
10.7	Systèmes dynamiques et Entropie	153
<b>11</b>	<b>Les Fractales</b>	<b>155</b>
11.1	Ensemble de Cantor	155
11.2	Dimension des fractales auto-similaires	156
11.3	Dimension par la méthode des boîtes ou Box dimension	159
11.4	Dimension de corrélation	160
11.5	Etirement et Repliement	162
11.5.1	À une dimension : l'application logistique	162
11.5.2	À deux dimensions : l'application du boulanger	162
11.5.3	L'application du chat d'Arnold	164

---

<b>12 Conclusion</b>	<b>165</b>
12.1 La difficulté des systèmes dynamiques . . . . .	165
12.2 Le Chaos est il une idée négative ou positive? . . . . .	166
12.3 Une vision statistique du Chaos. . . . .	168
12.3.1 Un modèle plus physique : la grande roue de Bellecour . . . . .	168
12.3.2 Retour sur le modèle de Lorenz . . . . .	168
12.3.3 Existence de mesure SRB . . . . .	169
12.3.4 Bilan . . . . .	169
12.4 Morale . . . . .	171
12.5 Epilogue . . . . .	172



# Chapitre 1

## Introduction

Il existe une **fascination réelle du grand public**, même des non scientifiques, **pour les notions de chaos** (*Chaos* de James Gleick, 1987) ou de **fractales** (*The Beauty of fractales* de Peitgun & Richter (1986)). Finalement peu d'idées de mathématiques ou de la physique sont passées dans le langage populaire. Celles-ci en font partie.

Tout le monde a déjà entendu parler de l'**effet papillon** ; cette théorie est toutefois assez mal comprise, même si elle est souvent citée. Le grand public s'est également approprié le **concept de fractale** par l'observation d'un chou Romanesco ou d'un flocon de neige. Même si cela est maintenant tombé en désuétude, il existait dans les années 80 ou 90 de nombreux petits logiciels pour créer ses propres fractales avec son ordinateur *personnel*. Créer une structure que personne n'a jamais vue, de quoi susciter une excitation légitime ! Plus modestement, notre vie quotidienne est également remplie de phénomènes dynamiques que nous cherchons à comprendre simplement, souvent en donnant vie aux systèmes : l'air chaud *monte*, la rivière *préfère* passer ici, etc.

Ce cours sera une **prise de contact avec ces systèmes dynamiques**, avec pour but principal de dégager les idées importantes :

- à partir d'**arguments géométriques**
- avec de **nombreuses illustrations issues d'exemples concrets** en
  - mathématiques
  - physique
  - biologie (cycles en écologie dans les population animales, comportement chaotiques dans les membranes, etc.)
  - électronique
  - astronomie
  - chimie : comportement périodique, horloges chimiques
  - mécanique des fluides
  - médecine : réponse du corps aux traitements médicaux
  - économie. . .

## 1.1 Bref historique

### 1.1.1 L'analytique triomphant (jusqu'à la fin du XIXème siècle)

Depuis l'antiquité, la description du mouvement des astres se fait en termes de trajectoire (orbites) parfaitement régulières (cercles !). Copernic (1473-1543) reprend ces idées pour le système solaire... mais le soleil est au centre, ce qui provoque un débat religieux. Kepler arrive et transforme les cercles en ellipses en utilisant les relevés de Tycho Brahé. C'est encore un **mouvement régulier et périodique**.

Newton (1643-1727) développant l'intuition de Galilée (1564-1642) fonde la Science moderne. Le principe fondamental de la dynamique (PFD) conduit à l'évolution **déterministe** d'un système mécanique dans un champ de forces donné, pour des conditions initiales données. Le mouvement est régi par ces **conditions initiales**. Le PFD + attraction universelle conduit aux ellipses. Euler, Lagrange, Jacobi développent la mécanique analytique (Lagrangienne, Hamiltonienne,...) ainsi que les méthodes d'intégration qui donnent accès aux trajectoires : on recherche des solutions analytiques (intégrales premières) donnant des mouvements réguliers dans l'espace des phases.

Grand succès de la mesure de la période du pendule, prédiction de la position des planètes, ... Kepler auparavant avait observé les mouvements autour du soleil. Newton explique et calcule. Cet âge d'or conduit à "la découverte de Neptune du bout de la plume" comme le dit joliment Arago après la prédiction de Le Verrier en 1846.

Comme souvent en Sciences, on retrouve Galilée et Newton, deux génies qui ont établi l'une des plus grandes idées de la Science : le **déterminisme**. Si je sais où je suis aujourd'hui, je suis en principe capable de savoir où je serai demain. C'est incroyable quand on y pense et beaucoup de philosophes en doute encore aujourd'hui. Est ce que le présent déterminerait l'avenir ? Et pourtant ce déterminisme est tout le cœur de la Sciences. Il n'y a pas de Science sans déterminisme même si ce concept a beaucoup changé au 20ème siècle à cause de la théorie quantique.

### 1.1.2 Premiers doutes (fin XIXème - début XXème)

Le 19ème siècle était extrêmement optimiste car les scientifiques vont résoudre tous les problèmes du monde, mais vers la fin les choses se sont compliquées lorsque l'on a étudié le mouvement de 8 ou 9 planètes autour du soleil. La machine de Newton commence à patiner et on ne savait plus très bien comment résoudre toutes ces équations différentielles.

On s'aperçoit après beaucoup d'efforts que le **problème à trois corps** n'est PAS soluble, au grand désespoir de certains.

Burns, Poincaré (1854-1912), Painlevé parviennent à des théorèmes sur l'absence d'intégrales premières pour de très larges classes de systèmes hamiltoniens. Le problème de Kepler avec  $1/r$  est intégrable mais il n'est pas du tout générique et conduit à de fausses idées sur les systèmes mécaniques en général.

Poincaré développe des **méthodes géométriques** (topologie) pour analyser les propriétés qualitatives globales. Il comprend que des conditions initiales voisines peuvent conduire à des trajectoires rapidement très différentes rendant la prédiction à long terme impossible : c'est la notion de **chaos déterministe**.

Pour comprendre une fonction, il est alors plus intéressant de comprendre quelques points caractéristiques : où est-elle maximum ? A-t-elle une asymptote ? Ensuite, au jugé, on trace la courbe, et on la comprend beaucoup mieux qu'avec un dessin précis. Au lieu de décrire la trajectoire de la lune par exemple, on essaie de dire si elle va rester dans le voisinage de la terre à temps long !

Ces travaux furent dans une grande mesure totalement ignorés par les physiciens pendant 50 ans, mais heureusement pas par les mathématiciens.

### 1.1.3 Avènement des concepts fondamentaux (1920 - 1970)

**Étude de systèmes dynamiques variés :**

- Oscillations non-linéaires en physique et ses applications (Van der Pol 1927) : radar, radio,...
- Développement de nouvelles mathématiques (Van der Pol, Andronov, Smale,...)
- Développement en parallèle mais de façon largement déconnectée de méthodes géométriques proposées par Poincaré : Birkhoff, Kolmogorov, Arnold, Moser,...

**Invention de l'ordinateur et développement de l'intuition à l'aide d'expériences numériques**

- 1955 FPU : modèle simplifié de la relaxation vers l'équilibre
- 1962 Hénon : Étude numérique en astronomie
- 1963 Lorenz : Étude numérique de la convection dans l'atmosphère. Lorenz a commencé une thèse de Maths avant la guerre, puis a été embauché dans le service de météorologie. À son retour, revenu météorologiste au MIT, il a réfléchi tout sa vie (en mathématicien) au fonctionnement de l'atmosphère pas en praticien pour faire des précisions mais de manière théorique.

Encore une fois, ces découvertes importantes n'eurent **pas d'impact immédiat**.

Une parenthèse sur le papillon qui bat des ailes au Brésil qui provoque un ouragan au Texas. Si on regarde sur internet, on constate que ce n'est pas toujours au Brésil, pas toujours au Texas, mais le papillon bat des ailes toujours au tiers monde et en revanche la catastrophe est toujours engendrée dans le premier monde. Intéressant...

### 1.1.4 Explosion du chaos (depuis 1970)

- 1971 Ruelle & Takens : nouvelle théorie pour le début de la turbulence.
- 1972 May : chaos en biologie. Exemples simples avec dynamique compliquée.
- 1976 Feigenbaum aux USA et Couillet en France. Concept d'universalité de la transition vers le chaos. Lien entre chaos et la théorie des transitions de phase qui venait de connaître son apogée.

**Remarques importantes**

- Les comportements génériques apparaissent déjà dans les systèmes avec peu de degrés de liberté.
- La présence de termes non-linéaires dans les équations engendrent souvent ces comportements et phénomènes mais elle n'est pas suffisante (le problème de Kepler n'est pas linéaire), ni nécessaire (oscillateur paramétrique).

## 1.2 Vocabulaire

Il existe plusieurs types de systèmes dynamiques :

Type	Equations différentielles	Applications itérées
Évolution en temps	continue	discrète
Version la plus	utilisée en sciences	utile pour l'analyse des signaux ou de relevés

**Equation différentielles** On distingue généralement les équations différentielles ordinaires (ODE for Ordinary Differential Equations) des équations aux dérivées partielles (PDE for Partial Differential Equations). Dans une ODE les dérivées sont toutes par rapport à la même variable, typiquement le temps. Par exemple, l'équation d'évolution temporelle d'un oscillateur harmonique  $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$  est une ODE.

Par opposition, les PDE font intervenir des dérivées par rapport à plusieurs variables, l'équation de diffusion  $\partial_t T = D\partial_x^2 T$  en est un exemple. Dans ce cours, nous allons considérer presque exclusivement les ODE, reportons au M2 l'étude des PDE nonlinéaires.

**Application itérées** Les applications itérées sont l'équivalent des ODE pour un temps discret, par exemple  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ . Elles n'ont pas de notions d'espace. Les automates cellulaires, associant un temps et un espace discrets, sont l'équivalent des PDE.

Dans ce cours, nous nous concentrerons presque exclusivement sur les systèmes d'ODE :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

où  $n$  représente la dimension du système et  $x_i$  la concentration d'un réactif, ou la population d'une espèce, ou la position d'une planète, etc...

Le système sera dit linéaire si on ne trouve dans le terme de droite que des termes proportionnels aux variables  $x_i$ . Par exemple, l'oscillateur harmonique amorti est un système linéaire de dimension 2 en posant  $x_1 = x$  et  $x_2 = \dot{x}$  :

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{1.2}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\gamma}{m}x_2 \tag{1.3}$$

ou de manière équivalente en notation vectorielle

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\gamma/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1.4}$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice  $2 \times 2$ .

Dans le cas contraire, le système sera dit non linéaire : présence de termes en  $x_1^2$  ou  $x_1x_2$  par exemple. Le pendule, régi par l'équation  $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ , est un tel système non-linéaire :

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{1.5}$$

$$\dot{x}_2 = -\omega^2 \sin x_1 \tag{1.6}$$

avec  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ ,  $g$  l'accélération de la gravité et  $\ell$  la distance du centre de masse du pendule au point de rotation. La non-linéarité introduite par le sinus rend le problème beaucoup plus difficile. L'approximation habituelle est de remplacer  $\sin x$  par  $x$  ; elle limite clairement le champ d'application de la solution obtenue aux oscillations de très faible amplitude.

Nous allons apprendre à **résoudre le problème complet** : même si souvent nous n'aurons pas la solution au problème sous une forme analytique explicite  $x(t)$ , nous pourrions appréhender le comportement du système et son évolution : comportement au temps long, sensibilité aux conditions initiales, stabilité des solutions, etc.

**Ebauche d'une solution géométrique** Considérons un espace abstrait où les points auraient pour coordonnées  $(x_1, x_2)$ , appelé espace des phases. La solution du problème  $(x_1(t), x_2(t))$  sera donc représentée par un point se déplaçant sur une courbe dans cet espace, appelée trajectoire (figure 1.1).

Comme on peut prendre n'importe quel point de l'espace des phases comme condition initiale, l'espace est rempli de trajectoires. Résoudre le système dynamique consistera à dessiner la trajectoire et d'en tirer des informations sur la solution, sans la connaître explicitement.

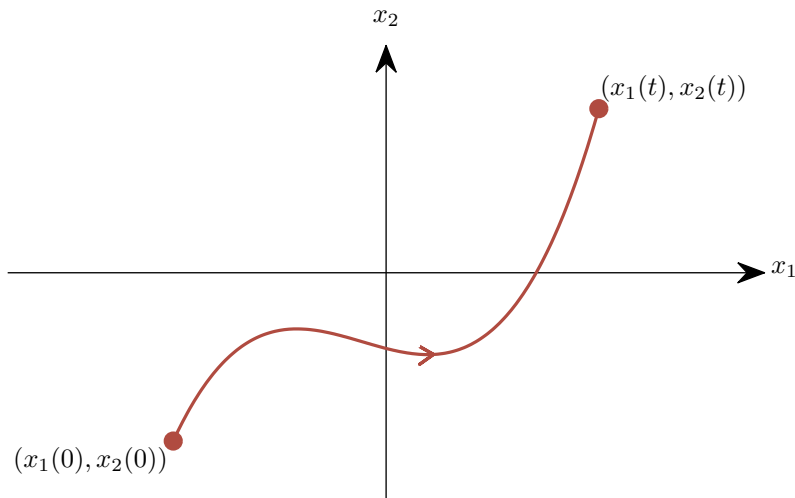


FIGURE 1.1 – La courbe est appelée trajectoire. Elle est contenue dans l’espace des phases.

**Systèmes non autonomes** Dans les situations avec une dépendance explicite en temps, comme un oscillateur harmonique amorti mais forcé :  $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F \cos(\omega t)$ , on pourra se ramener à une ODE en écrivant :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \omega t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\gamma}{m}x_2 + \frac{F}{m} \cos x_3 \\ \dot{x}_3 = \omega \end{cases} \quad (1.7)$$

Mathématiquement, il n’y a donc aucune différence entre variables spatiales et temporelle. Par cette astuce, on pourra donc toujours “s’affranchir” de la dépendance temporelle. Un système non autonome à  $n$  dimensions est un cas particulier d’un système à  $n + 1$  dimensions qui ne dépend pas explicitement du temps.

*Attention à la terminologie* : l’oscillateur harmonique forcé est un système dynamique non linéaire (à cause du  $\cos x_3$ ) à 3 dimensions, alors qu’on serait tenté de l’appeler système dynamique linéaire à 2 dimensions !

**Objectifs du cours** Les systèmes physiques, biologiques, chimiques, etc, sont fondamentalement non linéaires.

**La linéarité** est l’exception, et la non linéarité la règle, pas l’inverse ! La linéarité permet d’utiliser des méthodes fantastiques : argument de superposition, modes normaux, analyse de Fourier, ... Mais tout est **différent quand le système est non linéaire** : si vous écoutez ensemble vos deux morceaux de musique préférés, vous ne doublez pas votre plaisir, mais obtenez un vague bruit inaudible...

Dans ce cours, on s’intéressera notamment au bas de la table 1.1, qui a jusqu’ici été soigneusement évitée ! On commencera par la gauche, et on ira progressivement vers la droite... Sans toutefois dépasser la frontière, que vous pourrez explorer dans les publications scientifiques contemporaines ou en M2 pour la partie non linéaire !

TABLE 1.1 – Classification des systèmes dynamiques

		NOMBRE DE VARIABLES →			
$n = 1$	$n = 2$	$n \geq 3$	$n \gg 1$	Continu	
(Dé)croissance	Oscillations		Phénomènes collectifs	Ondes et Structures	
Croissance expo.	Oscillateur linéaire	Génie civil, structures	Oscillateurs harmoniques couplés	Élasticité	
Circuit RC	Circuit RLC	Circuit électriques	Physique des solides	Équations d'onde	
Décroiss. radioactive	Masse et ressort		Dynamique moléculaire	Électromagnétisme	
			Méca. Stat. à l'équilibre	Mécanique Quantique	
				Diffusion de la chaleur	
				Acoustique	
				Fluides visqueux	
		Chaos		Complexité spatio-temporelle	
Points fixes	Problème à 2 corps ( <i>Kepler, Newton</i> )	Attracteur étranges	Oscillateurs NL couplés	Ondes NL (solitons, chocs)	
Bifurcations	Pendule	Problème à 3 corps ( <i>Poincaré</i> )	Laser, optique NL	Plasmas	
Systèmes sur-amortis	Oscillateurs NL	Cinétique chimiques	Méca. Stat. hors équilibre	Tremblements de terre	
Équations logistiques	Cycles limites	Applications itérées ( <i>Feigenbaum</i> )	Physique des solides NL	Relativité Générale ( <i>Einstein</i> )	
	Oscillateurs biologiques (neurones, cellules du cœur)	Fractales ( <i>Mandelbrot</i> )	Réseaux de jonctions Josephson	Théorie Quant. des champs	
	Cycles proies-prédateurs	Oscillateurs NL forcés	Synchro. de cellules du cœur	Réaction/Diffusion	
	Électronique NL ( <i>Van der Pol</i> )	Utilisation du chaos	Réseaux de neurones	Ondes bio. et chimiques	
			Systèmes immunitaire	Fibrillation, épilepsie	
			Écosystème	Turbulence	
			Économie	Vie	

Linéaire

NON LINÉARITÉ →

Non linéaire

Frontière

### 1.3 Bibliographie

- ALLIGOOD, K. T., SAUER, T.D., YORKE, J .A., *Chaos : an introduction to dynamical systems*, Springer-Verlag, New York (1996).
- ARNOLD V., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag (1989).
- BERGÉ P., POMEAU Y., VIDAL C., *L'ordre dans le chaos*, Hermann, Paris (1988).
- BERGÉ P., POMEAU Y., VIDAL C., *L'espace chaotique*, Hermann, Paris (1998).
- BERGÉ P., POMEAU Y., DUBOIS M., *Des rythmes au chaos*, Odile Jacob, Paris (1994).
- GLEICK J ., *La Théorie du chaos*, (1989).
- GOLLUB, J. P.; BAKER, G. L., *Chaotic Dynamics*, Cambridge University Press (1996).
- GUCKHEIMER J., HOLMES P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Field*, Springer Verlag, New-York (1984).
- GUTZWILLER, M., *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag (1990).
- MANNEVILLE P., *Structure Dissipatives et Turbulence*, Aléa, Saclay.
- MANNEVILLE P., *Instabilités, Chaos et Turbulence*, (2004).
- NAYFEH A. H, *Perturbation Methods*, Wiley-Interscience, New-York (1973).
- OTT, E., *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, New York (2002).
- POINCARÉ H., *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, (1892).
- RUELLE D., *Hasard & Chaos*, Collection Opus 89, Odile Jacob (1991).
- STROGATZ S. H., *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Perseus Publishing (2000).
- ZASLAVSKY, G. M., *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, (2005).





Première partie

Systemes dynamiques du premier ordre



## Chapitre 2

# Flot sur une ligne

Nous commençons donc par les systèmes à une dimension, régis par une équation unique  $\dot{x} = f(x)$  dont la solution dépend du temps  $t$ , alors que  $f$  n'en dépend pas explicitement.

### 2.1 Pensons de manière géométrique !

**Résolution analytique** Commençons par un exemple dont on peut calculer la solution analytique :

$$\dot{x} = \sin x \tag{2.1}$$

La solution s'obtient par séparation des variables :

$$dt = \frac{dx}{\sin x} \rightarrow t = \int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{1}{\sin x} + \cot x \right| + C \tag{2.2}$$

où  $C$  est une constante d'intégration permettant de satisfaire aux conditions initiales. C'est la solution exacte mais elle est difficile à interpréter.

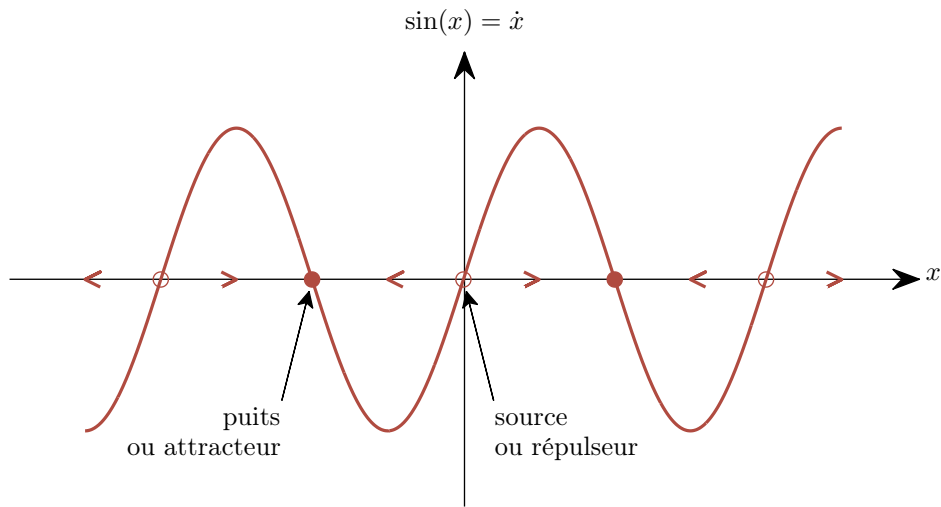
On est par exemple incapable de répondre aux deux questions suivantes, pourtant simple :

- $x(t=0) = x_0 = \pi/4$ ; décrivez les caractéristiques qualitatives pour  $t > 0$  et en particulier pour  $t \rightarrow \infty$ .
- Quel est le comportement à temps long pour une condition initiale quelconque de  $x_0$ ?

Nous allons voir qu'au contraire de la solution exacte, un dessin peut être beaucoup plus utile. Ce sera évidemment encore plus vrai quand on ne connaîtra pas la solution !

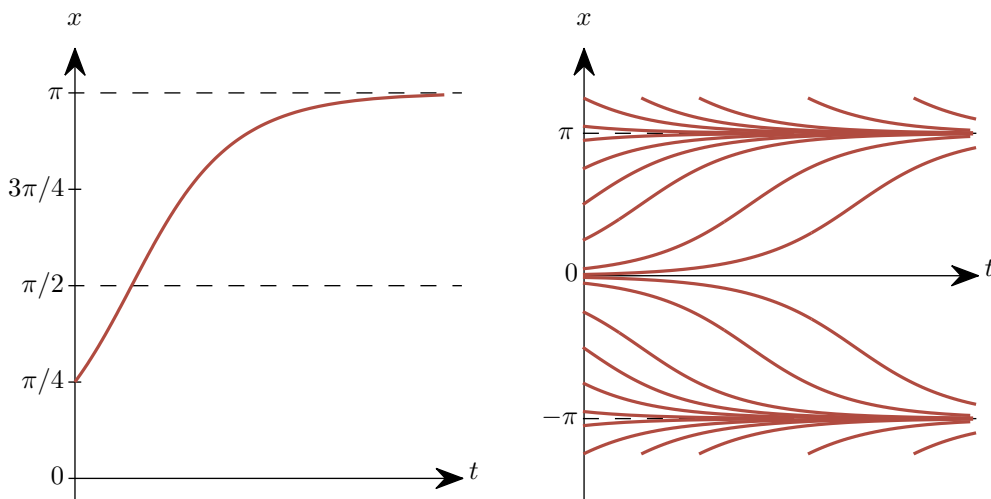
**Résolution graphique**  $\dot{x} = \sin x$  représente un champ de vecteurs que nous allons dessiner dans l'espace des phases (la droite des  $x$ , figure 2.1) : en chaque point d'abscisse  $x$  sur l'axe, nous reportons un vecteur donnant la direction et la vitesse du mouvement.  $\leftarrow$  signifie que la vitesse est vers la gauche ( $\dot{x} < 0$ ), et  $\rightarrow$  signifie que la vitesse est vers la droite ( $\dot{x} > 0$ ).

Les points où  $\dot{x} = 0$  sont des **points fixes du système dynamique**, nous les représentons par  $\bullet$  s'ils sont stables ou  $\circ$  s'ils sont instables : le champ de vitesse permet très naturellement de les distinguer. Le point en  $x = 0$  est par exemple instable (le champ de vitesse de part et d'autre s'en éloigne, on parle également de source ou répulseur), celui en  $x = \pi$  est stable (le champ de vitesse converge vers ce point également nommé puits ou attracteur). On peut alors répondre facilement aux questions posées.



**FIGURE 2.1** – Résolution graphique de l'équation  $\dot{x} = \sin x$  : on reporte sur l'axe des  $x$  (l'espace des phases) le champ de vitesse. Les points fixes du système dynamique sont représentés par des cercles : (●) s'ils sont stables ou (○) s'ils sont instables.

Lorsque  $x_0 = \pi/4$ , le point va aller vers la droite en accélérant jusqu'à atteindre un maximum de vitesse en  $\pi/2$ , puis ralentir pour tendre asymptotiquement vers  $\pi$  par la gauche. On peut donc tracer la courbe (figure 2.2). On peut faire le même raisonnement pour n'importe quel  $x_0$ . Si  $\dot{x}_0 > 0$ ,  $x(t)$  croît vers le point fixe stable le plus proche à droite. Si  $\dot{x}_0 < 0$ ,  $x(t)$  décroît vers le point fixe stable le plus proche à gauche.

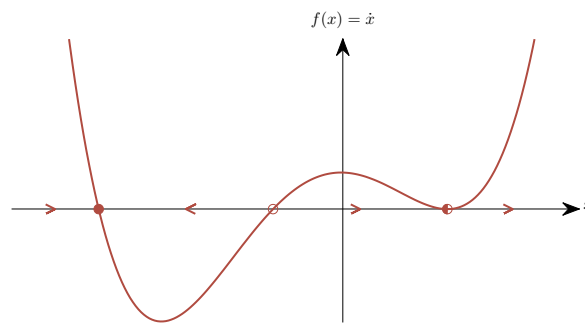


**FIGURE 2.2** – Évolution temporelle de la solution à l'équation  $\dot{x} = \sin x$ . À temps long, la solution tend vers la valeur  $\pi$  [ $2\pi$ ].

## 2.2 Points fixes et stabilité

On peut appliquer ce raisonnement à n'importe quel système à une dimension.

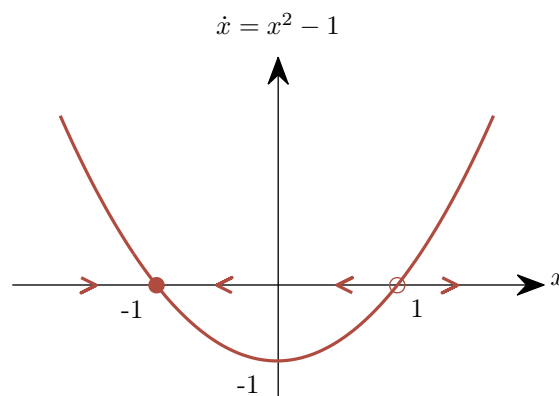
- La courbe est la **trajectoire** et le dessin est appelé **portrait de phase**.
- Le signe de  $f(x)$  permet de reporter sur l'axe des abscisses, confondu avec l'espace des phases, la direction du flot (figure 2.3).



**FIGURE 2.3** – Résolution graphique de l'équation  $\dot{x} = f(x)$  : on reporte sur l'axe des  $x$  (l'espace des phases) le champ de vitesse.

– En partant d'une condition initiale quelconque, le segment suivi par un point sur la ligne est une trajectoire, et ce tracé est un portrait de phase. Les **points fixes** sont les points d'équilibre, ils peuvent être stables ou instables comme dans l'exemple traité précédemment.

**Exemple 1** Chercher les points fixes de  $\dot{x} = x^2 - 1$  et décrire leur stabilité.



**FIGURE 2.4** – Résolution graphique de l'équation  $\dot{x} = x^2 - 1$ .

*Solution* : les points fixes  $x^*$  vérifient  $f(x^*) = 0$ , donc il y a deux points fixes  $x^* = 1$  (instable) et  $x^* = -1$  (stable) (figure 2.4).

**Remarque** : la notion d'équilibre stable fait appel à de petites perturbations. Si l'on perturbe faiblement le point fixe  $x^* = -1$ , la perturbation va décroître. Mais si la perturbation est suffisante pour envoyer le système à droite de  $x = 1$ , alors le point de phase partira vers  $+\infty$ . Le point  $x^* = -1$  est dit **localement stable**.

**Exemple 2** Chercher les points fixes de  $\dot{x} = x - \cos x$  et décrire leur stabilité.

*Solution* : la méthode directe suppose de tracer  $f(x) = x - \cos x$ , mais ce n'est pas immédiat. Il est plus simple de tracer les 2 courbes séparément, et d'étudier leur(s) intersection(s) (figure 2.5).

Dans cet exemple, il existe un seul point fixe vérifiant  $x^* = \cos x^*$  ( $\Leftrightarrow f(x^*) = x^* - \cos x^* = 0$ ). De plus lorsque la droite est au dessus du cosinus,  $f(x) > 0$ , sinon  $f(x) < 0$ . On a donc un unique point fixe instable. On a ainsi donné la réponse aux questions posées sans connaître l'expression de la solution.

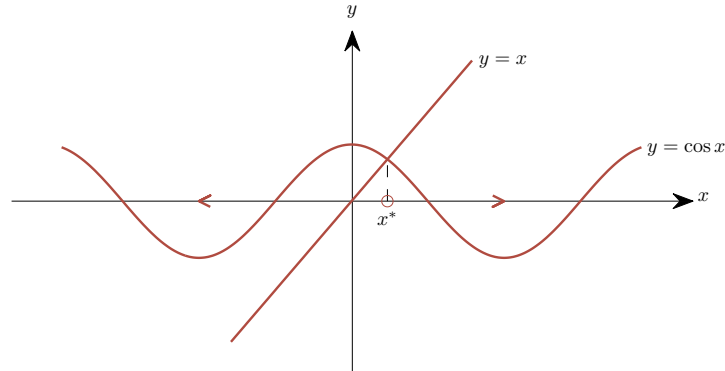


FIGURE 2.5 – Résolution graphique de l'équation  $\dot{x} = x - \cos x$ .

**Exercice 1** Tracer l'allure de la charge  $Q(t)$  d'un condensateur dans un circuit RC connecté à une source de tension fixe  $V_0$ , en supposant  $Q(t = 0) = 0$ .

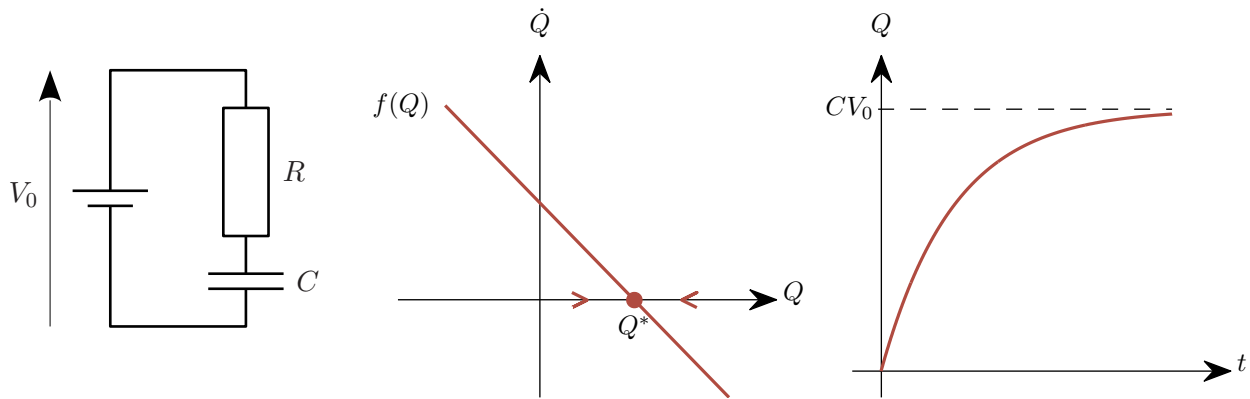


FIGURE 2.6 – Résolution graphique de l'évolution de la charge dans un circuit RC.

$$-V_0 + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{2.3}$$

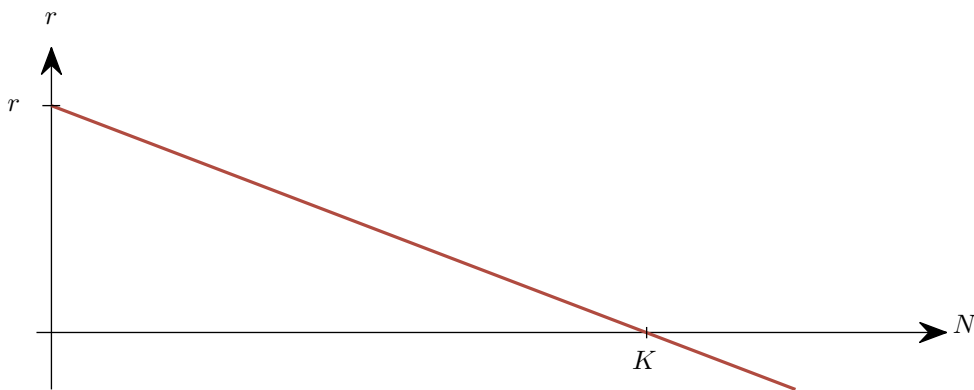
$$\dot{Q} = \frac{V_0}{R} - \frac{Q}{RC} \tag{2.4}$$

La charge du condensateur converge vers l'unique point fixe  $Q^* = CV_0$ .

### 2.3 Croissance des populations

Le **modèle le plus simple** est de supposer que la croissance de la population est proportionnelle à son nombre d'individus  $N(t)$  :  $\dot{N} = rN$ , où  $r$  est le taux de croissance. Ce modèle conduit à une croissance exponentielle de la population :  $N(t) = N_0 e^{rt}$ .

C'est clairement trop **simpliste** à temps long! Cette surpopulation va nuire aux capacités de reproduction de l'espèce considérée, à cause des ressources en quantités limitées. Les démographes (ou les biologistes des populations) supposent donc que le taux de croissance diminue quand  $N$  augmente. Le plus simple est de considérer une décroissance linéaire (figure 2.7).

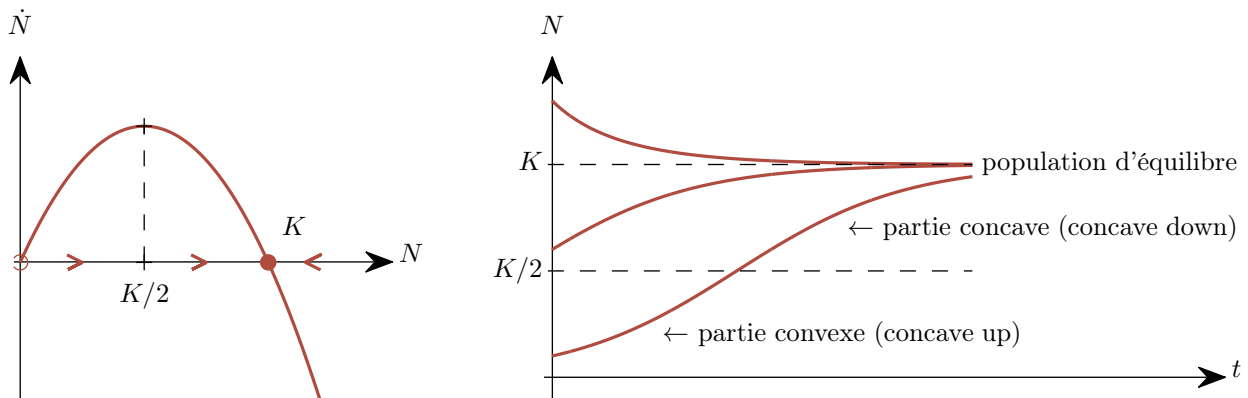


**FIGURE 2.7** – Taux de croissance  $r$  d'une population en fonction de son nombre d'individus  $N$  : modèle de Verhulst conduisant à l'équation logistique.

On obtient ainsi l'**équation logistique**, proposée par Verhulst en 1838 pour la population :

$$\dot{N} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right). \tag{2.5}$$

Cette équation est soluble, mais on préférera la méthode graphique en traçant  $\dot{N}$  en fonction de  $N$  sur la figure 2.8. Seul  $N > 0$  a un sens pour la population. On obtient 2 points fixes 0 et  $K$ , mais seul le second est stable :  $K$  représente la population d'équilibre.



**FIGURE 2.8** – Résolution graphique de l'équation logistique.

Cette description colle de manière impressionnante pour des colonies de bactéries en laboratoire [Krebs 1972 Ecology ; The experimental analysis of distribution and abundance, Harper and Row, New York, p190-200], moins bien pour les mouches de fruits et plus généralement pour les organismes ayant un cycle de vie plus complexe (avec des oeufs, des larves, enfants, adultes...) Des dépendances selon l'âge et les effets de retard mettent à mal l'hypothèse unidimensionnelle de cette approche simple : on observe de grandes fluctuations après une période où le modèle logistique est adéquat [May 1981 Theoretical Ecology, Murray 1989 Mathematical Biology]

**Exercice 2** Trouver la solution exacte de l'équation logistique, par séparation des variables (méthode 1) ou par le changement de variable  $x = 1/N$  (méthode 2).

*Solution :*

$$N(t) = K \frac{N_0 e^t}{K - N_0 + N_0 e^t} \tag{2.6}$$

## 2.4 Analyse de stabilité linéaire

Après avoir déterminé graphiquement la **stabilité** de points fixes, comment la **déterminer analytiquement** ? Il faut pour cela linéariser l'équation autour du point fixe. Soit  $x^*$  le point fixe, définissons la perturbation par  $\epsilon(t) = x(t) - x^*$ . On a alors :

$$\dot{\epsilon} = \frac{d}{dt}(x - x^*) = \dot{x} \tag{2.7}$$

$$= f(x) = f(x^* + \epsilon) \tag{2.8}$$

$$= f(x^*) + \epsilon f'(x^*) + o(\epsilon^2) \tag{2.9}$$

Or  $f(x^*) = 0$  par définition du point fixe, donc si la dérivée première est non nulle, on obtient à l'ordre le plus bas en  $\epsilon$  :

$$\dot{\epsilon} = f'(x^*) \epsilon \tag{2.10}$$

- $\epsilon$  croit donc exponentiellement si  $f'(x^*) > 0$  : **point instable**,
- $\epsilon$  décroît exponentiellement si  $f'(x^*) < 0$  : **point stable**.
- La pente  $f'(x^*)$  détermine la stabilité du point fixe (exercice : vérifier dans tous les exemples précédents que c'est bien le cas). Sa valeur donne une information quantitative sur le système :  $|1/f'(x^*)|$  est le temps caractéristique de convergence ou divergence à proximité du point fixe.

**Exemple 1 :** Étudier la stabilité des points fixes de  $\dot{x} = \sin x$ .

*Solution :* les points fixes sont  $x^* = k\pi$  ( $k$  entier), et  $f'(x^*) = \cos x^* = \cos(k\pi) = (-1)^k$ . Les points pour lesquels  $k$  est pair ( $x^* = 0 [2\pi]$ ) sont donc instables, et ceux pour lesquels  $k$  est impair ( $x^* = \pi [2\pi]$ ) sont stables.



**Exemples 2 :** L'origine pour  $\dot{x} = -x^3$  est stable, pour  $\dot{x} = x^3$  instable, pour  $\dot{x} = x^2$  semi-stable (●), ainsi qu'illustré sur la figure 2.9

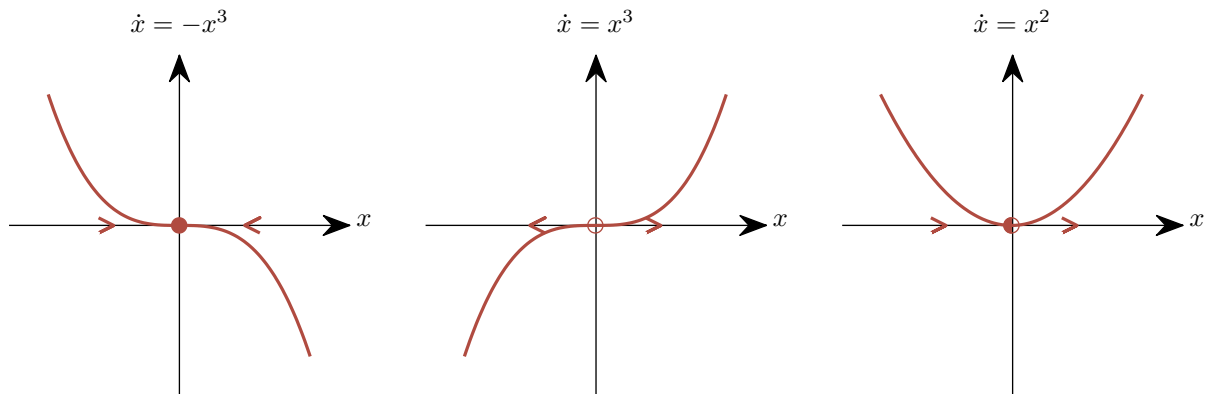


FIGURE 2.9 – Détermination graphique de la stabilité d'un point fixe lorsque  $f'(x^*) = 0$ .

**Remarque** Si  $f'(x^*) = 0$ , il faut poursuivre le développement au premier ordre non nul en  $\epsilon$  et étudier la stabilité non linéaire.

## 2.5 Les oscillations sont impossibles

Les points fixes dominent la dynamique des systèmes du premier ordre : dans tous les exemples étudiés, toutes les trajectoires tendent vers un point fixe ou divergent vers  $\pm\infty$ . C'est le **seul comportement possible à 1D** : les trajectoires ne peuvent qu'augmenter, diminuer ou rester constante, mais jamais faire demi-tour. Si c'était le cas, on aurait à l'instant du demi-tour  $\dot{x} = 0$ , donc  $f(x) = 0$ , c'est à dire que  $x$  est un point fixe...

Une autre façon de voir cette propriété est de considérer la vitesse du point pour un  $x$  juste avant le demi-tour : il y aurait deux valeurs possibles pour la vitesse au même point, l'une positive et l'autre négative. La fonction  $f$  étant uni-valuée, ce cas est exclu...

L'approche d'un point fixe est toujours monotone, les oscillations, ou même les dépassements (overshoot) ne peuvent pas exister à 1D.

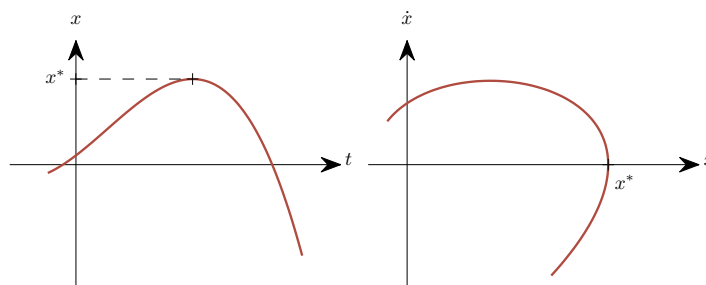


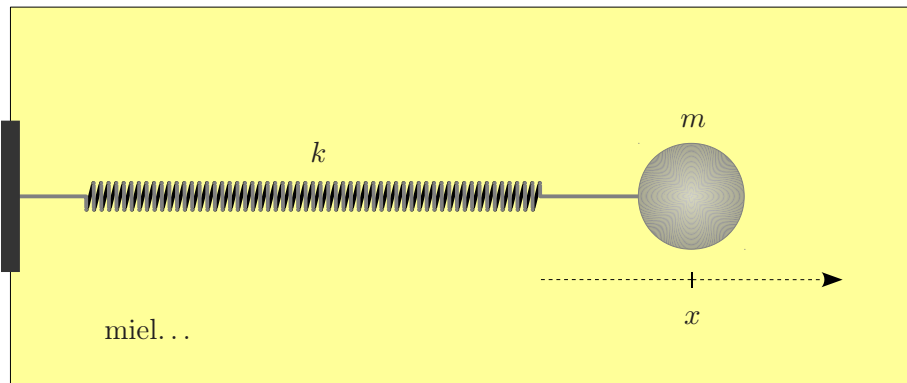
FIGURE 2.10 – À une dimension, l'évolution de  $x(t)$  est toujours monotone : si  $x(t)$  présente un extrema, alors la valeur de  $\dot{x}$  n'est plus unique proche de cet extrema.

**Remarque** Si la ligne était un cercle, cela ne serait plus vrai ! On se restreint dans ce chapitre à un espace des phases non périodique ; les oscillations sont donc exclues. Le flot sur un cercle fera l'objet du chapitre 4.

**Analogie mécanique** Un oscillateur harmonique sur-amorti (système masse ressort dans du miel par exemple) ne présente pas d'oscillation de relaxation. Mathématiquement, il suffit pour s'en convaincre de résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0 \tag{2.11}$$

en cherchant une solution de la forme  $x = e^{i\omega t}$ . La pulsation  $\omega$  n'aura pas de partie réelle (donc la solution pas d'oscillation) dès lors que  $\gamma^2 > 4km$ . Dans la limite des fortes dissipations  $\gamma$ , le terme inertiel  $m\ddot{x}$  est négligeable et l'équation s'approxime par  $\dot{x} = -kx/\gamma$ . Le système dynamique est de dimension 1, il ne présente donc pas d'oscillation.



**FIGURE 2.11** – Un oscillateur harmonique sur-amorti (un système masse ressort dans du miel par exemple) ne peut pas osciller.

## 2.6 Potentiel

Une deuxième façon de décrire un système du 1er ordre s'appuie sur l'analogie avec l'énergie potentielle. Définissons  $V(x)$  de telle manière que

$$f(x) = -\frac{dV}{dx} \iff V(x) = -\int f(x)dx + C \tag{2.12}$$

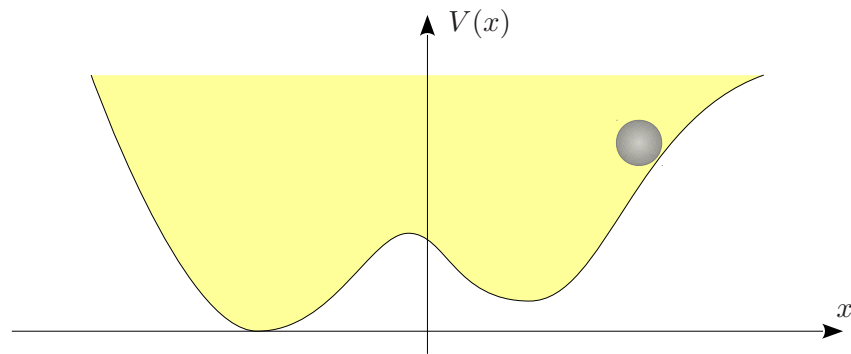
**Le signe moins respecte la convention usuelle en physique.** Le choix de la constante  $C$  est arbitraire.

Comme auparavant on doit imaginer être dans le domaine sur-amorti où il est justifié de négliger l'inertie. Considérons ainsi une particule astreinte à se déplacer sur ce potentiel immergé dans du miel. L'évolution du potentiel le long de la trajectoire est

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} \tag{2.13}$$

$$= \frac{dV}{dx} f(x) \tag{2.14}$$

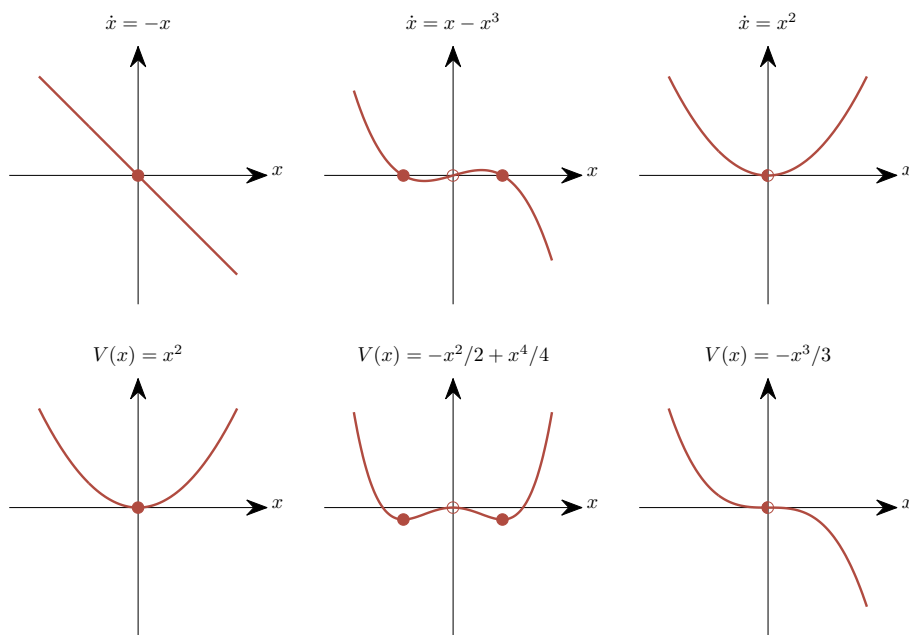
$$= -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 < 0 \tag{2.15}$$



**FIGURE 2.12** – *Potentiel d’un système du premier ordre : on imagine une particule se déplaçant sur cette ligne potentielle tout en étant soumise à une force visqueuse.*

Donc  $V$  doit décroître le long des trajectoire et la particule doit diminuer son potentiel.

**Les points fixes du système dynamique  $\dot{x} = f(x)$  correspondent aux positions d’équilibre du potentiel  $V(x)$  associé :** les minima du potentiel sont associés aux points fixe stables (attracteurs), les maxima aux point fixes instables.



**FIGURE 2.13** – *Exemples de potentiel de systèmes du premier ordre.*

**Exemples décrits dans la figure 2.13**

- $\dot{x} = -x$  est décrite par  $f(x) = -x$ , donc le potentiel  $V(x) = x^2$ . Le seul point fixe est  $x^* = 0$ , et il est stable.
- $\dot{x} = x - x^3$  est décrite par le potentiel  $V(x) = -x^2/2 + x^4/4$ . Le système est bistable : deux points fixes stables  $x^* = \pm 1$ , et un point fixe instable  $x^* = 0$ .
- $\dot{x} = x^2$  est décrite par le potentiel  $V(x) = -x^3/3$ . Le système est semi-stable : un point fixe semi-stable  $x^* = 0$ .

**Remarque :** Revenons un instant sur l'équation  $\dot{x} = x^2$ . La solution exacte se calcule par la méthode de séparation des variables :

$$\frac{dx}{x^2} = dt \tag{2.16}$$

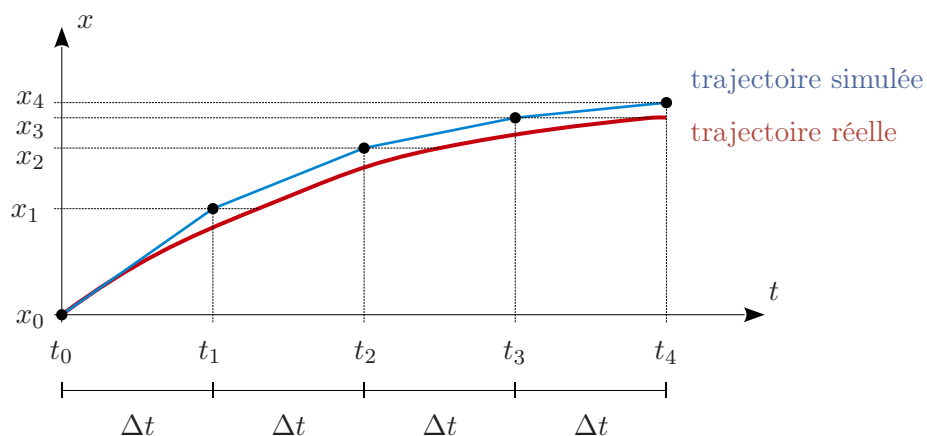
$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t \tag{2.17}$$

$$x = \frac{x_0}{1 - tx_0} \tag{2.18}$$

Si  $x_0 < 0$ , la solution converge algébriquement vers  $x^* = 0$ , par contre si  $x_0$  est positif, la solution n'existe pas à tout temps : elle diverge pour  $t = 1/x_0$ . La résolution graphique permet de prédire que la solution diverge, mais pas qu'il existe dans ce cas une **singularité en temps fini**, qui arrive à un instant dépendant de la condition initiale.

## 2.7 Résolution numérique

### 2.7.1 Méthode d'Euler



**FIGURE 2.14** – Intégration numérique d'une équation différentielle par la méthode d'Euler : on approxime la courbe à sa tangente pour estimer l'évolution temporelle à partir d'une condition initiale.

On découpe le temps  $t$  en petits intervalles de taille  $\Delta t$ , le temps est alors discret :  $t_n = n\Delta t$ . À partir de la condition initiale  $x_0$ , on estime le point suivant  $x_1$  en approxinant la courbe  $x(t)$  par sa tangente en  $x_0$  :

$$x_1 = x(t_1) = x(t_0 + \Delta t) \tag{2.19}$$

$$\approx x(t_0) + \Delta t \dot{x}(t_0) \tag{2.20}$$

$$\approx x_0 + \Delta t f(x_0) \tag{2.21}$$

L'approximation est valable dans la limite des  $\Delta t$  petits. De manière générale, on construit ainsi la solution de point en point de manière itérative :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t f(x_n) \tag{2.22}$$

C'est la **méthode d'Euler**, qui est la plus simple à implémenter. On peut montrer que c'est une méthode du premier ordre puisque  $E = |x(t_n) - x_n| \sim \Delta t$

### 2.7.2 Méthodes d'ordre plus élevé

Il est possible de raffiner la méthode d'Euler pour obtenir un ordre plus élevé, en calculant par exemple la vitesse aux 2 bornes de l'intervalle estimé initialement pour mieux l'estimer :

$$\tilde{x}_{n+1} = x_n + f(x_n)\Delta t \quad \text{étape d'essai} \quad (2.23)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2} [f(x_n) + f(\tilde{x}_{n+1})] \Delta t \quad \text{étape réelle} \quad (2.24)$$

Cette méthode est d'ordre 2 :  $E \sim (\Delta t)^2$ .

En ajoutant des étapes supplémentaires, on peut augmenter encore l'ordre de la méthode. L'algorithme le plus répandu est la **méthode de Runge-Kutta d'ordre 4**. Le lecteur intéressé consultera par exemple Numerical Recipes, ouvrage de référence sur la résolution numérique d'équations.

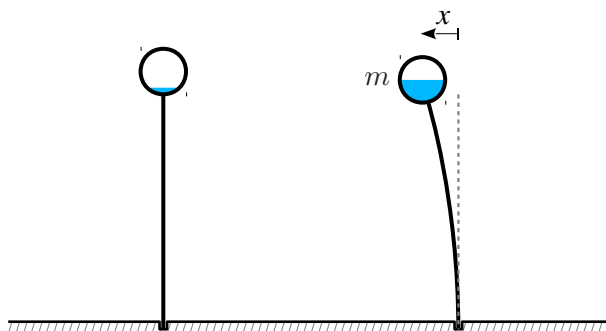
**Exercices** N'hésitez pas à faire des tests tout au long de ce cours en programmant avec votre logiciel ou code préféré : Matlab, Maple, Mathematica, Fortran, Perl, C, etc.



## Chapitre 3

# Bifurcations

Nous avons donc vu que la dynamique semblait peu intéressante pour les systèmes du premier ordre, mais tout devient différent si le système dépend de paramètres externes : le système peut alors transiter entre des comportements qualitativement différents (en langage mathématique “topologiquement non équivalents”). Le système peut par exemple changer de nombre de points fixes, ou leur stabilité. Ces changements qualitatifs sont appelés **bifurcations**, les points correspondants **points de bifurcation**, et les paramètres : **paramètres de contrôle**. Les bifurcations sont parfois nommées transitions de phase dynamiques, par analogie avec la théorie des transitions de phase.



**FIGURE 3.1** – Exemple de bifurcation : flambage d’une poutre verticale lorsque la charge augmente. Le paramètre de contrôle est ici la masse, et la variable dynamique la déflexion de la poutre.

### 3.1 Bifurcation Noeud-Col (Saddle-Node)

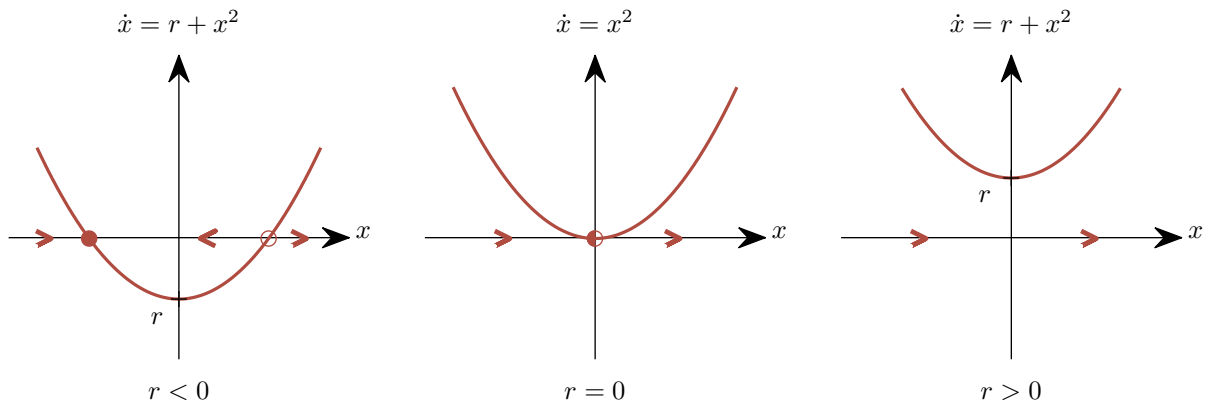
C’est une bifurcation pour laquelle deux points fixes se rapprochent, lorsque le paramètre de contrôle varie, et s’annihilent (figure 3.2). L’exemple canonique est le système du 1er ordre :

$$\dot{x} = r + x^2 \quad (3.1)$$

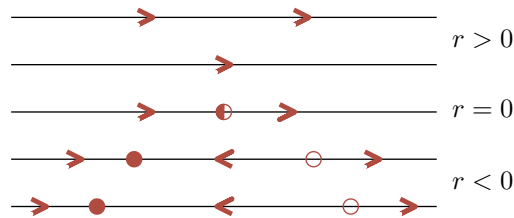
Les points fixes sont :

- $r < 0$  : 2 points fixes, 1 stable, 1 instable
- $r = 0$  : 1 point fixe semi-stable
- $r > 0$  : pas de point fixe

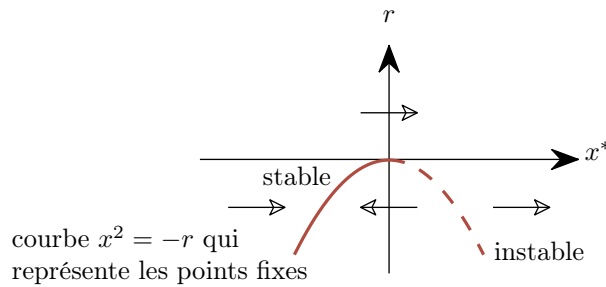
Une bifurcation a lieu au point  $r = 0$  puisque le portrait de phase est qualitativement différent selon la valeur de  $r$ .



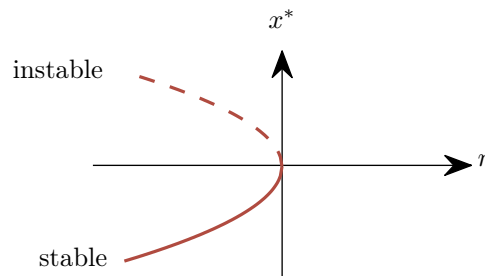
**FIGURE 3.2** – La bifurcation noeud-col correspond à l’annihilation de 2 points fixes. On représente ici sa forme normale  $\dot{x} = r + x^2$ .



(a) Représentation de l’espace des phase pour quelques valeurs discrètes de  $r$ .



(b) Représentation des points fixes dans le plan  $(x, r)$  : lignes continues pour les points fixes stables, lignes pointillées pour les points fixes instables. La direction du flot est indiquée par des flèches horizontales ( $r$  n’est pas une variable dynamique).



(c) **Diagramme de bifurcation** : c’est la représentation la plus courante, qui consiste à inverser les axes du tracé précédent. La raison sous-jacente est que l’on contrôle le paramètre de contrôle  $r$  ! Il est donc usuel de le placer en abscisse.

**FIGURE 3.3** – Représentations graphiques de la bifurcation noeud-col



**Diagramme de bifurcation** La figure 3.3 reporte plusieurs représentations graphiques de la bifurcation. La forme la plus usuelle est le *diagramme de bifurcation* (c). Remarque : la dénomination “noeud-col” prendra tout son sens en dimension 2 (chapitre 8).

**Exemple 1** Tracer le diagramme de bifurcation du système dynamique  $\dot{x} = r - x^2$   
*Solution* : On effectue le changement de variable  $x' = -x$  et  $r' = -r$ , l'équation devient  $\dot{x}' = r' + x'^2$ . C'est l'équation générique (3.1) discutée précédemment : on parle de **forme normale**. Le diagramme de bifurcation du système est donc le symétrique de la figure 3.3(c) par rapport à l'origine, il est représenté sur la figure 3.4

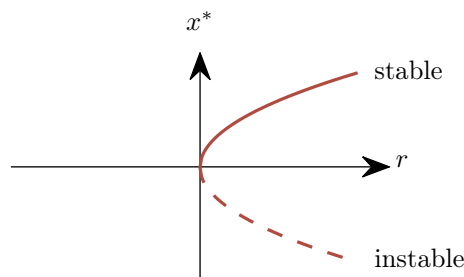


FIGURE 3.4 – Diagramme de bifurcation du système  $\dot{x} = r - x^2$ .

**Exemple 2** Montrer que le système dynamique  $\dot{x} = r - x - e^{-x}$  subit une bifurcation noeud-col lorsque  $r$  varie.

*Solution* : comme précédemment, on trace les courbes  $r - x$  et  $e^{-x}$  pour trouver le nombre de points fixes. Il existe trois cas, illustrés sur la figure 3.5

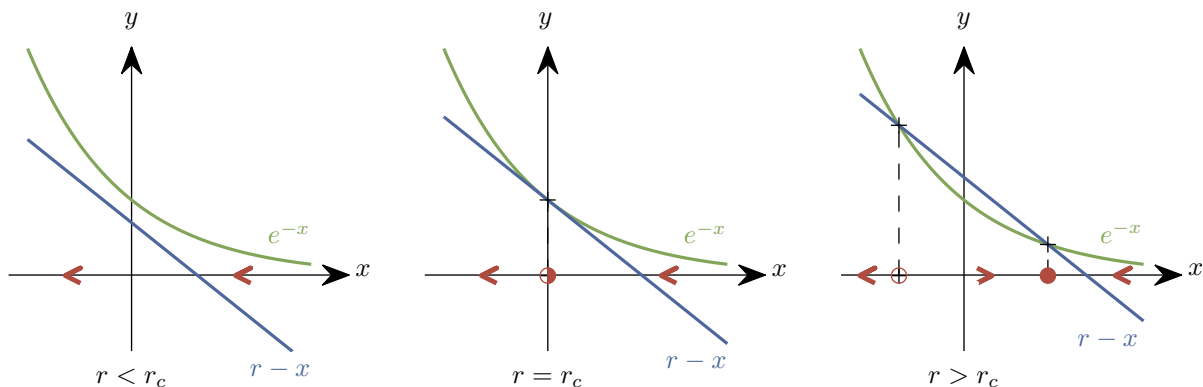


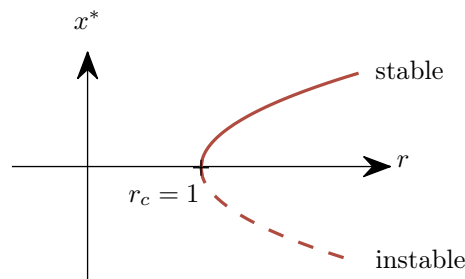
FIGURE 3.5 – Résolution graphique de l'équation  $\dot{x} = r - x - e^{-x}$ .

Pour déterminer le point de bifurcation  $r_c$ , on impose que les 2 courbes se croisent tangentiellement : les fonctions et leurs dérivées sont égales, soit

$$r_c - x^* = e^{-x^*} \tag{3.2}$$

$$-1 = -e^{-x^*} \tag{3.3}$$

La bifurcation a donc lieu en  $x^* = 0$  et  $r_c = 1$ , et conduit au diagramme de bifurcation (Fig. 3.6).



**FIGURE 3.6** – Diagramme de bifurcation du système  $\dot{x} = r - x - e^{-x}$ . On retrouve la forme normale de la bifurcation noeud-col.

Remarque : autour du point fixe  $x^* = 0$  au moment de la bifurcation, on remarque

$$\dot{x} = r - x - e^{-x} \tag{3.4}$$

$$= r - x - (1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) \tag{3.5}$$

$$\approx r - 1 - \frac{1}{2}x^2 \tag{3.6}$$

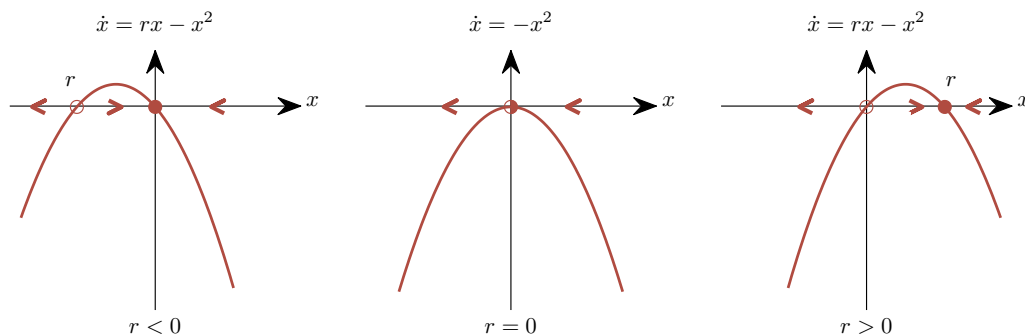
On retrouve la forme normale de la bifurcation noeud-col en posant  $r' = (1 - r)/2$  et  $x' = -2x$ .

### 3.2 Bifurcation transcritique (ou bifurcation avec échange de stabilité)

Dans certaines situations, un point fixe est toujours un point fixe, quelle que soit la valeur du paramètre de contrôle, mais sa stabilité peut changer. La forme normale de l'équation du système dynamique présentant une **bifurcation transcritique** est :

$$\dot{x} = rx - x^2 = (r - x)x \tag{3.7}$$

Cette équation est analogue à l'équation logistique, mais nous autorisons ici des valeurs négatives pour  $x$ . L'analyse graphique est reportée figure 3.7



**FIGURE 3.7** – La bifurcation transcritique correspond à un échange de stabilité des 2 points fixes. On représente ici sa forme normale  $\dot{x} = rx - x^2$ .

Les points fixes sont :

- $r < 0$  : 2 points fixes :  $x^* = 0$  stable,  $x^* = r$  instable
- $r = 0$  : 1 point fixe semi-stable :  $x^* = 0 = r$
- $r > 0$  : 2 points fixes :  $x^* = 0$  instable,  $x^* = r$  stable

Lorsque  $r$  passe de positif à négatif, il y a échange de stabilité. Le diagramme de bifurcation est reporté sur la figure 3.8. Ici les 2 points fixes ne disparaissent pas à la collision mais échangent leur stabilité.

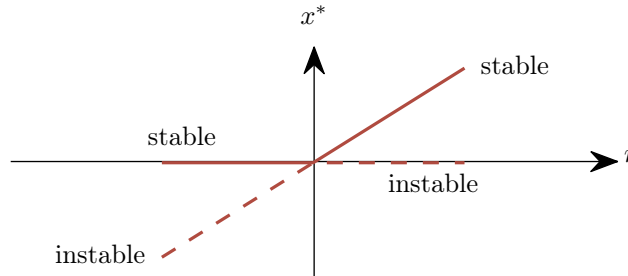


FIGURE 3.8 – Diagramme de bifurcation transcritique.

### 3.3 Seuil pour un laser

Nous étudions ici un modèle simplifié d’un laser solide. Celui-ci est constitué d’une collection d’atomes optiquement actifs dans une matrice solide, limitée par des miroirs partiellement réfléchissant formant une cavité résonante (figure 3.9). Lorsque le pompage est faible, chaque atome réémet de manière incohérente, comme une lampe ordinaire. Au dessus d’un certain seuil d’amplitude de pompage, les atomes oscillent en phase : on a un laser. Le processus d’auto-organisation est spontané car l’excitation est toujours incohérente.

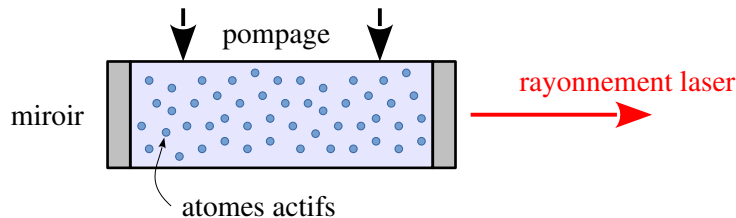


FIGURE 3.9 – Schéma simpliste d’un laser solide

Modèle simplifié : Soit  $n$  le nombre de photon dans la cavité, on écrit

$$\dot{n} = \text{Gain} - \text{Pertes} \tag{3.8}$$

où  $G$  et  $k$  sont les coefficients de gain et perte.

**Le terme de gain** est supposé proportionnel au nombre d’atomes excités  $N$ , mais aussi au nombre de photons  $n$  : ils participent au phénomène d’émission stimulée :  $GNn$ .

**Le terme de perte** correspond à la “fuite” des photons par les miroirs de la cavité,  $1/k$  est le temps de résidence typique d’un photon dans le laser :  $kn$ .

$$\dot{n} = GNn - kn \tag{3.9}$$

L'idée clef est d'écrire  $N(t) = N_0 - \alpha n$ , avec  $N_0$  le nombre d'atomes excités en l'absence d'effet laser, et  $\alpha n$  le nombre d'atomes désexcités suite à l'émission stimulée d'un photon. L'équation du système dynamique s'écrit donc

$$\dot{n} = Gn(N_0 - \alpha n) - kn \tag{3.10}$$

$$= (GN_0 - k)n - G\alpha n^2 \tag{3.11}$$

On ne trace que la partie positive sur la figure 3.10 car  $n > 0$ .

Pour  $N_0 < k/G$ , le point  $n^* = 0$  (pas d'émission) est le seul point fixe, il est stable.

Pour  $N_0 > k/G$ , l'origine devient un point fixe instable et le système converge vers un point fixe non nul : il y a émission laser. Le diagramme de bifurcation est reporté sur la figure 3.11.

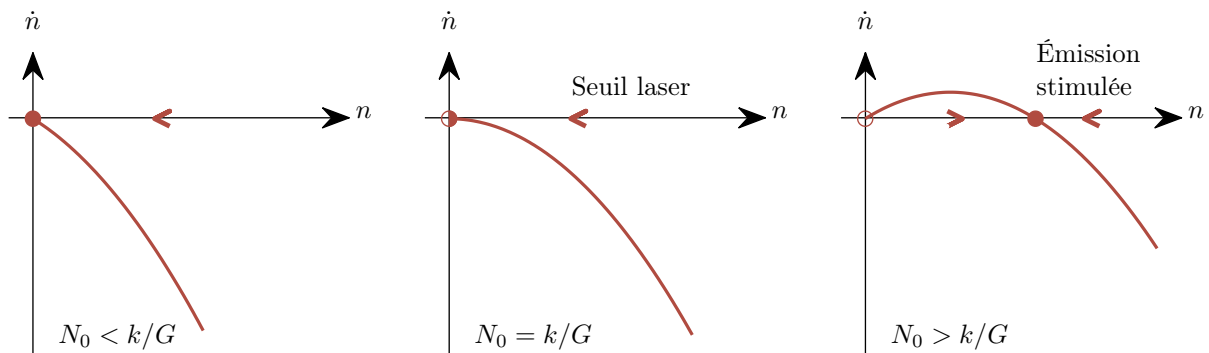


FIGURE 3.10 – Étude graphique de la stabilité du système dynamique simplifié décrivant l'émission d'un laser solide.

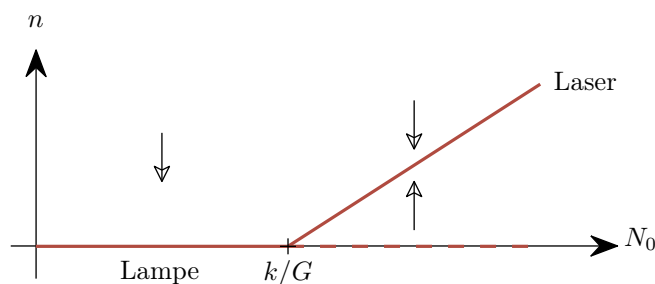


FIGURE 3.11 – Diagramme de bifurcation schématisant l'émission d'un laser solide.

**Remarque** Ce modèle simpliste oublie la dynamique et l'émission spontanée (cf. TD).

### 3.4 Bifurcation fourche (pitchfork)

Les bifurcations fourches apparaissent dans des **systèmes ayant une symétrie**, elle correspondent en réalité à la **brisure spontanée** de cette symétrie. L'exemple du flambage d'une poutre vu dans l'introduction de ce chapitre appartient à cette catégorie : quand la masse est faible, la déflexion est nulle, quand la masse dépasse un seuil, la déflexion est vers la droite ou la gauche de façon équiprobable.

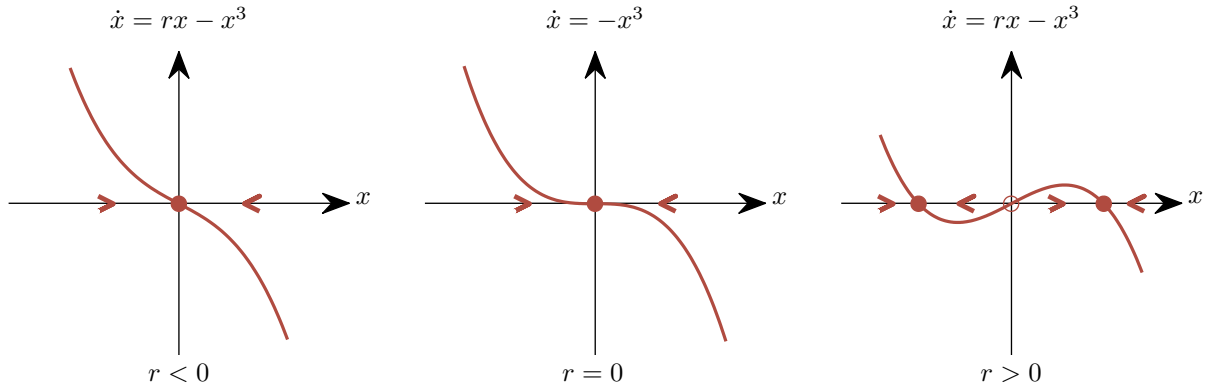
Il existe deux types de bifurcation : bifurcation fourche supercritique (forme normale  $\dot{x} = rx - x^3$ ), et bifurcation fourche souscritique (forme normale  $\dot{x} = rx + x^3$ ), que nous étudions successivement.

### 3.4.1 Bifurcation fourche supercritique

La forme normale de cette bifurcation est

$$\dot{x} = rx - x^3 = x(r - x^2) \tag{3.12}$$

Cette équation est invariante par le changement de variable  $x \leftrightarrow -x$ . Sa résolution graphique est portée figure 3.12

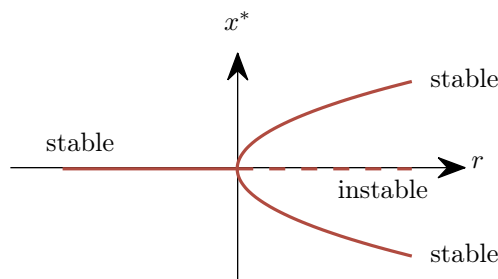


**FIGURE 3.12** – La bifurcation fourche supercritique correspond à une brisure spontanée de la symétrie  $x \leftrightarrow -x$ . On représente ici sa forme normale  $\dot{x} = rx - x^3$ .

Les points fixes sont :

- $r < 0$  : 1 seul point fixe,  $x^* = 0$  stable.
- $r = 0$  : 1 seul point fixe,  $x^* = 0$ , mais moins stable car la pente est nulle. la relaxation vers le point fixe n'est pas exponentielle mais algébrique. Ce phénomène de ralentissement critique est étudié en TD :  $x = x_0/\sqrt{1 + x_0^2 t} \sim t^{-1/2}$ .
- $r > 0$  : 3 points fixes :  $x^* = 0$  instable,  $x^* = \pm\sqrt{r}$  stables

Le diagramme de bifurcation est reporté sur la figure 3.13.



**FIGURE 3.13** – Diagramme de bifurcation supercritique.

**Exemple 1** Un aimant peut être modélisé comme une grande collection de spins électroniques. Dans le modèle le plus simple (Ising), les spins peuvent pointer vers le haut ou vers le bas :  $S_n = \pm 1$ , avec  $n \in [1, N]$ . Pour des raisons de mécanique quantique, les spins ont envie de pointer dans la même direction que leurs voisins, alors que la température introduit un effet aléatoire. Le paramètre d'ordre de la transition de phase est  $m = \sum_n S_n/N$  : l'aimantation moyenne par spin. À haute température  $T$ , les

spins pointent dans des directions aléatoires et  $m = 0$ , c'est l'état paramagnétique. Lorsque  $T$  diminue,  $m$  reste proche de 0 jusqu'à la température de transition de phase  $T_c$ . Le matériau se magnétise alors spontanément :  $|m| > 0$ . C'est la phase ferromagnétique. Deux états ferromagnétiques sont possibles ( $m > 0$  et  $m < 0$ ). La symétrie peut être brisée en appliquant un champ magnétique supplémentaire  $h$  qui brise la symétrie haut/bas et favorise une des deux directions.

La transition paramagnétique-ferromagnétique est pilotée par l'équation  $\dot{m} = -m + \beta \tanh m$  (avec  $\beta \propto 1/T$ , cf. cours de mécanique statistique). La résolution graphique de cette équation est reportée figure 3.14.

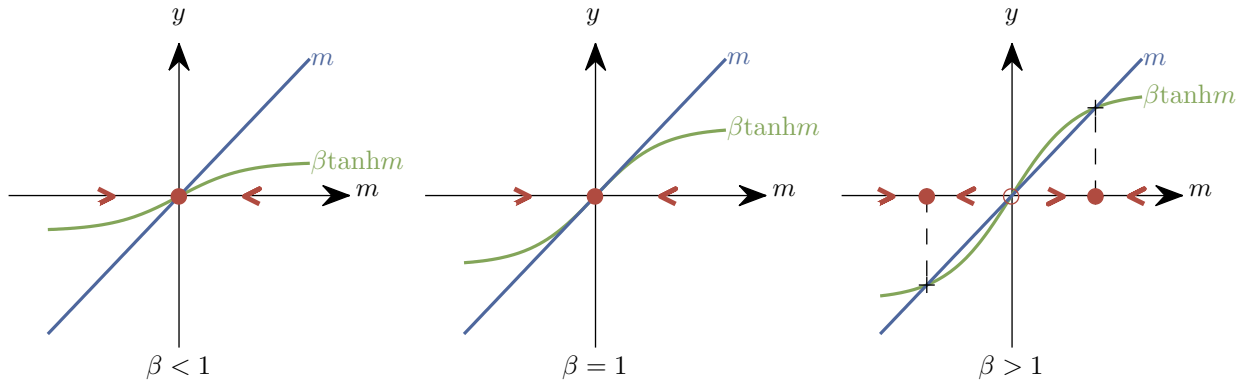


FIGURE 3.14 – Transition paramagnétique-ferromagnétique.

On observe une transition entre un état paramagnétique (pour  $\beta < 1$ ), où l'aimantation est nulle, et un état ferromagnétique (pour  $\beta > 1$ ), avec apparition d'une aimantation spontanée.

**Exemple 2** Tracer le potentiel associé à la forme normale de la bifurcation fourche supercritique.  
*Solution :*

$$-\frac{dV}{dx} = f(x) = \dot{x} = rx - x^3 \Rightarrow V(x) = -\frac{1}{2}rx^2 + \frac{1}{4}x^4 \tag{3.13}$$

Le potentiel est reporté sur la figure 3.15. Il met en évidence l'analogie avec les transitions de phase du second ordre (notamment pour le modèle d'Ising).

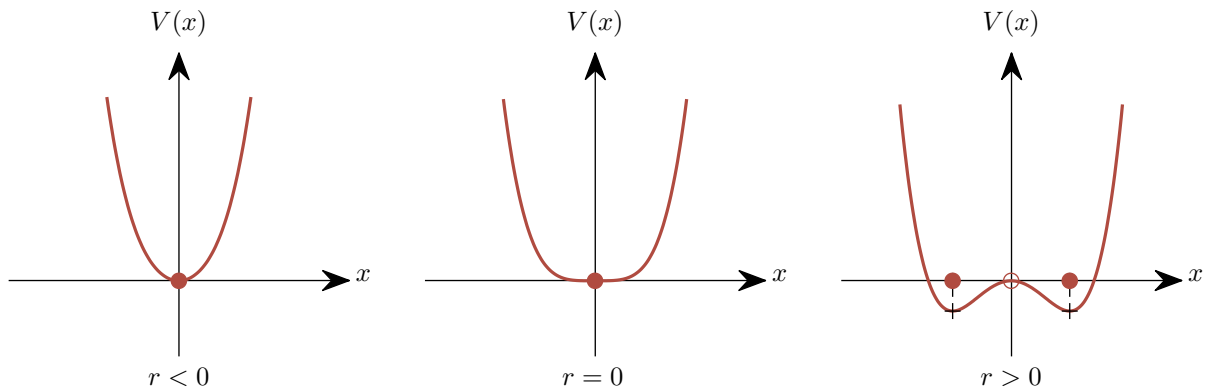


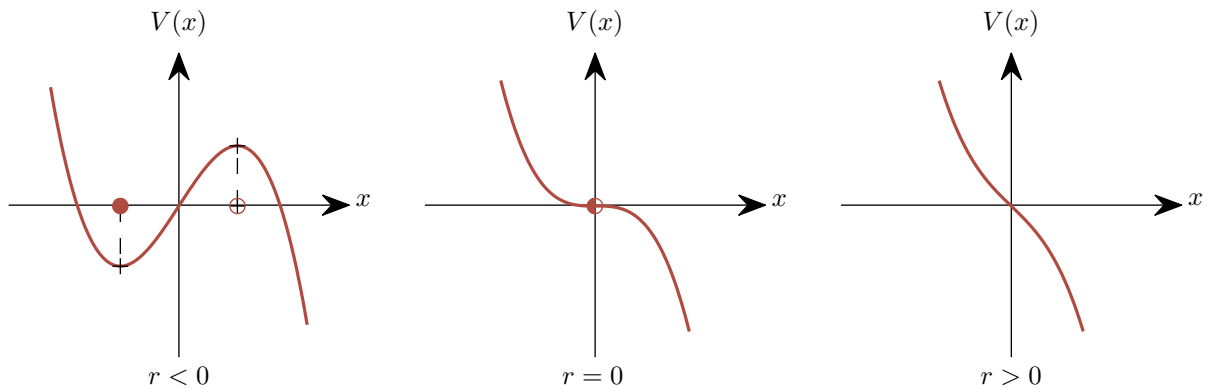
FIGURE 3.15 – Potentiel associé à une bifurcation fourche supercritique :  $V(x) = -rx^2/2 + x^4/4$ .

**Exercice** (à la maison) Tracer le potentiel associé à la forme normale de la bifurcation noeud-col.

*Solution :*

$$-\frac{dV}{dx} = f(x) = \dot{x} = r + x^2 \Rightarrow V(x) = -rx - \frac{1}{3}x^3 \quad (3.14)$$

Le potentiel est reporté sur la figure 3.16.



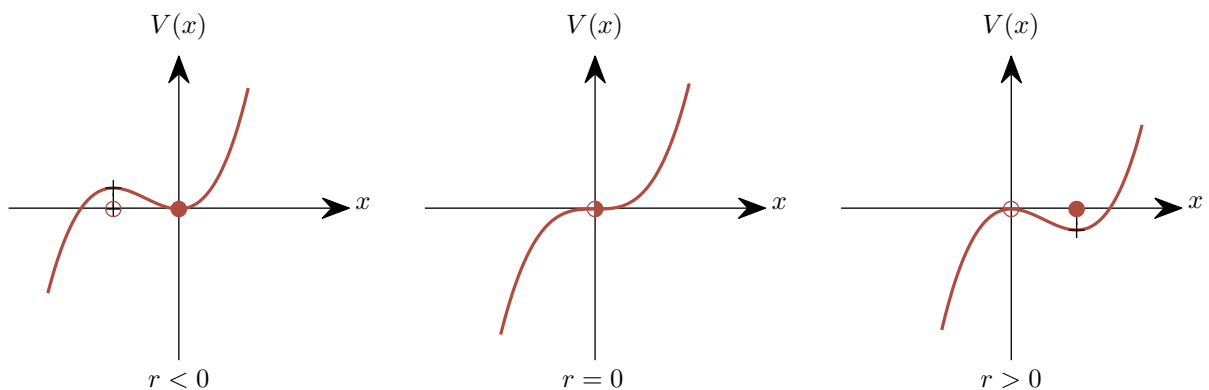
**FIGURE 3.16** – Potentiel associé à une bifurcation noeud-col :  $V(x) = -rx - x^3/3$ .

**Exercice** (à la maison) Tracer le potentiel associé à la forme normale de la bifurcation transcritique.

*Solution :*

$$-\frac{dV}{dx} = f(x) = \dot{x} = rx - x^2 \Rightarrow V(x) = -\frac{1}{2}rx^2 + \frac{1}{3}x^3 \quad (3.15)$$

Le potentiel est reporté sur la figure 3.17.



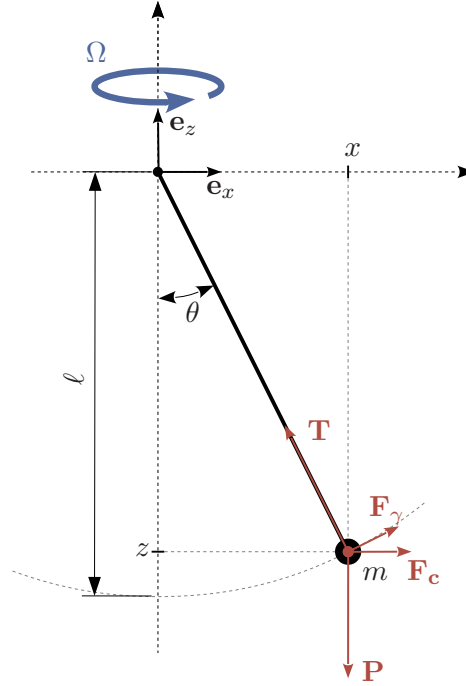
**FIGURE 3.17** – Potentiel associé à une bifurcation transcritique :  $V(x) = -rx^2/2 + x^3/3$ .

**Exemple 3** Bille dans un cerceau

On considère un cerceau de rayon  $\ell$ , rempli de miel, à l'intérieur duquel peut glisser une bille. Le cerceau tourne sur lui-même à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour d'un axe vertical. Étudier le système dynamique ainsi constitué.

*Solution :*

La bille est soumise à 4 forces : son poids  $\mathbf{P} = -mg\mathbf{e}_z$  ( $g$  l'accélération de la pesanteur), la force centrifuge  $F_c = mx\Omega^2$ , la résistance du cerceau  $\mathbf{T}$  et la force visqueuse  $F_\gamma = -\gamma\ell\dot{\theta}$  tangente au cercle. L'angle  $\theta \in [-\pi, \pi]$  alors que l'abscisse  $x = \ell \sin \theta$ .



**FIGURE 3.18** – Schéma du pendule. Le rayon du cerceau est  $\ell$ , on repère la position de la masse  $m$  par l'angle  $\theta$  formé avec la verticale, ou ses coordonnées  $(x, z)$  dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$  en rotation à vitesse angulaire constante  $\Omega$  autour de l'axe vertical  $\mathbf{e}_z$  passant par la position de la bille au repos. Cette masse est soumise à l'action de 4 forces dans le plan : son poids  $\mathbf{P}$ , la force centrifuge  $\mathbf{F}_c = mx\Omega^2$ , la force visqueuse  $\mathbf{F}_\gamma$  et la tension du fil  $\mathbf{T}$ .

Comme la roue n'est pas déformable, on résout le problème en projetant le principe fondamental de la dynamique sur la tangente au cercle.

Dans le régime sur-amorti, on aboutit donc à l'équation

$$0 = -mg \sin \theta + m\ell\Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \gamma\ell\dot{\theta} \quad (3.16)$$

On introduit la pulsation propre du pendule  $\omega = \sqrt{g/\ell}$  et on obtient directement :

$$\frac{\gamma}{m}\dot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta + \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.17)$$

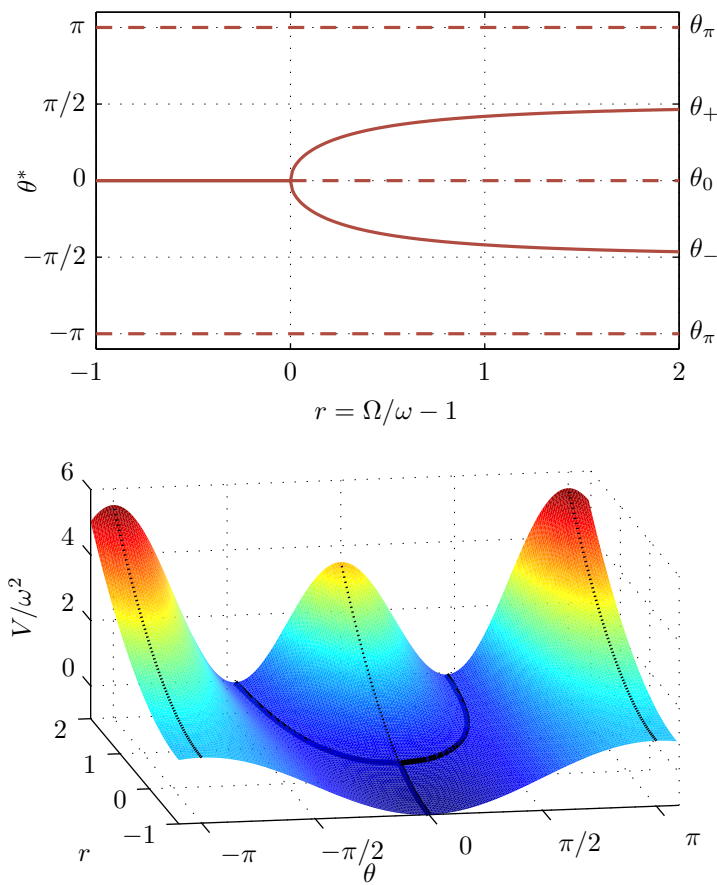
$$= \sin \theta(\Omega^2 \cos \theta - \omega^2) \quad (3.18)$$

Les points fixes sont donnés par

- $\sin \theta = 0$ , soit  $\theta^* = 0$  (pendule vers le bas) ou  $\theta^* = \pi$  (pendule vers le haut)
- si  $\Omega > \omega$ , il existe une paire de points fixes supplémentaires :  $\theta^* = \pm \arccos(\omega^2/\Omega^2)$



Le diagramme de bifurcation est reporté sur la figure 3.19 (stabilité des points fixes à étudier en exercice). Il s'agit d'une bifurcation fourche supercritique : si on tourne assez vite, le point le plus bas n'est plus stable et la position d'équilibre s'en éloigne continûment. Dans cette même figure, on reporte le potentiel associé à la bifurcation fourche supercritique de ce système dynamique.



**FIGURE 3.19** – (haut) Diagramme de bifurcation : évolution de la position d'équilibre  $\theta^*$  en fonction du paramètre de contrôle normalisé  $r = \Omega/\omega - 1$ . Les points fixes stables sont tracés en trait plein, les points fixes instables en ligne pointillée. (bas) Potentiel  $V$  dans l'espace variable dynamique  $\theta$  / paramètre de contrôle normalisé  $r$ . Les points fixes stables correspondent à des minima du potentiel (à  $r$  fixé) et sont tracés en trait plein sur cette surface, les points fixes instables correspondent à des maxima et sont reportés en ligne pointillée.

### 3.4.2 Bifurcation fourche sous-critique

La forme normale de cette bifurcation est

$$\dot{x} = rx + x^3 = x(r + x^2) \tag{3.19}$$

Cette équation est également invariante par le changement de variable  $x \leftrightarrow -x$ .

Sa résolution graphique est portée figure 3.20.

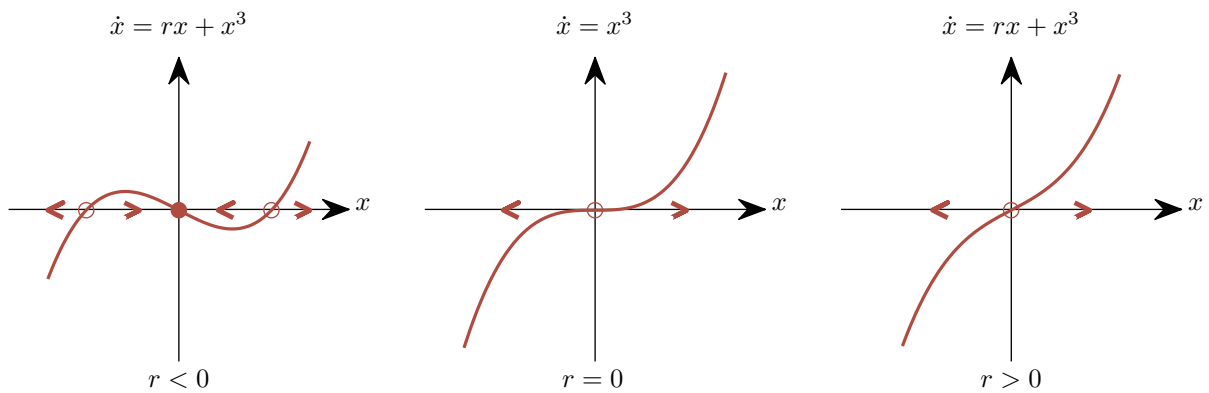


FIGURE 3.20 – Bifurcation fourche sous-critique. On représente ici sa forme normale  $\dot{x} = rx + x^3$ .

Les points fixes sont :

- $r < 0$  : 3 points fixes :  $x^* = 0$  stable,  $x^* = \pm\sqrt{-r}$  instables
- $r \geq 0$  : 1 seul point fixe,  $x^* = 0$  instable.

Le diagramme de bifurcation est reporté sur la figure 3.21. Ce type de bifurcation va conduire tout les points vers l’infini, sauf ceux à l’intérieur d’une parabole.

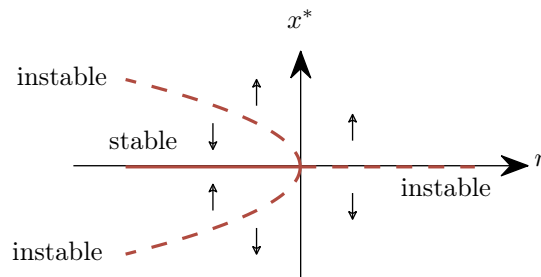


FIGURE 3.21 – Diagramme d’une bifurcation fourche sous-critique.

**Exercice** Montrer que la divergence donne lieu à une singularité en temps fini pour  $r > 0$ .

*Solution :*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = x(r + x^2) \tag{3.20}$$

$$\frac{dx}{x(r + x^2)} = dt \tag{3.21}$$

$$\frac{1}{r} \int dx \left[ \frac{1}{x} - \frac{x}{r + x^2} \right] = \int dt \tag{3.22}$$

$$\ln x - \frac{1}{2} \ln(r + x^2) = r(t - t_0) \tag{3.23}$$

La constante d'intégration correspondant aux conditions initiales est absorbée dans la constante  $t_0$ .

$$\ln \frac{x^2}{r + x^2} = 2r(t - t_0) \tag{3.24}$$

$$x^2 \left( 1 - e^{2r(t-t_0)} \right) = r e^{2r(t-t_0)} \tag{3.25}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{r e^{2r(t-t_0)}}{1 - e^{2r(t-t_0)}}} \tag{3.26}$$

La condition initiale  $x_0 = x(0)$  permet de donner la valeur de  $t_0$  à l'aide de l'équation (3.24)

$$t_0 = -\frac{1}{2r} \ln \frac{x_0^2}{r + x_0^2} = \frac{1}{2r} \ln \left( 1 + \frac{r}{x_0^2} \right) \tag{3.27}$$

On se place dans le cas  $r > 0$ , donc  $t_0 > 0$ . La solution 3.26 diverge pour  $t = t_0$ .

**Physiquement**, la divergence n'est pas toujours raisonnable, un effet stabilisateur peut émerger dans le système. Le plus simple que l'on puisse considérer tout en préservant la symétrie est un terme d'ordre 5 en  $x$  :

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5 \tag{3.28}$$

Ce terme supplémentaire sature systématiquement la solution pour les  $x$  trop grands. Le diagramme de bifurcation de ce système dynamique est reporté sur la figure 3.22.

**Exercice** Tracer ce diagramme et réaliser l'analyse graphique de la stabilité des points fixes.

**Remarques**

- Pour  $r \in [r_s, 0]$ , il existe deux points fixes stables qualitativement différents. La condition initiale définit si l'on tend vers  $x = 0$  ou vers la branche asymétrique non nulle.
- On peut avoir des sauts et de l'hystérésis.
  - Lorsque l'on change continûment le paramètre de contrôle autour de 0 en venant de  $x^* = 0, r < 0$ , la solution stable saute sur la branche supérieure ou inférieure de façon discontinue. Les sauts peuvent avoir des conséquences catastrophiques dans certaines situations : structures mécaniques (ponts, poutres), population d'insectes dans les cultures (exemple en TD), etc.
  - Une analogie est possible avec les transitions de phase du premier ordre, comme les transitions supercritiques sont analogues aux transitions de phase du second ordre.
- L'indice  $s$  de  $r_s$  est pour saddle-node bifurcation, car la bifurcation en ce point est analogue à une bifurcation noeud-col.

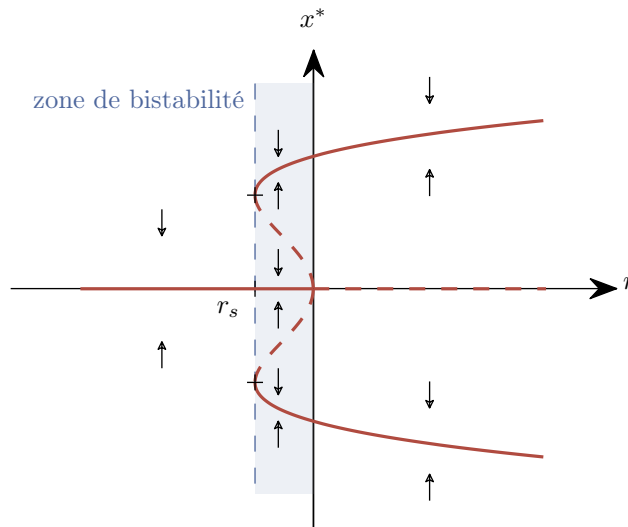


FIGURE 3.22 – Diagramme d’une bifurcation fourche sous-critique avec terme saturant en  $x^5$  :  $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$ .

### 3.5 Classification des bifurcations

Une bifurcation est dite **surcritique (ou supercritique, ou normale)** lorsque les termes non-linéaires (en  $x^2$  ou  $x^3 \dots$ ) ont un effet opposé à celui de l’instabilité engendrée par le terme linéaire d’ordre moins élevé.

**Exemple** : prenons la forme  $\dot{x} = rx - x^3$ . Lorsque  $x \ll 1$ , le terme en  $x^3$  peut être négligé. Néanmoins, la solution  $x(t) = x_0 e^{rt}$  est instable et diverge vers l’infini dès que  $r > 0$ . Mais cette divergence ne se produit pas car très vite le terme non linéaire ne peut être négligé et bloque cette divergence : on parle de terme non linéaire saturant.

Une bifurcation est dite **sous-critique (ou inverse)** lorsque le terme non linéaire le plus bas à un caractère déstabilisant.

TABLE 3.1 – Tableaux récapitulatifs des bifurcations sur-critiques et sous-critiques

Bifurcations sur-critiques

Nom	Noeud-col	Transcritique	Fourche
Diagramme de bifurcation			
Forme normale	$\dot{x} = r - x^2$	$\dot{x} = rx - x^2$	$\dot{x} = rx - x^3$
Points fixes	$x^* = \pm\sqrt{r}$	$x^* = 0$ et $x^* = r$	$x^* = 0$ et $x^* = \pm\sqrt{r}$

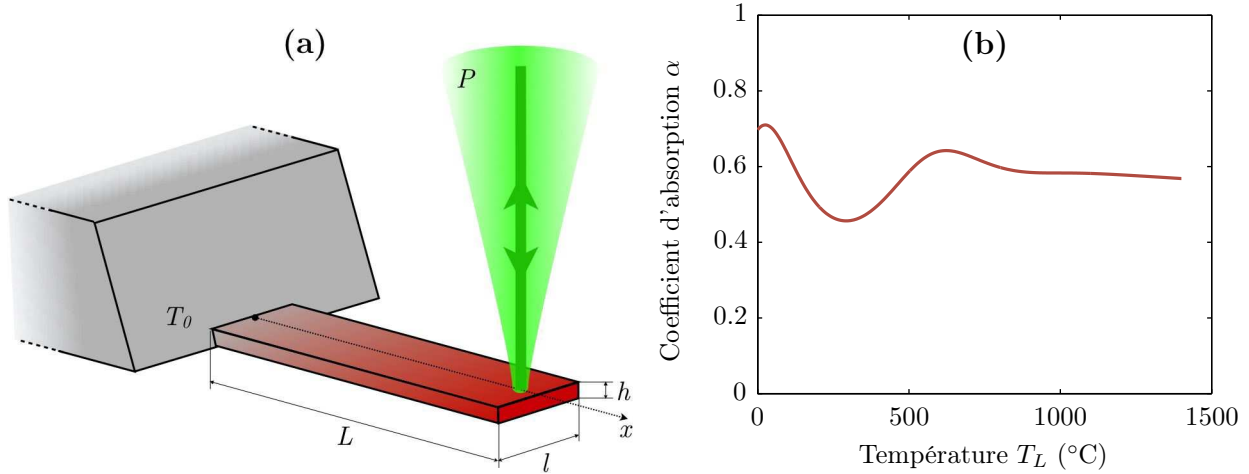
Bifurcations sous-critiques

Nom	Noeud-col	Transcritique	Fourche
Diagramme de bifurcation			
Forme normale	$\dot{x} = r + x^2$	$\dot{x} = rx + x^2$	$\dot{x} = rx + x^3 - x^5$
Points fixes	$x^* = \pm\sqrt{-r}$	$x^* = 0$ et $x^* = -r$	$x^* = 0$ et $r + x^{*2} - x^{*4} = 0$

Les tableaux récapitulatifs 3.1 recensent les bifurcations standards. Dans ces tableaux, le caractère sous-critique ou supercritique des bifurcations noeud-col et transcritique n'a de sens que pour  $x > 0$  : si  $x$  peut prendre des valeurs positives et négatives, alors le caractère saturant du terme en  $x^2$  dépend du signe de  $x$ .

### 3.6 Température d'un micro-levier en silicium

Pour conclure ces deux premiers chapitres sur les systèmes dynamiques à une dimension et leurs bifurcations, étudions un exemple tiré de la recherche actuelle : les expériences réalisées par L. Bellon au LPENSL en Janvier 2016 ! On utilise un laser pour chauffer un micro-levier en silicium à son extrémité, comme illustré sur la figure 3.23(a) : une fraction  $\alpha$  de la puissance lumineuse incidente  $P$  est absorbée par le silicium qui n'est que partiellement transparent. Le problème est de déterminer la température  $T_L$  à l'extrémité du levier en fonction de  $P$ .



**FIGURE 3.23** – (a) Un micro-levier en silicium est chauffé à son extrémité ( $x = L$ ) à l'aide d'un faisceau laser de puissance  $P$ . Sa base  $x = 0$  est à la température ambiante  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ . Les dimensions du levier sont : longueur  $L = 500\ \mu\text{m}$ , largeur  $l = 100\ \mu\text{m}$ , épaisseur  $h = 0.9\ \mu\text{m}$ . (b) Coefficient d'absorption de la cavité Fabry-Perot formé par les deux faces du micro-levier en silicium en fonction de la température  $T_L$  du point de focalisation du laser.

#### 3.6.1 Absorption

Le micro-levier constitue une cavité Fabry-Perot avec absorption : le silicium est partiellement transparent, et ses deux faces sont partiellement réfléchissantes. Au point focal du laser de longueur d'onde  $\lambda = 532\ \text{nm}$ , le faisceau peut être considéré comme une onde plane sur l'épaisseur de la cavité ( $h = 0.9\ \mu\text{m} \sim \lambda$ ). Ses réflexions successives interfèrent selon le déphasage  $\Delta\varphi = 4\pi n_{\text{Si}} h / \lambda$  correspondant à un aller-retour. Les variations de la partie réelle de l'indice optique  $n_{\text{Si}}$  se traduisent en une modulation de l'intensité lumineuse dans l'épaisseur du micro-levier, quand sa partie imaginaire permet de calculer le coefficient d'absorption  $\alpha$  associé. L'indice optique dépendant de la température, le coefficient d'absorption est une fonction oscillante de la température  $T_L$  au point de focalisation, comme illustré sur la figure 3.23(b).

#### 3.6.2 Conduction thermique et profil de température

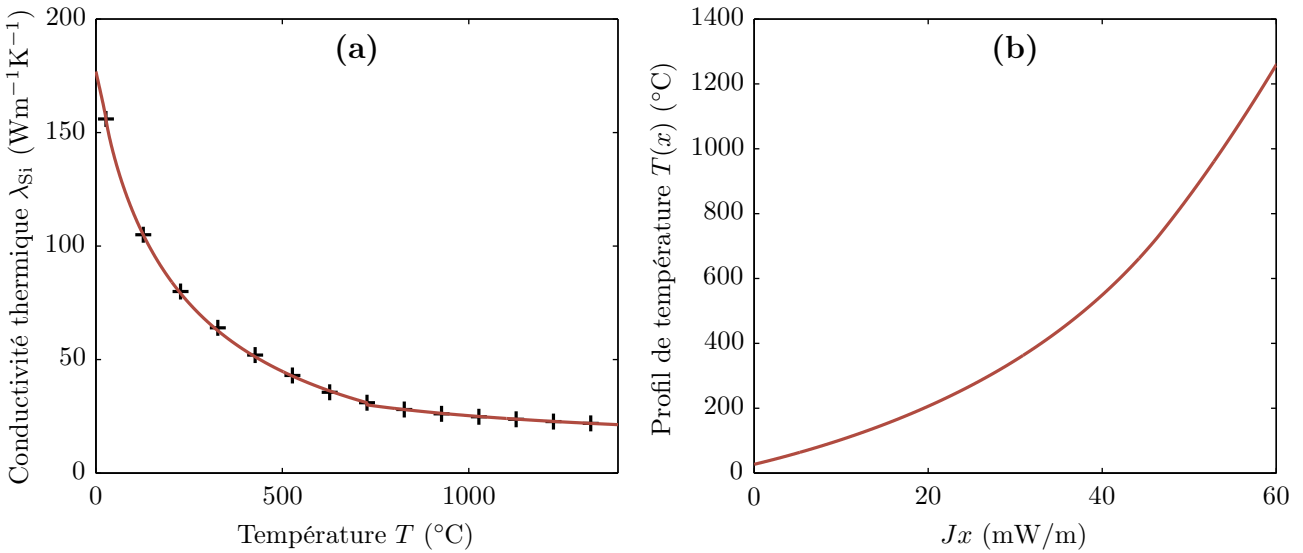
Ce levier est placé sous vide, en régime stationnaire la chaleur est alors majoritairement évacuée par conduction thermique le long du levier (les pertes radiatives peuvent être négligées). Il s'établit alors un profil de température  $T(x)$ , qui se déduit de la loi de Fourier :

$$J = \lambda_{\text{Si}}(T) \frac{dT}{dx} \quad (3.29)$$

où  $\lambda_{Si}(T)$  est la conductivité thermique du silicium et  $J$  est la valeur absolue du flux de chaleur (en  $W/m^2$ ), constante le long du levier. Si  $\lambda_{Si}$  est indépendant de  $T$ , alors on obtient trivialement un profil linéaire de température. Toutefois, dès que la température change de quelques dizaines de degrés, la conductivité thermique change notablement (figure 3.24(a)), et le profil de température est non linéaire. Ce profil se déduit de l'analyse du système dynamique à une dimension

$$\frac{dT}{dx} = \frac{J}{\lambda_{Si}(T)} \quad (3.30)$$

où la variable continue est cette fois non plus le temps mais l'espace. L'évolution dans l'espace est nécessairement monotone, et le système ne présente pas de point fixe :  $T'(x) > 0$ .  $\lambda_{Si}(T)$  étant une fonction décroissante de la température, on déduit que le profil de température devient de plus en plus raide lorsque le flux de chaleur augmente et que l'on s'approche de l'extrémité du levier. Notons que l'espace exploré ici est fini : la variable  $x$  ne prend des valeurs qu'entre 0 et  $L$ , la longueur du levier. La notion de divergence à temps long du système dynamique n'a plus le sens habituel de système instable...



**FIGURE 3.24** – (a) Conductivité thermique du silicium en fonction de la température. (b) Profil de température dans le levier : ce profil non linéaire ne dépend que du produit position  $x$  fois flux de chaleur  $J$ .

Pour obtenir une forme explicite du profil de température, on peut utiliser la technique de séparation des variables : la loi de Fourier s'intègre en

$$\Lambda(T) = \int_{T_0}^T \lambda_{Si}(T') dT' = \int_0^x J dx' = Jx \quad (3.31)$$

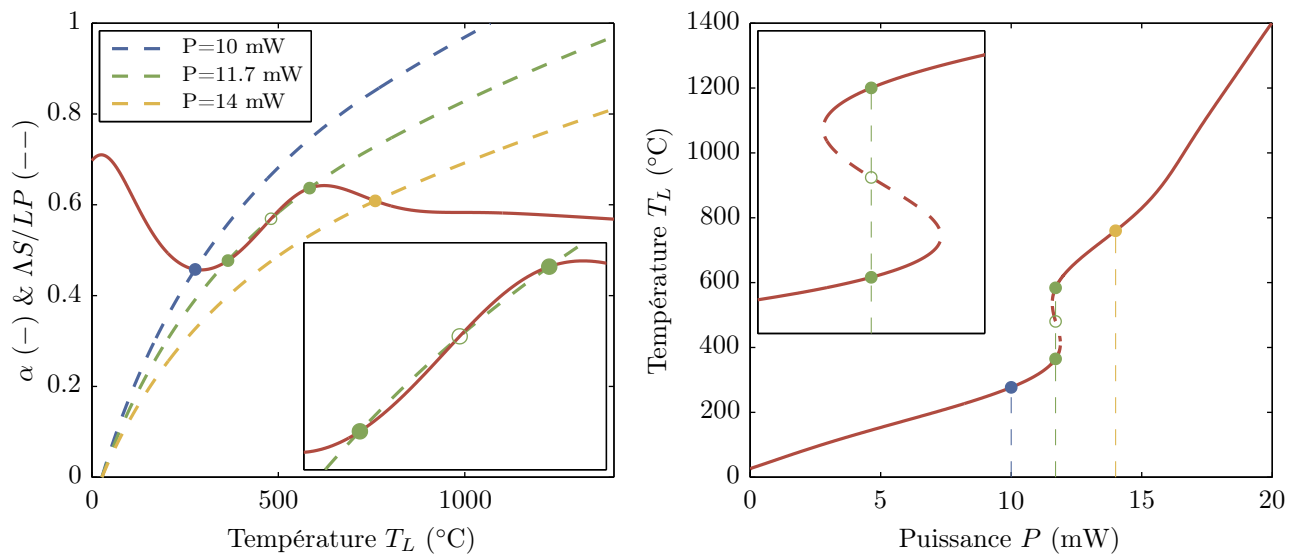
avec  $\Lambda(T)$  la primitive de la conductivité thermique qui s'annule en  $T_0$ , la température de l'encastrement. Il suffit de prendre la réciproque de cette fonction pour en déduire le champ de température  $T(x) = \Lambda^{-1}(Jx)$ . On en déduit ainsi le profil non linéaire de la figure 3.24(b). La température à l'extrémité du levier sera simplement  $T_L = \Lambda^{-1}(JL)$  : la valeur de  $J$  détermine la portion de cette courbe qui est explorée.

### 3.6.3 Variation de la température avec la puissance

Au final, la température  $T_L$  dépend de la puissance absorbée, qui dépend elle-même de  $T_L$ ... Pour décrire le système physique complet, on doit a priori écrire une équation de diffusion de la chaleur (PDE, 2 variables continues) avec des conditions aux limites complexes. Simplifions le problème en supposant que le profil de température stationnaire s'établit instantanément le long du levier, et que l'équation 3.31 évaluée en  $x = L$  décrit fidèlement la relation entre le flux de chaleur  $J$  et la température à l'extrémité du levier  $T_L$ . On écrit alors un bilan de puissance de la forme

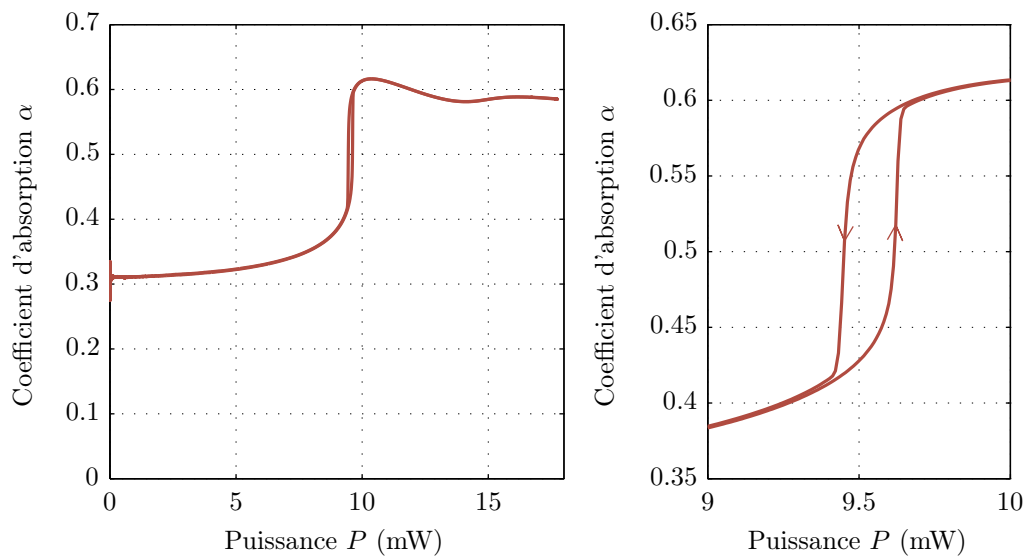
$$C \frac{dT_L}{dt} = \alpha(T_L)P - JS = \alpha(T_L)P - \Lambda(T_L) \frac{S}{L} \quad (3.32)$$

où  $C$  est une capacité calorifique (par exemple d'un objet massif qui serait localisé à l'extrémité du micro-levier), et  $S$  est la section du levier. Pour étudier les points fixes de ce système dynamique, on utilise une résolution graphique et comparant les courbes  $\alpha(T_L)$  et  $\Lambda(T_L)S/LP$  pour différentes valeurs de  $P$  (figure 3.25). Pour de faibles ou de fortes intensités lumineuses, il n'existe qu'un seul point fixe stable. Pour des intensités lumineuses intermédiaires, il existe trois points fixes (deux stables, un instable). La courbe de  $T_L$  en fonction de  $P$  est ainsi multivaluée, avec la coexistence de deux branches stables et d'une branche instable pour une gamme de puissance. Il existe une bande de température interdite dans ce système, entre 410 °C et 530 °C. La transition d'une branche stable à l'autre est une bifurcation de type noeud-col. Ces bifurcations sont observées expérimentalement, ainsi qu'illustré sur la figure 3.26 par le tracé du coefficient d'absorption  $\alpha$  en fonction de la puissance incidente  $P$ .



**FIGURE 3.25** – Résolution graphique du système dynamique de l'équation 3.32 : selon la valeur de la puissance, on trouve 1 à 3 points fixes. La température  $T_L$  présente un hystérésis lorsque la puissance  $P$  varie, et ne peut explorer la branche instable. Les sauts d'une branche stable à l'autre correspondent à des bifurcations noeud-col. Les encarts de chaque figure sont des zooms sur la partie caractéristique de l'hystérésis.





**FIGURE 3.26** – Données expérimentales : coefficient d'absorption  $\alpha$  de la lumière focalisée sur le micro-levier en fonction de la puissance incidente. Proche de 9.5 mW, un saut brutal d'absorption est visible,  $\alpha$  changeant d'un facteur 2 alors que la puissance n'augmente que de 0.1 mW. Le zoom sur la courbe dans le graphe de gauche met en évidence l'hystérésis du processus.



## Chapitre 4

# Après la ligne, le cercle : oscillations

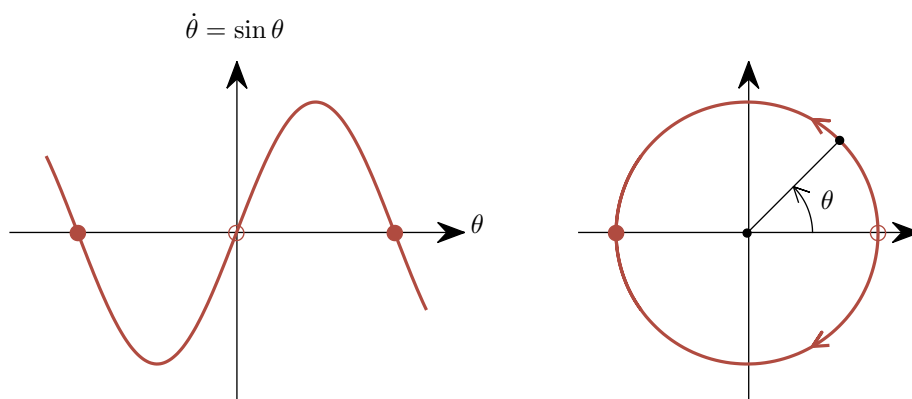
Nous avons étudié jusqu'ici  $\dot{x} = f(x)$  où  $x$  est une variable sur une ligne :  $x \in \mathbb{R}$ . Dans ce chapitre nous considérons  $\dot{\theta} = f(\theta)$  où  $\theta$  est une variable sur un cercle : typiquement  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Nous sommes toujours en présence d'un système du premier ordre, mais il existe une grande différence : en allant toujours dans le même sens, le système peut revenir à son point de départ. **Les solutions périodiques** pourront donc exister pour la première fois dans ce cours.

Nous allons étudier plusieurs applications, nous découvrirons par exemple que la synchronisation des éclairs des lucioles a été décrite avec la même équation que l'effet Josephson même si les fréquences diffèrent de 10 ordres de grandeurs !

### 4.1 Exemple et définition

**Exemple :**  $\dot{\theta} = \sin \theta$  .

Cet exemple correspond au pendule sur-amorti, il a été étudié dans le premier chapitre sous la forme  $\dot{x} = \sin x$ , mais en représentant  $\theta$  sur une ligne. Il est plus naturel de représenter  $\theta$  comme la coordonnée polaire d'un point sur le cercle (figure 4.1). L'espace des phase est maintenant un cercle sur lequel on reporte les points fixes et la direction du flot. Les axes n'ont plus de signification particulière dans cette représentation !



**FIGURE 4.1** – Portrait de phase de l'équation du pendule sur-amorti :  $\dot{\theta} = \sin \theta$ . Les points fixes sont  $\theta^* = 0$  (instable) et  $\theta^* = \pi$  (stable).

**Définition** Un champ de vecteur sur un cercle est une loi qui assigne une vitesse unique à tout point sur un cercle.

Cette définition implique que  $f$  soit  $2\pi$  périodique :  $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ . C'est le cas de l'exemple étudié ci-dessus avec le sinus.

À titre de **contre-exemple**,  $\dot{\theta} = \theta$  n'est pas un flot sur un cercle :  $\theta = 0$  et  $\theta = 2\pi$  sont les mêmes points sur le cercle mais n'ont pas la même vitesse.

Par un changement de variable, tout système dynamique 1D où la variable évolue sur un espace des phases fermé sur lui-même implique que  $f$  est une fonction périodique, et peut être étudié comme un flot sur un cercle.

### 4.2 Oscillateurs

Le prototype d'équation pour un oscillateur à 1D est

$$\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta \tag{4.1}$$

où  $\omega, a > 0$ . Cet exemple apparaît en

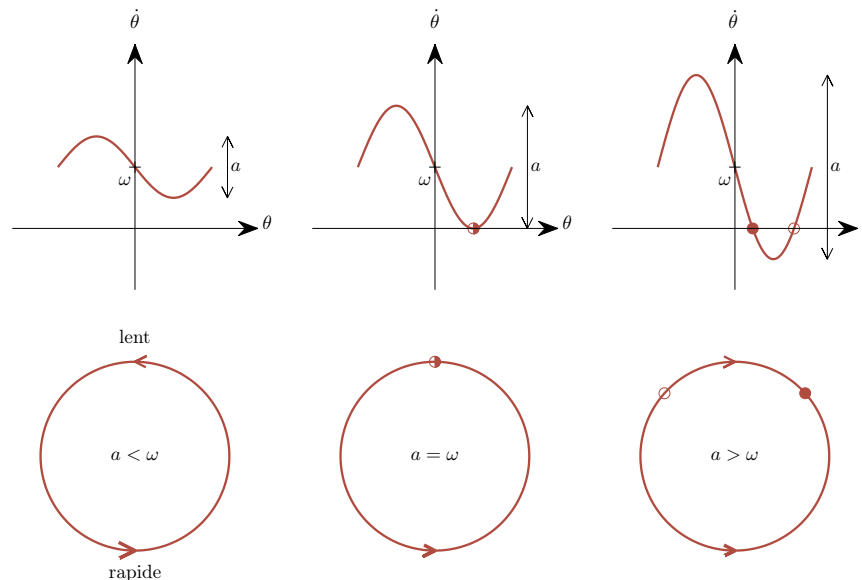
- Mécanique : pendule sur-amorti entraîné par un moment constant
- Physique : jonction Josephson, ondes de densité de charges
- Biologie : neurones oscillants, cycle humain réveil/endormissement

Si  $a = 0$ , l'équation décrit un oscillateur uniforme :  $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ . Le mouvement est uniforme et périodique de période  $T = 2\pi/\omega$ .

$a$  est donc le paramètre qui **introduit la non uniformité** :

- le mouvement est plus rapide en  $-\pi/2$ , et moins rapide en  $\pi/2$ .
- la non uniformité est d'autant plus importante que  $a$  est grand.

La figure 4.2 ci-dessous montre l'évolution du système dynamique avec la valeur de  $a$ .



**FIGURE 4.2** – Le système dynamique  $\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta$  présente une **bifurcation nœud-col** en  $a = \omega$ . En  $a = \omega$ , notez que le point hémistable change de stabilité entre le dessin du haut et celui du bas. **IL FAUT CORRIGER LE dessin du HAUT au centre.**

**Période d'oscillation** Pour  $a < \omega$ ,

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta \tag{4.2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - a \sin \theta} \tag{4.3}$$

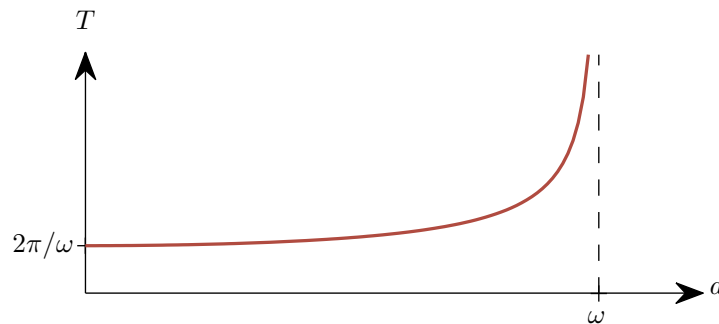
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}} \tag{4.4}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega + a)(\omega - a)}} \tag{4.5}$$

$$\sim \pi \sqrt{\frac{2}{\omega}} (\omega - a)^{-1/2} \quad \text{quand } a \rightarrow \omega^- \tag{4.6}$$

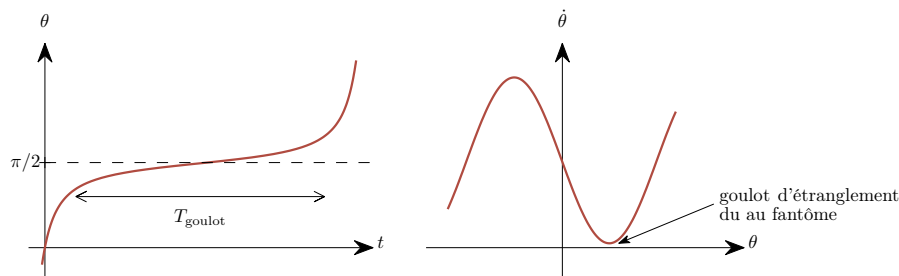
La figure 4.3 reporte le comportement de la période d'oscillation en fonction de l'amplitude  $a$ .

La divergence en  $1/\sqrt{\omega - a}$  est une propriété caractéristique des bifurcations noeud-col.



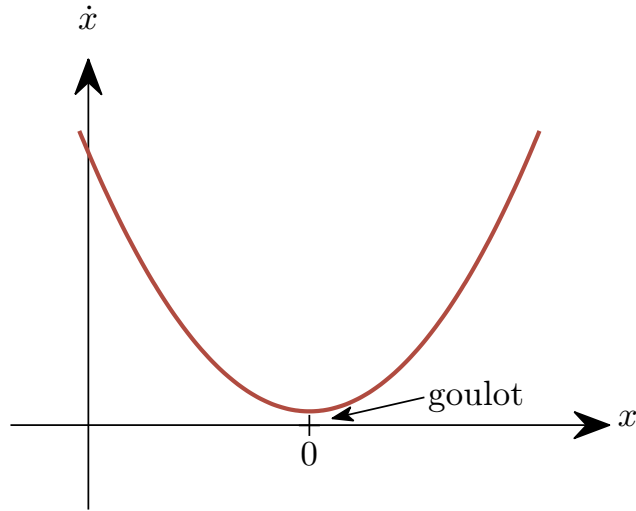
**FIGURE 4.3** – Période d'oscillation  $T$  du système dynamique  $\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta$  en fonction du paramètre  $a$ .

**Fantôme d'une bifurcation** Ce comportement de divergence en racine de l'écart au seuil est une propriété caractéristique des bifurcations noeud-col. C'est en fait une trace (un fantôme) de la bifurcation : lorsque  $a$  décroît et passe par  $\omega$ , les deux points fixes entrent en collision et disparaissent, mais pourtant leur influence est encore manifeste lorsque  $a \lesssim \omega$ . Il existe un "goulot d'étranglement" autour de  $\theta = \pi/2$ , avec une vitesse quasi nulle dans son voisinage (illustration figure 4.4)



**FIGURE 4.4** – Lorsque  $a \lesssim \omega$ , le passage par  $\theta = \pi/2$  est très lent. Le passage dans ce "goulot d'étranglement" domine la dynamique temporelle de l'oscillateur : la période  $T$  est en première approximation égale au temps de passage  $T_{\text{goulot}}$  par  $\pi/2$ .

Pour estimer le temps de passage  $T_{\text{goulot}}$  proche du fantôme de la bifurcation, il est simplement utile de connaître  $\dot{\theta}$  dans le voisinage immédiat du minimum de vitesse, on néglige le reste du temps. On se contente donc de manière générique d'une approximation parabolique proche de ce minimum, et on retrouve ainsi la forme normale de la bifurcation noeud-col. En redéfinissant les variables spatiales, on a  $\dot{x} = r + x^2$ , avec  $0 < r \ll 1$ . L'illustration de ce système dynamique figure 4.5 correspond bien à la situation de notre oscillateur proche de  $\pi/2$  sur la figure 4.4.



**FIGURE 4.5** – À proximité d'une bifurcation noeud-col, le temps de passage dans le goulet d'étranglement devient très long et domine la dynamique temporelle : c'est le fantôme de la bifurcation.

Pour calculer  $T_{\text{goulot}}$ , calculons le temps pour que  $x$  aille de  $-\infty$  à  $+\infty$  (ce système dynamique présente une singularité en temps fini) :

$$T_{\text{goulot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{r + x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{r}} \tag{4.7}$$

Le comportement en racine de l'écart au seuil de la période de notre oscillateur est ainsi la signature générique d'une bifurcation noeud-col et de son fantôme.

### 4.3 Exemples d'oscillateurs

#### 4.3.1 Pendule sur-amorti

L'équation du pendule soumis à un couple constant dans le champ de pesanteur (figure 4.6) s'écrit

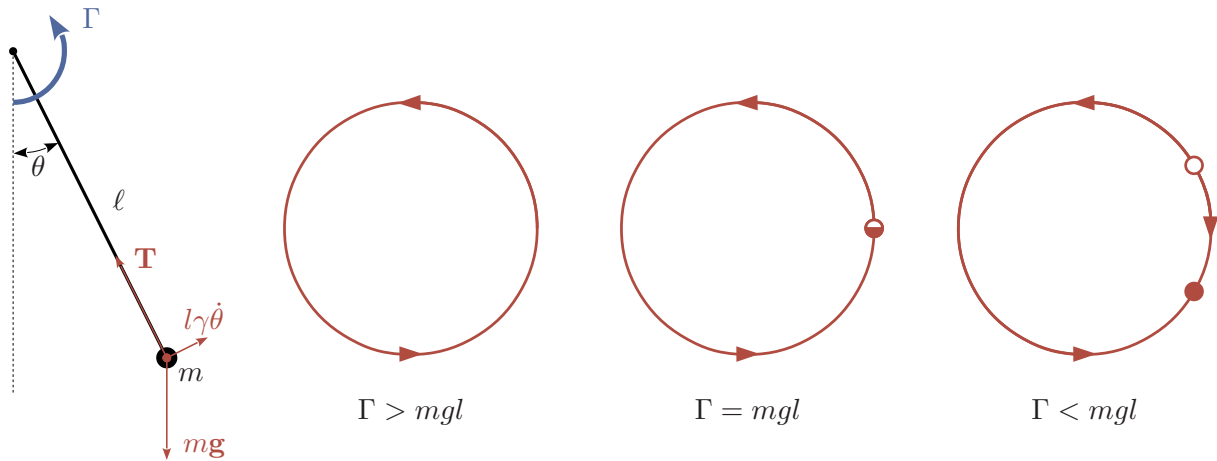
$$m\ell^2\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + mgl \sin \theta = \Gamma \tag{4.8}$$

avec  $\Gamma$  le couple moteur extérieur et  $\gamma\dot{\theta}$  le couple de dissipation visqueuse. On se place dans la limite des grandes viscosités et on néglige ainsi le terme inertiel :  $m\ell^2\ddot{\theta} \ll \gamma\dot{\theta}$ . On obtient alors l'équation générique (4.1) de la partie précédente :

$$\dot{\theta} = \frac{\Gamma}{\gamma} - \frac{mgl}{\gamma} \sin \theta \tag{4.9}$$

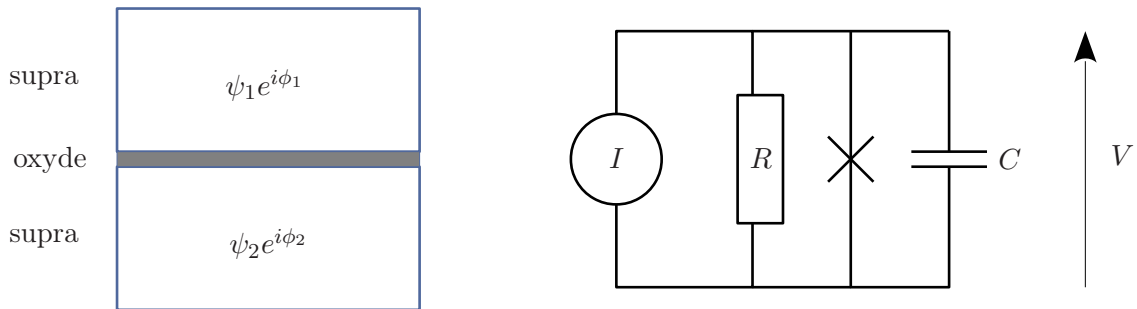
La bifurcation noeud-col entre rotation continue et position statique se fait pour  $\Gamma = mgl$  :

- $\Gamma > mgl$  (c'est-à-dire  $> 1$ ). Le moment ne peut pas être équilibré par la gravité et le pendule tourne continuellement, même si sa vitesse de rotation n'est pas constante. Lorsque  $\Gamma/mgl \rightarrow 1^+$ , il faut de plus en plus de temps pour passer le "point dur" (pendule horizontal).
- $\Gamma = mgl$ . Un point fixe apparaît pour  $\theta = \pi/2$ . Le couple appliqué compense exactement la gravité lorsque le pendule est horizontal.
- $\Gamma < mgl$ . Le point fixe se dédouble et donne deux solutions, une stable (sous l'horizontale) et une instable (au dessus de l'horizontale).



**FIGURE 4.6** – Pendule pesant soumis à un couple constant : un pendule de masse  $m$  et longueur  $l$  est entraîné en rotation par un couple constant  $\Gamma$  dans le champ de pesanteur  $g$ . Dans la limite sur-amortie, le pendule bifurque entre rotation continue et équilibre statique pour  $\Gamma = mgl$ . Attention : dans cette figure,  $\theta$  a tourné de  $\pi/2$  par rapport à la Fig. 4.2.

### 4.3.2 Jonction Josephson



**FIGURE 4.7** – Jonction Josephson et circuit électrique équivalent

Une jonction Josephson est une interface de séparation entre deux matériaux supraconducteurs (une couche d'oxyde, un isolant ou un métal non supraconducteur par exemple, de quelques Å d'épaisseur). Dans chaque supraconducteur ( $n = 1, 2$ ), les paires de Cooper sont décrites par une fonction d'onde  $\psi_n e^{i\phi_n}$ . En mécanique quantique [cf. Feynmann par exemple], on peut montrer que le courant  $I$  qui traverse la jonction Josephson par effet tunnel des paires de Cooper vaut

$$I = I_c \sin \phi \tag{4.10}$$

avec  $\phi = \phi_1 - \phi_2$  la différence de phase entre les deux électrodes supraconductrices. D'autre part, la dérivée temporelle de  $\phi$  est donnée par

$$V = \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi} \quad (4.11)$$

avec  $V$  la tension aux bornes de la jonction,  $\hbar$  la constante de Planck réduite,  $e$  la charge de l'électron. Le schéma électrique équivalent de cette jonction pilotée en courant est reporté figure 4.7. L'analyse du circuit conduit à l'équation :

$$C\dot{V} + \frac{V}{R} + I_c \sin \phi = I \quad (4.12)$$

$$\frac{\hbar}{2e} C\ddot{\phi} + \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{R} \dot{\phi} + I_c \sin \phi = I \quad (4.13)$$

Introduisons le temps caractéristique de relaxation

$$\tau = \frac{\hbar}{2eI_c R} \quad (4.14)$$

L'équation (4.12) se réécrit sous la forme

$$\beta\tau^2\ddot{\phi} + \tau\dot{\phi} + \sin \phi = \frac{I}{I_c} \quad (4.15)$$

avec  $\beta = RC/\tau$ .

Les ordres de grandeur sont les suivants :

$$I_c \sim 1 \mu\text{A} \text{ à } 1 \text{ mA} \quad (4.16)$$

$$RI_c \sim 1 \text{ mV} \quad (4.17)$$

$$\tau \sim 10^{-11} \text{ s} \quad (4.18)$$

$$\beta \sim 10^{-6} \text{ à } 10^6 \quad (4.19)$$

La limite sur-amortie ( $\beta \ll 1$ ) n'est donc pas générique, mais elle se rencontre dans des situations courantes. Dans cette limite, on retrouve alors l'équation (4.1) de l'oscillateur à 1D, la même que celle décrivant le comportement des lucioles, mais avec des temps caractéristiques inférieurs de 10 ordres de grandeurs! On obtient alors la caractéristique ( $I, \langle V \rangle$ ) de la figure 4.8.

**Exercice** Montrer que dans la limite  $\beta \ll 1$ , la caractéristique courant-tension moyenne ( $I, \langle V \rangle$ ) est décrite par l'équation :

$$\langle V \rangle = R\sqrt{(I - I_c)(I + I_c)} \quad (4.20)$$

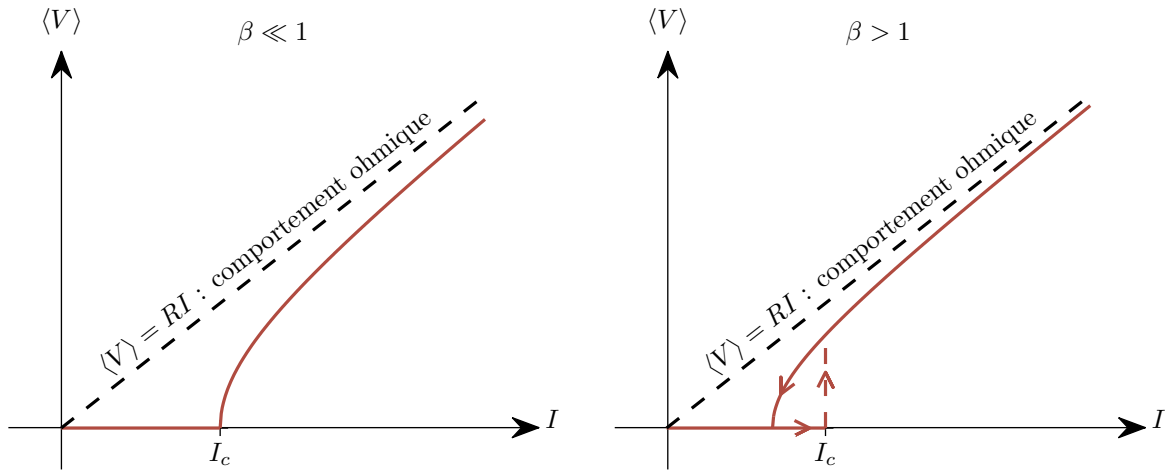
*Solution :*

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\phi} dt \quad (4.21)$$

$$= \frac{\hbar}{2e} \frac{2\pi}{T} \quad (4.22)$$

où  $T$  est la période d'oscillation. En utilisant l'expression exacte de la période (4.5) ( $T = 2\pi/\sqrt{(\omega + a)(\omega - a)}$ ), on trouve la forme proposée pour la tension moyenne.





**FIGURE 4.8** – Caractéristique courant-tension d’une jonction Josephson. Si la partie inertielle ne peut pas être négligée, on voit apparaître un hystérésis.

### 4.3.3 Lucioles

Certaines espèces de lucioles offrent un spectacle de synchronisation naturel très spectaculaire : la nuit venue, les mâles posés dans des arbres envoient des flashes lumineux périodiques synchronisés entre eux, et les femelles qui volent alentour choisissent leur male à la lumière de son stroboscope... Une vidéo du phénomène en pleine nature : <https://www.youtube.com/watch?v=ZGvtnE1Wy6U>.

Il n’existe pas de chef d’orchestre de cette synchronisation : c’est l’interaction des insectes entre eux qui engendre le comportement collectif. Pour modéliser la dynamique des lucioles, Hanson [1978] soumet un spécimen à des flashes périodiques et observe la réponse de l’insecte : celui-ci a une fréquence naturelle  $\omega$ , mais tente d’ajuster son émission au stimulus. Il accélère s’il est en retard avec la source, et ralentit dans le cas contraire. Un modèle simple qui correspond à ce comportement est :

$$\dot{\phi} = \omega + A \sin(\Phi - \phi) \tag{4.23}$$

où  $\phi$  est une variable du cycle interne de la luciole (qui éclaire par exemple à chaque passage de  $\phi$  par 0), et  $\Phi = \Omega t$  est la phase du stimulus. L’amplitude  $A$  modélise la réactivité de l’insecte pour adapter la fréquence naturelle. L’équation pour le déphasage  $\theta = \Phi - \phi$  s’écrit :

$$\dot{\theta} = \Omega - \omega - A \sin \theta \tag{4.24}$$

On retrouve ainsi l’équation de l’oscillateur non uniforme : si la différence de fréquence (entre le stimulus et la fréquence naturelle de la luciole)  $|\Omega - \omega|$  est inférieure à  $A$ , alors la synchronisation a lieu : il y a accrochage de phase. Dans le cas contraire (faible couplage ou fort désaccord), on observe une dérive de la phase.

Article de départ : Buck & Buck, Scientific American, 234, 74 (1976).

Modèle : Ermentrout & Rinzel J. Math. Biol. 29, 571 (1991).



## Deuxième partie

# Systemes dynamiques du second ordre



# Chapitre 5

## Systemes linéaires en 2 dimensions

Nous étudions dans ce chapitre les systèmes linéaires du second ordre. La compréhension des résultats principaux est primordiale, étant donné qu'on cherchera le plus souvent par la suite à se ramener à des cas linéaires lors de l'étude de systèmes plus complexes.

Les trajectoires vont être beaucoup plus variées dans ce chapitre : elles sont maintenant dans le plan et non sur la ligne.

### 5.1 Définitions et exemples

Un système linéaire à deux dimensions est un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (5.1)$$

qu'on écrit plus généralement

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{Ax} \quad (5.2)$$

#### Remarques

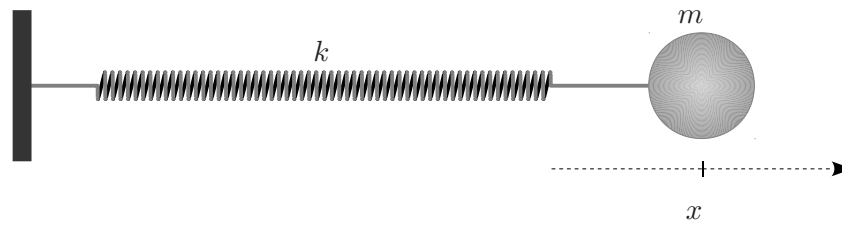
- C'est un système linéaire car si  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  sont solutions, alors  $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2$  aussi, avec  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .
- $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} = (0, 0)$  est toujours un point fixe.
- Les solutions peuvent être visualisées dans l'espace  $(x, y)$  appelé **plan de phase**.

#### 5.1.1 Premier exemple : l'oscillateur harmonique

Considérons une masse  $m$  astreinte à se déplacer horizontalement et reliée à un ressort de raideur  $k$  (figure 5.1). On néglige dans un premier temps les frottements. L'équation d'évolution du système s'écrit

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (5.3)$$

où  $x$  représente l'élongation du ressort par rapport à sa longueur à vide. Comme précédemment, on peut trouver la solution exacte mais parce que c'est un cas particulier soluble. On va donc à nouveau proposer une démarche géométrique adaptable au cas non linéaire.



**FIGURE 5.1** – Un système masse ressort sans frottement est modélisé par un oscillateur harmonique de raideur  $k$ , masse  $m$ , et position  $x$ .

Le système est caractérisé de manière unique par  $x$  et  $\dot{x}$ . On utilise l’astuce classique pour qu’une équation différentielle du second ordre à une dimension se ramène à une équation différentielle du premier ordre à deux dimensions en posant  $y = \dot{x}$ , on obtient alors

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases} \tag{5.4}$$

où  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  est la pulsation propre de l’oscillateur. Le système

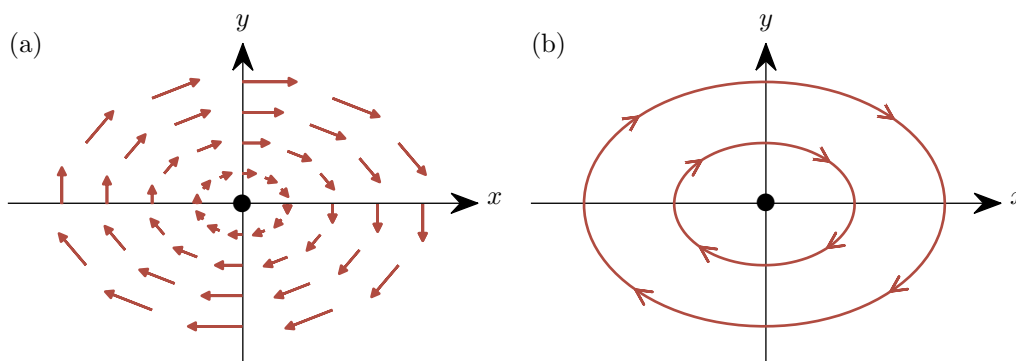
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{5.5}$$

est représenté par un champ de vecteur du plan de phase : les vecteurs représentent  $\dot{\mathbf{x}}$  au point  $\mathbf{x}$ , comme illustré sur la figure 5.2(a).

Sur l’axe vertical ( $x = 0$ ),  $\dot{\mathbf{x}}$  est horizontal et d’autant plus grand que  $y$  est grand.

Sur l’axe horizontal ( $y = 0$ ),  $\dot{\mathbf{x}}$  est vertical et d’autant plus grand que  $x$  est grand.

L’écoulement tourne autour du point fixe, l’origine, à la pulsation  $\omega_0$ . Les trajectoires sont des orbites fermées, et on représente le système dynamique à l’aide de son portrait de phase sur la figure 5.2(b).



**FIGURE 5.2** – Plan de phase de l’oscillateur harmonique : on représente le système dynamique par son champ de vecteur (à gauche), ou par son portrait de phase (à droite), où l’on reporte les trajectoires. Ce sont ici des ellipses.

De manière générique, les **points fixes** du système dynamique correspondent aux points d’équilibre du problème mécanique, tandis que les **orbites fermées** correspondent aux mouvements périodiques (oscillations de la masse) du problème mécanique. Les orbites sont ici des ellipses.

### 5.1.2 Second exemple : deux ODE découplées

Considérons le système dynamique à deux dimensions décrit par

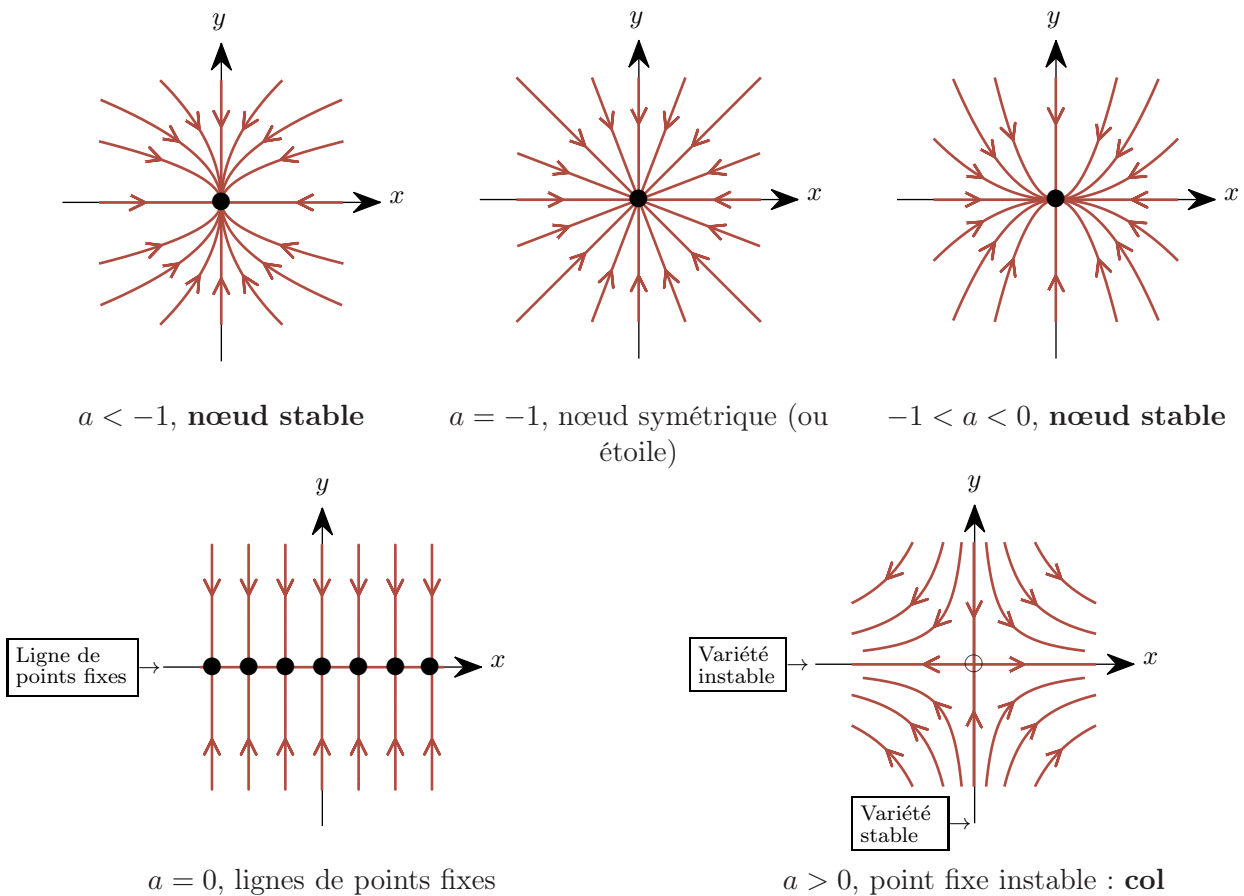
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{5.6}$$

La matrice étant diagonale, les deux équations différentielles sont découplées. Le système se résout alors très facilement :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax & \implies x(t) = x_0 e^{at} \\ \dot{y} = -y & \implies y(t) = y_0 e^{-t} \end{cases} \tag{5.7}$$

On obtient ainsi une (dé)croissance exponentielle des variables dynamiques.

Il existe cinq possibilités de portrait de phase en fonction de la valeur de  $a$ , illustrées sur la figure 5.3. Pour les cas  $a < -1$  et  $-1 < a < 0$ , la trajectoire est tangente à la direction la plus lente, c'est à dire celle qui décroît le plus rapidement.



**FIGURE 5.3** – Portrait de phase de 2 ODE découplées :  $\dot{x} = ax$  et  $\dot{y} = -y$ . Le système dynamique est stable pour  $a < 0$  (noeuds stables, symétrique pour  $a = -1$ ) et instable pour  $a > 0$  (point col).

### 5.1.3 Définitions et vocabulaire

**Variété** On définit les variétés d'un point col  $\mathbf{x}^*$  par

- **Variété stable** : l'ensemble des conditions initiales telles que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$
- **Variété instable** : l'ensemble des conditions initiales telles que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x^*$

Dans l'exemple de la figure 5.3, on a un point col pour  $a > 0$ , l'axe des  $x$  est la variété instable de l'origine, et l'axe des  $y$  sa variété stable.

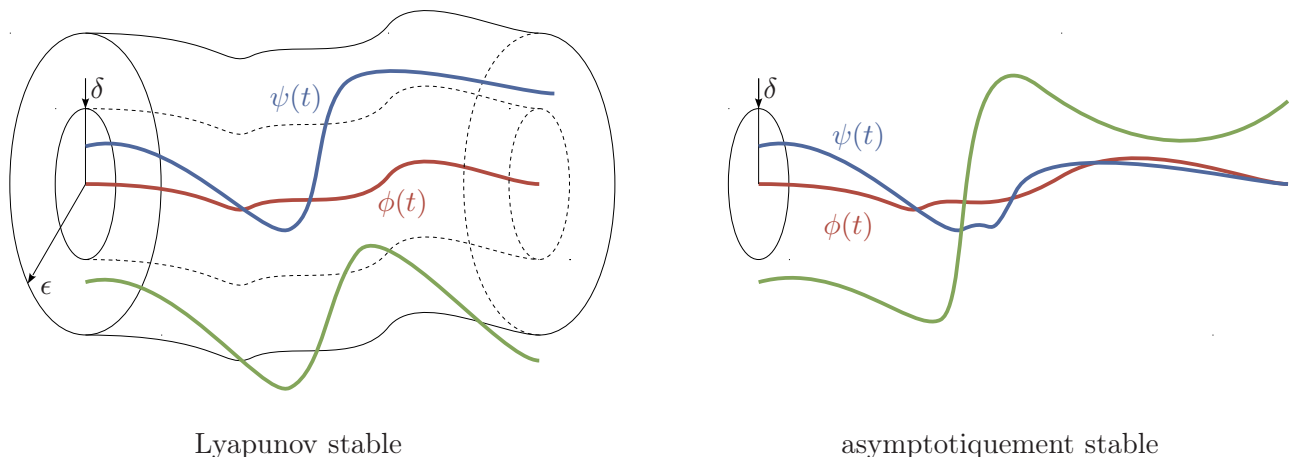
Une trajectoire typique s'approche de manière asymptotique de la variété *instable* lorsque  $t \rightarrow +\infty$  et *stable* lorsque  $t \rightarrow -\infty$ . Cela semble être le contraire mais c'est bien cela !

**Poins fixes** Quelques propriétés des points fixes stables : dans l'exemple de la figure 5.3, pour

- $a < 0$ , on dit que l'origine est un nœud **attractif**, et ici même **globalement attractif**, toutes les trajectoires  $y$  étant attirées ;
- $a = 0$ , on dit que le nœud est **neutralement stable** : les trajectoires ne sont ni attirées, ni repoussées. L'**oscillateur harmonique** est un autre exemple de nœud neutralement stable.
- $a \leq 0$ , on dit que le nœud est **Lyapunov<sup>1</sup> stable**, car toutes les trajectoires qui démarrent suffisamment près de  $\mathbf{x}^*$  ne s'éloignent pas de  $\mathbf{x}^*$ .

**Définition :** Soit  $\phi(t)$  une solution de  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ . Cette solution est dit stable au sens de Lyapunov ou **Lyapunov stable** si pour tout  $\epsilon > 0$  donné, on peut trouver  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tel que pour toute solution  $\psi(t)$ , si  $|\phi(t_0) - \psi(t_0)| < \delta$  on aura  $|\phi(t) - \psi(t)| < \epsilon$  pour tout  $t \in [t_0, +\infty[$ .

**Définition :** Soit  $\phi(t)$  une solution de  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ .  $\phi(t)$  est dit **asymptotiquement stable** s'il est Lyapunov stable et qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour toute solution  $\psi(t)$ , si  $|\phi(t_0) - \psi(t_0)| < \delta$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\phi(t) - \psi(t)| = 0$ .



**FIGURE 5.4** – Une trajectoire Lyapunov stable garde ses voisines dans son voisinage à temps long, et une trajectoire asymptotiquement stable se confond avec ses voisines à temps long. La trajectoire verte est initialement trop éloignée de la rouge et donc s'en éloigne.

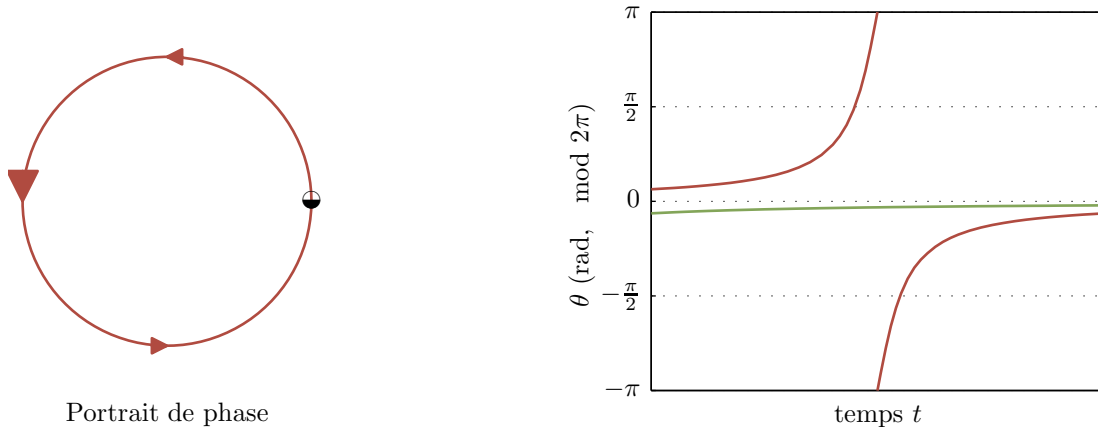
Le cas  $a = 0$  de notre exemple et l'oscillateur harmonique, montrent que le système peut être Lyapunov stable sans être attractif.

---

1. Alexandre Mikhailovitch Liapounov – généralement orthographié Lyapunov – (1857 - 1918) était un mathématicien Russe, dont on rencontrera souvent le nom dans la suite de ce cours.



De la même manière, un point peut être attractif sans être Lyapunov stable. Par exemple, pour  $\dot{\theta} = 1 - \cos \theta$ ,  $\theta^* = 0$  attire toutes les trajectoires quand  $t \rightarrow \infty$ , mais n'est pas Lyapunov stable, ainsi qu'illustré sur la figure 5.5.



**FIGURE 5.5** – *Système dynamique  $\dot{\theta} = 1 - \cos \theta$  : une trajectoire ayant pour condition initiale  $0^+$  passera toujours par  $\pi$  avant de converger vers  $0^-$ , elle s'éloigne donc toujours d'une distance finie d'une trajectoire ayant pour condition initiale  $0^-$ .  $\theta^* = 0$  est donc globalement attractif mais pas Lyapunov stable.*

Il n'y a donc pas de lien de cause à effet entre attractif et Lyapunov stable ; toutefois en pratique c'est souvent le cas : on dit alors que le point est stable.

6h en 2019

## 5.2 Classification des systèmes linéaires

Dans les exemples précédents, deux éléments de la matrice étaient nuls. Nous allons étudier le cas général désormais. L'exemple précédent a montré que les axes des  $x$  et  $y$  jouent un rôle spécial et déterminent le comportement de toutes les trajectoires quand  $t \rightarrow \pm\infty$ . En outre toute trajectoire initiée sur ces axes  $y$  reste pour toujours et croît ou décroît exponentiellement. Dans le cas général pour trouver l'analogie de ces courbes nous allons chercher les trajectoires de la forme

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \tag{5.8}$$

où  $\lambda$  (le taux de croissance) et  $\mathbf{v}$ , a priori complexes, sont à déterminer. En injectant l'équation (5.8) dans l'équation du système dynamique, on obtient

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \tag{5.9}$$

Les droites recherchées existent si  $\mathbf{v}$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $\mathbf{A}$ .

Si  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , les deux valeurs propres  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$  vérifient

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{5.10}$$

ce qui se réécrit

$$\lambda^2 - \tau \lambda + \Delta = 0 \tag{5.11}$$

où

$$\begin{cases} \tau = \text{tr} A = a + d \\ \Delta = \det A = ad - bc \end{cases} \tag{5.12}$$

Par conséquent, les deux solutions  $\lambda_{\pm}$  de l'équation (5.11) vérifient

$$\lambda_{\pm} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad (5.13)$$

Notons ici une caractéristique importante des valeurs propres  $\lambda_{\pm}$  : la trace et le déterminant étant des invariants de similitude, on a :

$$\begin{cases} \tau = \lambda_+ + \lambda_- \\ \Delta = \lambda_+ \lambda_- \end{cases} \quad (5.14)$$

Le discriminant de l'équation (5.11) détermine la nature des valeurs propres : réelles si  $\tau^2 - 4\Delta \geq 0$ , complexes conjuguées dans le cas contraire.

Nous étudions les **différents cas de figure dans les sections** qui suivent, en se limitant aux **valeurs propres non nulles**. Si l'une des valeurs propres est nulle, le système est assimilable à un système unidimensionnel : on obtient alors une droite de points fixes (selon le vecteur propre associé), comme dans le cas de la section 5.1.2 avec  $a = 0$ .

### 5.2.1 Deux valeurs propres réelles : $\tau^2 - 4\Delta > 0$

**Cas typique :** Les deux valeurs propres étant différentes ( $\lambda_+ \neq \lambda_-$ ), alors les deux vecteurs propres  $\mathbf{v}_+$  et  $\mathbf{v}_-$  sont linéairement indépendants et constituent une base de l'espace des phases. Toute condition initiale  $\mathbf{x}_0$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire de  $\mathbf{v}_+$  et  $\mathbf{v}_-$  :  $\mathbf{x}_0 = \alpha_+ \mathbf{v}_+ + \alpha_- \mathbf{v}_-$ , et la solution s'écrit alors

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_+ e^{\lambda_+ t} \mathbf{v}_+ + \alpha_- e^{\lambda_- t} \mathbf{v}_- \quad (5.15)$$

On peut donc, en remontant aux vecteurs propres et en considérant les conditions initiales du problème, en déduire l'expression finale de la solution du système dynamique. Cependant cette démarche est quelque peu fastidieuse et calculatoire. Dans les faits, on peut dessiner l'allure du portrait de phase pour toute condition initiale de manière beaucoup plus rapide.

**Exemple** On considère le système dynamique  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  associé à la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Les coefficients caractéristiques sont donc  $\tau = -1$  et  $\Delta = -6$ . On calcule ainsi les valeurs propres  $\lambda_+ = 2$  et  $\lambda_- = -3$ , associées aux vecteurs propres  $\mathbf{v}_+ = (1, 1)$  et  $\mathbf{v}_- = (4, -1)$ . Si la condition initiale est par exemple  $\mathbf{x}_0 = (-3, 2)$ , on en déduit facilement  $\alpha_+ = 1$  et  $\alpha_- = -1$ , soit

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} - 4e^{-3t} \\ e^{2t} + e^{-3t} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Ces calculs sont longs et inutiles pour dessiner le portrait de phase.

En effet, remarquons simplement que  $\lambda_- < 0 < \lambda_+$  : une direction croît exponentiellement quand l'autre décroît exponentiellement. Cela signifie qu'on a affaire à un col dont les axes sont les vecteurs propres de  $\mathbf{A}$ . La variété stable est donnée par  $\mathbf{v}_-$ , la variété instable par  $\mathbf{v}_+$ . Le portrait de phase est donné par la figure 5.6.

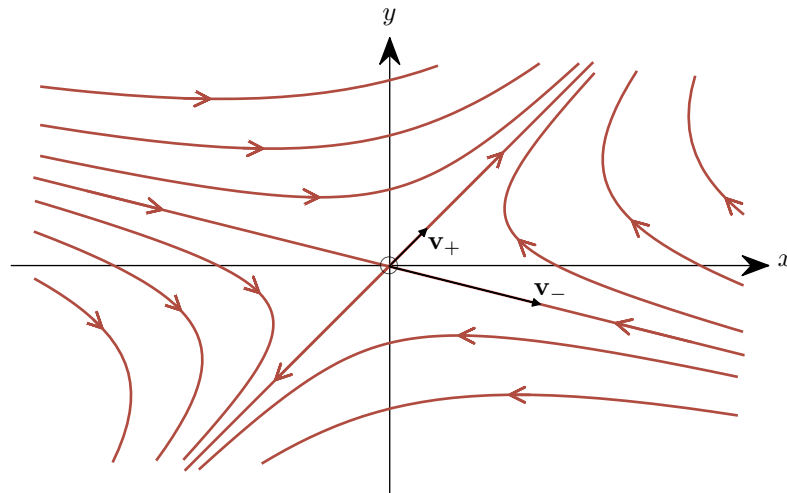


FIGURE 5.6 – Portrait de phase du système dynamique associé à la matrice  $\mathbf{A}$  de l'équation (5.16).

**Portraits de phase génériques** La figure 5.7 présente les 3 portraits de phase possible pour 2 valeurs propres réelles non nulles :  $\lambda_+ \neq \lambda_- \in \mathbb{R}^*$ . On reporte les directions données par les vecteurs propres du système, et la direction du flot sur ces lignes déduite du signe de  $\lambda_{\pm}$ . Le tracé des trajectoires est alors facile.

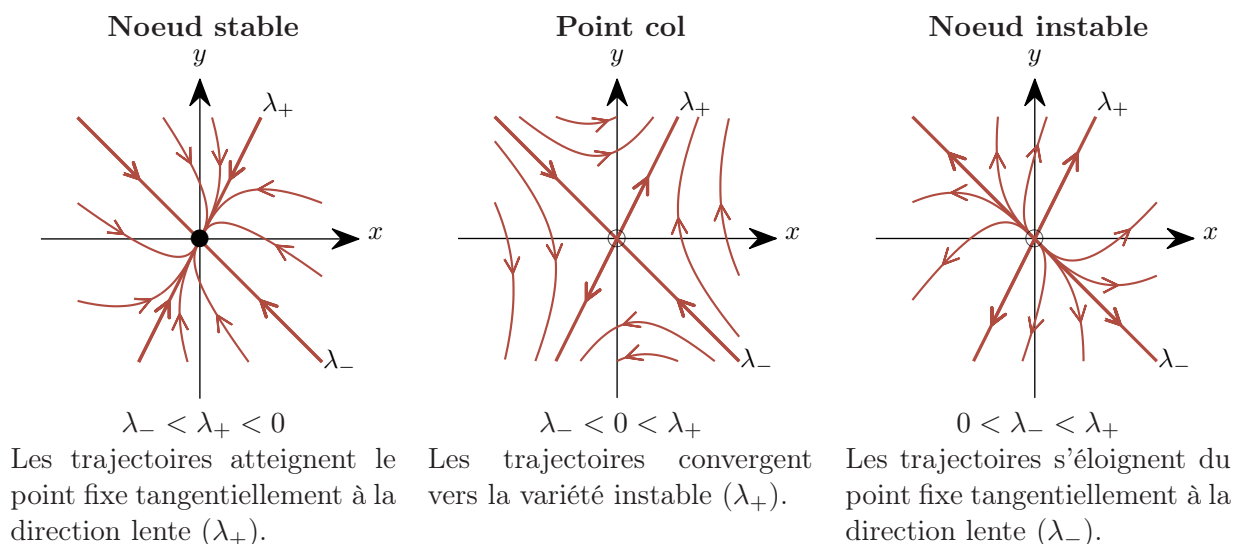


FIGURE 5.7 – Portrait de phase d'un système dynamique associé à deux valeurs propres réelles différentes non nulles.

### 5.2.2 Deux valeurs propres complexes : $\tau^2 - 4\Delta < 0$

On suppose maintenant que les deux valeurs propres sont complexes, elle sont alors conjuguées :  $\lambda_{\pm} = \tau/2 \pm i\omega$ , avec  $\omega = \sqrt{4\Delta - \tau^2} \neq 0$ , donc  $\bar{\lambda}_+ = \lambda_-$ . Simplifions les notations en écrivant  $\lambda_+ = \lambda$  et  $\lambda_- = \bar{\lambda}$ . Les vecteurs propres  $\mathbf{v}_{\pm}$  sont alors également complexes conjugués :  $\mathbf{A}$  est une matrice à coefficients réels, donc

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_+ = \lambda\mathbf{v}_+ \tag{5.18}$$

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{v}}_+ = \mathbf{A}\bar{\mathbf{v}}_+ = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}_+ \tag{5.19}$$

$\bar{\mathbf{v}}_+$  et  $\mathbf{v}_-$  sont donc tous deux vecteurs propres associés à  $\bar{\lambda}$ , on peut ainsi les choisir égaux. On écrira de même  $\mathbf{v}_+ = \mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}_- = \bar{\mathbf{v}}$

Les deux valeurs propres étant différentes, la solution est toujours donnée par  $\mathbf{x}(t) = \alpha_+e^{\lambda t}\mathbf{v}_+ + \alpha_-e^{\lambda_-t}\mathbf{v}_-$ , mais les coefficients  $\alpha_{\pm}$  sont maintenant complexes conjugués :  $\mathbf{x}(t)$  est une solution dans l'espace réel donc

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_+e^{\lambda t}\mathbf{v} + \alpha_-e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{v}} \tag{5.20}$$

$$= \bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\alpha}_+e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{v}} + \bar{\alpha}_-e^{\lambda t}\mathbf{v} \tag{5.21}$$

Ce qui implique que  $\bar{\alpha}_- = \alpha_+$ . On simplifie à nouveau la notation en écrivant  $\alpha_+ = \alpha$  et  $\alpha_- = \bar{\alpha}$ . Explicitons maintenant chaque terme à l'aide de son module et de sa phase :

$$\alpha = \alpha_0e^{i\phi_0}, \quad e^{\lambda t} = e^{(\tau/2)t}e^{i\omega t}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x e^{i\phi_x} \\ v_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

La solution s'écrit donc simplement  $\mathbf{x}(t) = \alpha e^{\lambda t}\mathbf{v} + \bar{\alpha}e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{v}} = 2\text{Re}(\alpha e^{\lambda t}\mathbf{v})$ , soit

$$\begin{cases} x(t) = 2\alpha_0v_x e^{(\tau/2)t} \cos(\omega t + \phi_0 + \phi_x) \\ y(t) = 2\alpha_0v_y e^{(\tau/2)t} \cos(\omega t + \phi_0 + \phi_y) \end{cases} \tag{5.23}$$

$\mathbf{x}(t)$  correspond par conséquent une combinaison linéaire de  $e^{(\tau/2)t} \cos(\omega t)$  et  $e^{(\tau/2)t} \sin(\omega t)$  : on observe des oscillations croissantes ou décroissantes selon le signe de  $\tau$ . La figure 5.8 reporte les trois portraits de phase possibles pour  $(\lambda_+, \lambda_-) \in \mathbb{C}^*$ .

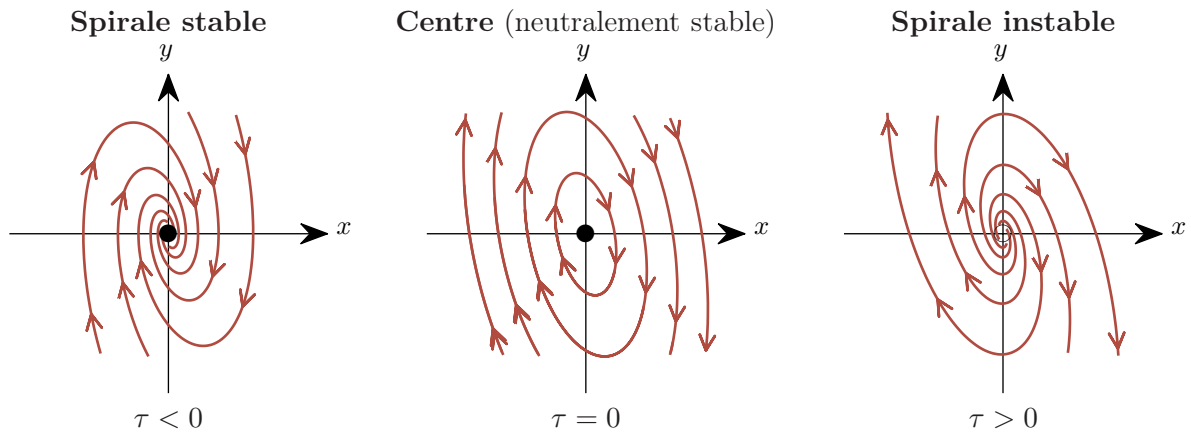


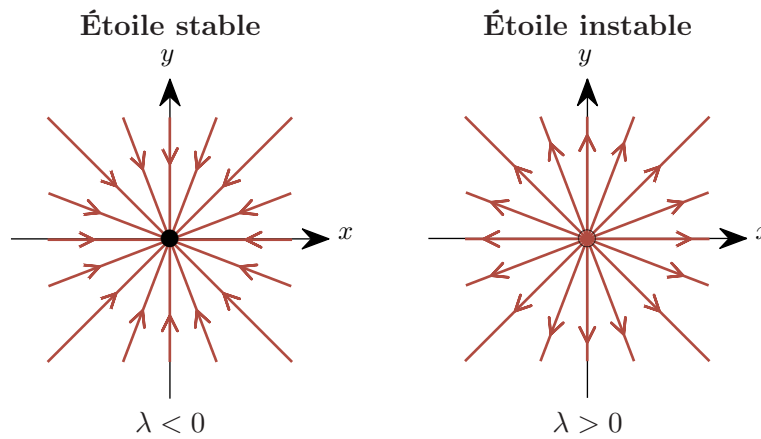
FIGURE 5.8 – Portrait de phase du système dynamique associé à deux valeurs propres complexes  $\lambda_{\pm} = \tau/2 \pm i\omega$ .

**Exemple** L'oscillateur harmonique sans amortissement de la section 5.1.1 correspond à  $\lambda_{\pm} = \pm i\omega_0$ , l'origine est donc un centre d'oscillation. Si on rajoute un terme d'amortissement  $\gamma\dot{x}$ , la matrice du système linéaire s'écrit  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \tau \end{pmatrix}$  avec  $\tau = -\gamma/m < 0$ . Pour les amortissements faibles ( $\tau < 2\omega_0$ ), on obtient alors une spirale stable : des oscillations amorties exponentiellement.

### 5.2.3 Une seule valeur propre : $\tau^2 - 4\Delta = 0$

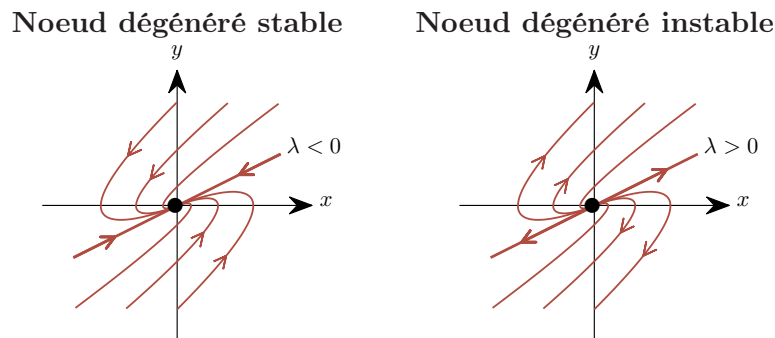
On étudie pour finir le cas d'une unique valeur propre  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Deux situations sont envisageables :

- Il existe deux vecteurs propres distincts  $\mathbf{v}_{\pm}$ , on obtient alors un noeud en étoile : toutes les directions sont équivalentes ( $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}$ ). Le signe de  $\lambda$  détermine la stabilité du noeud. Le portrait de phase est reporté sur la figure 5.9.



**FIGURE 5.9** – Portrait de phase d'un système dynamique associé à deux valeurs propres égales  $\lambda$  lorsqu'il existe deux vecteurs propres distincts.

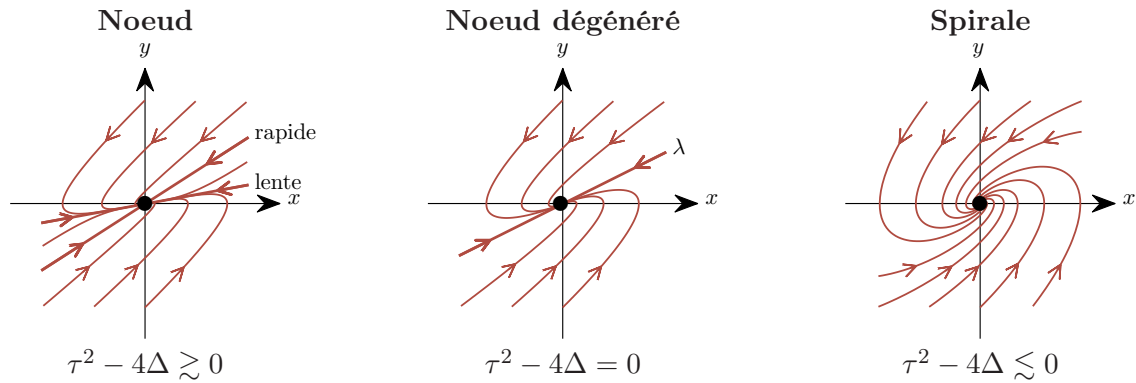
- Il n'existe qu'un seul vecteur propre. Le point fixe est alors un noeud dégénéré, illustré sur la figure 5.10. La matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  avec  $b \neq 0$  est un exemple d'une telle situation.



**FIGURE 5.10** – Portrait de phase d'un système dynamique associé à deux valeurs propres égales  $\lambda$  lorsqu'il existe un seul vecteur propre.

Une bonne façon de voir un noeud dégénéré est de considérer qu'il correspond à une évolution d'un noeud ordinaire qui transiterait vers une spirale, lorsque les deux directions lentes et rapides

fusionnent pour donner le noeud dégénéré (illustration figure 5.11). Un oscillateur harmonique présente cette transition lorsque qu'il passe de résonant amorti à sur-amorti.



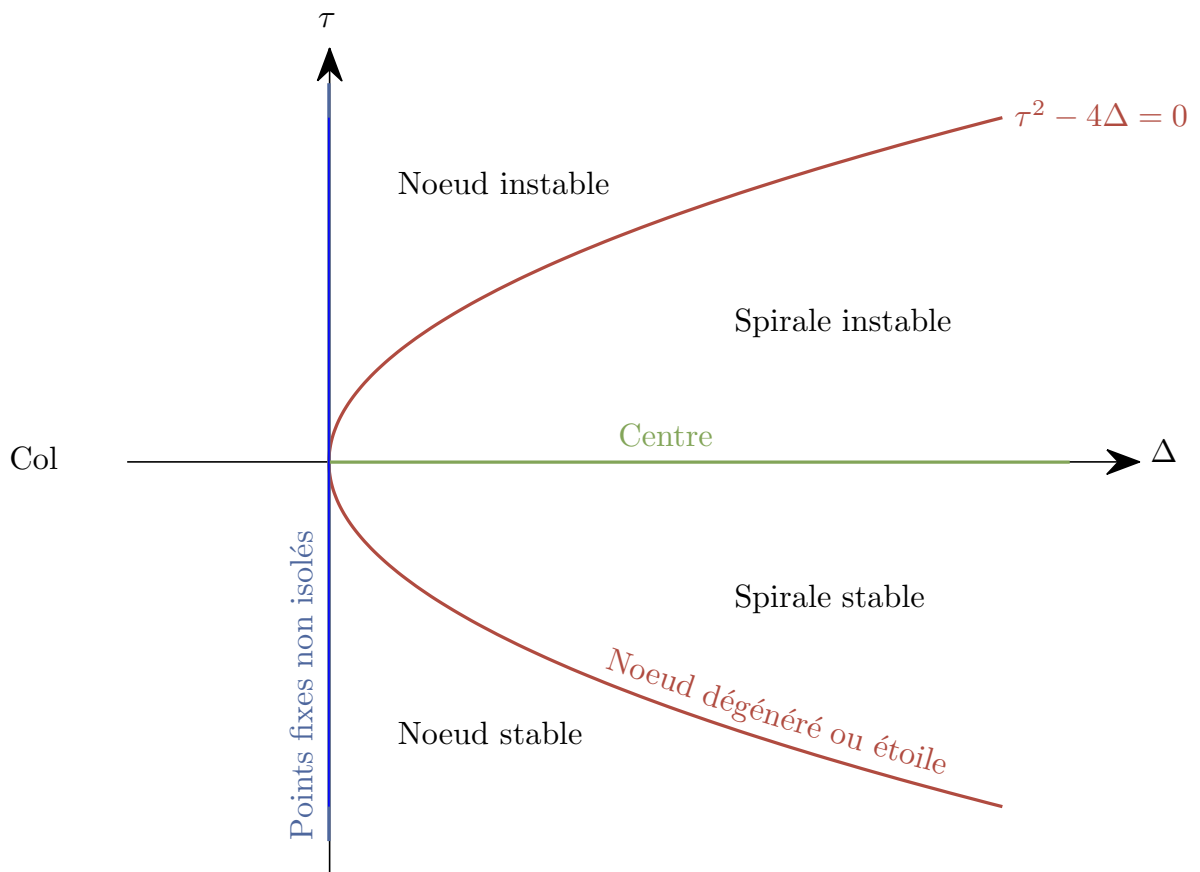
**FIGURE 5.11** – Un noeud dégénéré peut être vu comme la limite d’un noeud ordinaire dont les deux directions lente et rapide fusionnent pour transiter vers une spirale. On a reporté ici le cas stable, il suffit d’inverser la direction du flot pour avoir les portraits de phase du cas instable.

### 5.2.4 Graphe récapitulatif

La figure 5.12 donne une classification des différents comportements autour du point fixe en fonction de la trace  $\tau$  et le déterminant  $\Delta$  de la matrice  $\mathbf{A}$ .

- Si  $\Delta < 0$ , alors  $\tau^2 - 4\Delta > 0$ , il existe deux valeurs propres réelles. Comme  $\Delta = \lambda_+ \lambda_- < 0$ , les signes des valeurs propres sont opposés, donc on a un point col.
- Si  $\Delta > 0$ , il faut distinguer le cas des valeurs propres réelles de celui des complexes.
  - Valeurs propres réelles : le point fixe est un noeud.  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$  sont de même signe ( $\Delta = \lambda_+ \lambda_- > 0$ ), donc du même signe que la trace  $\tau = \lambda_+ + \lambda_-$ . Le signe de  $\tau$  détermine la stabilité.
  - Valeurs propres complexes : le point fixe est une spirale ou un centre. Le signe de  $\tau$  détermine la stabilité.

Noeuds, cols et spirales sont les 3 possibilités les plus rencontrées. Dans les cas limites, les centres sont les plus courants. On les rencontre notamment dans les systèmes mécaniques sans friction.



**FIGURE 5.12** – Classification des systèmes dynamiques linéaires à deux dimensions dans le plan  $(\Delta, \tau)$  ( $\Delta$  déterminant et  $\tau$  trace de la matrice  $\mathbf{A}$  du système dynamique).

### 5.3 Dynamique amoureuse

Après cette étape de classification un peu technique, introduisons un peu de poésie dans cette partie avec un modèle simple d'histoire d'amour... Le décor est le suivant : Roméo aime Juliette, mais Juliette est une amoureuse inconstante. Plus Roméo l'aime, plus celle-ci, lassée, se détache de Roméo. Cependant, lorsque Roméo commence à se désintéresser, fatigué par le peu d'intérêt de Juliette pour lui-même, alors la jeune fille commence à être attirée à nouveau par le bel Italien. Roméo est plus simple(t), son amour fait écho à celui de Juliette ; il s'emballe quand elle l'aime, et se démoralise quand elle le repousse<sup>2</sup>. Comment modéliser une telle relation ? On peut évident inverser les rôles...

**Mise en équation du problème** On notera  $R(t)$  l'amour de Roméo pour Juliette, et  $J(t)$  l'amour de Juliette pour Roméo. Des valeurs positives dénotent l'amour, tandis que les négatives représentent la haine.

En interprétant l'énoncé à la lettre, on peut proposer le modèle suivant :

$$\dot{R} = aJ \tag{5.24}$$

$$\dot{J} = -bR \tag{5.25}$$

où  $a, b > 0$ . On aboutit à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ . Sa trace est nulle et son discriminant positif : leur relation correspond à un oscillateur harmonique. C'est un cycle sans fin d'amour et de haine, puisque le système a un centre  $(R, J) = (0, 0)$ . Roméo et Juliette ne s'aiment donc mutuellement qu'un quart du temps. Pas très encourageant !

**Généralisation** On peut généraliser le modèle pour des relations plus complexes, par exemple :

$$\dot{R} = aR + bJ \tag{5.26}$$

$$\dot{J} = cR + dJ \tag{5.27}$$

En fonction des signes des différents coefficients, la relation peut être plus au moins désespérante :

- $a > 0, b > 0$  : Roméo est enthousiasmé et par l'amour que lui porte Juliette, et par le fait d'aimer Juliette ;
- $a < 0, b > 0$  : Roméo est un amoureux prudent, s'il n'est pas encouragé (i.e. si Juliette ne l'aime pas), il se désintéressera de la question ;
- $a > 0, b < 0$  : Roméo est un dragueur invétéré, mais dès que Juliette s'intéresse à lui, il s'en éloigne ;
- $a < 0, b < 0$  : Roméo est un ermite ou un misanthrope.

On peut réaliser la même discussion pour Juliette.

Deux amoureux prudents peuvent-ils tomber amoureux l'un de l'autre ? On modélise le système par

$$\dot{R} = aR + bJ \tag{5.28}$$

$$\dot{J} = bR + aJ \tag{5.29}$$

où  $a < 0$  mesure la prudence, et  $b > 0$  la réactivité. On a alors  $\tau = 2a < 0$ ,  $\Delta = a^2 - b^2$ , et  $\tau^2 - 4\Delta = 4b^2 > 0$ . Le point fixe est donc un noeud si la prudence l'emporte ( $a^2 < b^2$ ) et un col dans le cas contraire. La figure 5.13 donne le portrait de phase de la relation amoureuse de Roméo et Juliette.

---

2. Toute ressemblance avec des événements réels serait purement fortuite.



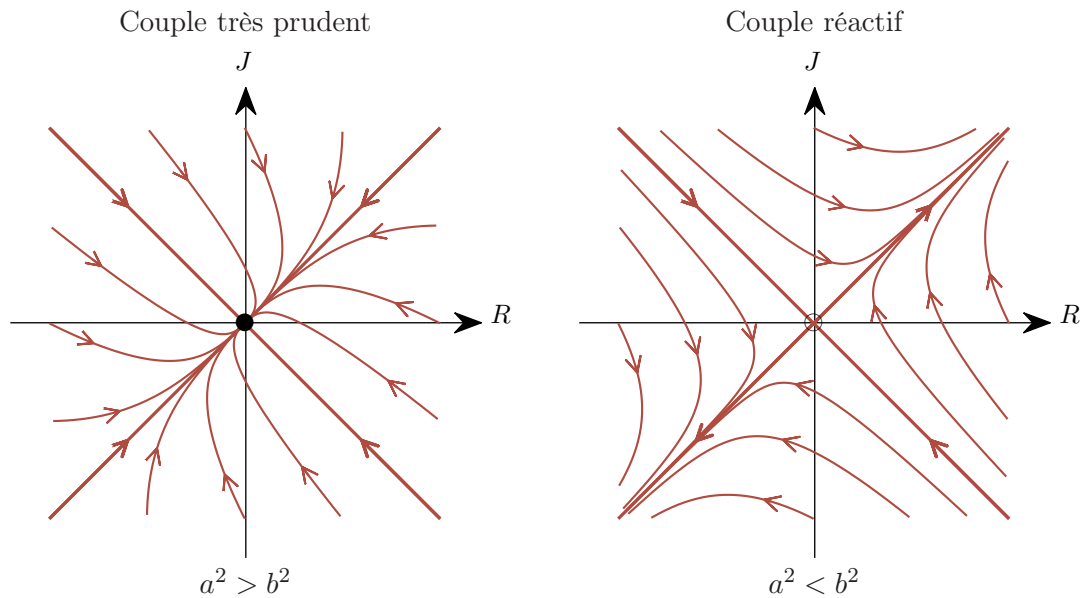


FIGURE 5.13 – Portrait de phase d'une relation entre deux amoureux prudents.

Elle tend vers l'indifférence si la prudence est de mise, mais est explosive si le couple est très réactif. Dans ce dernier cas, on tendra vers l'amour infini ou la haine absolue, mais le sentiment sera toujours mutuel! La première rencontre est ici décisive, puisque la somme des sentiments initiaux donnera la direction finale de la relation...

**Moralité** Ne soyez pas trop prudents en amour!

**Prolongation**

- Ceux qui souhaitent prolonger ce type d'analyse, peuvent faire l'examen que j'avais posé il y a quelques années. "Romance, poésie et systèmes dynamiques : un modèle de l'amour entre Laura et Pétrarque". cf. <http://perso.ens-lyon.fr/thierry.dauxois/TEACHING/ExamAvril2005.pdf>
- Au niveau de l'analyse des différents couples, les apprentis amoureux ou apprentis sociologue-psychologues pourront être intéressés par les articles "Le bois dont on fait les couples" et "La sociologie distingue cinq styles conjugaux" de Catherine Vincent parus le 16/02/2005 dans le Journal "Le Monde".
- "Histoire d'amour chaotique" : le cas de la femme de la FNAC et la lecture de "Chaos" par James Gleick. Une lecture utile?



# Chapitre 6

## Plan de phase

Nous étudions “enfin” dans ce chapitre les systèmes non-linéaires du second ordre ! Dans les faits, nous utiliserons intensivement les propriétés des systèmes linéaires que nous venons de voir...

### 6.1 Portrait de phase

Considérons un système dynamique de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (6.1)$$

ou, de façon plus compacte :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (6.2)$$

où  $\mathbf{x}$  est un point du plan de phase, et  $\dot{\mathbf{x}}$  représente la vitesse en ce point.

Dans le cas non linéaire, on ne peut généralement pas calculer les trajectoires analytiquement. De toutes les façons, quand cela est possible, l'expression peut être trop compliquée pour avoir une intuition du comportement du système. Encore une fois, nous allons essayer de **trouver les caractéristiques qualitatives générales à partir d'une représentation graphique**.

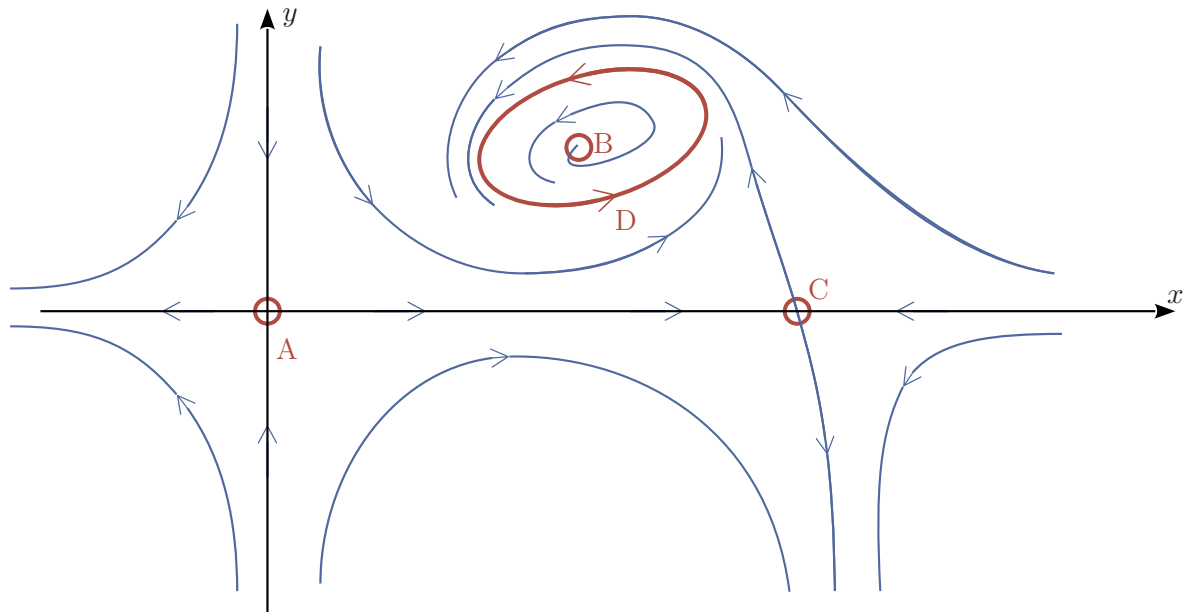
La figure 6.1 donne un exemple de portrait de phase d'un système d'ordre 2 quelconque. Elle souligne l'importance de quelques points clefs dans la compréhension de la dynamique du système.

La procédure générique est la suivante :

- On calcule les points fixes  $\mathbf{x}^*$ , vérifiant  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  (points A,B,C dans la figure 6.1) : ceux-ci sont des états d'équilibres stationnaires du système dynamique.
- On étudie la stabilité de ces points fixes, et on en déduit l'allure des trajectoires proches de ceux-ci. Dans l'exemple, les trajectoires sont très similaires autour des points A et C, mais le point B est qualitativement très différent, même si tous les 3 sont instables.
- Ensuite, on détermine les orbites fermées, qui représentent des solutions périodiques<sup>1</sup>  $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$  (D dans notre exemple).
- De même que pour les points fixes, on étudie la stabilité de ces orbites. Le cycle limite D est par exemple stable dans la figure 6.1.

---

1. Les orbites incluant des points fixes ne représentent pas des solutions périodiques.



**FIGURE 6.1** – Portrait de phase d'un système dynamique d'ordre 2 non linéaire. Les points fixes (A,B,C), les orbites fermées (D), et leur stabilité, jouent un rôle clef dans la compréhension qualitative de la dynamique du système.

**Exemple** Considérons le système dynamique suivant<sup>2</sup> :

$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^{-y} \\ \dot{y} = -y \end{cases} \tag{6.3}$$

et recherchons-en les points fixes. Après une rapide analyse, on s'aperçoit qu'il n'y en a qu'un,

$$\begin{cases} x^* = -1 \\ y^* = 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

Étudions à présent la **stabilité** de ce point fixe. On peut remarquer que l'équation différentielle  $\dot{y} = -y$  a pour solution  $y(t) = y_0 e^{-t}$ , donc que  $\lim_{t \rightarrow \infty} y = 0$ . Par conséquent,  $e^{-y} \rightarrow 1$ . Ainsi, la première équation sera rapidement (sur un temps d'ordre 1) équivalente à  $\dot{x} = x + 1$ , qui s'intègre en exponentielle croissante. Cela suggère que ce point fixe est donc instable.

Si l'on considère le **cas particulier** où l'on se place initialement sur l'axe des  $x$ ,  $y_0 = 0$ , donc  $y(t) = 0$  à tout temps.  $\dot{x} = x + 1$  est alors strictement vérifiée et le point fixe est nécessairement instable (ce cas particulier est suffisant pour démontrer son caractère instable, le contraire serait faux). On présentera dans la suite de ce cours des méthodes moins «bricolées» pour traiter efficacement ce genre de problèmes.

Pour tracer le **portrait de phase**, il est utile de trouver les lignes qui annulent l'une ou l'autre des coordonnées des vecteurs vitesse, et qui indiquent donc que le vecteur vitesse est purement vertical ou horizontal. Ces lignes sont nommées nullclines (isoclines pour une pente nulle dans une direction).

- Flot horizontal : dans notre exemple  $\dot{y} = 0$  correspond à  $y = 0$  i.e. l'axe des  $x$ . Le flot sur cette ligne sera vers la droite si  $\dot{x} > 0$ , donc si  $x > -1$ .

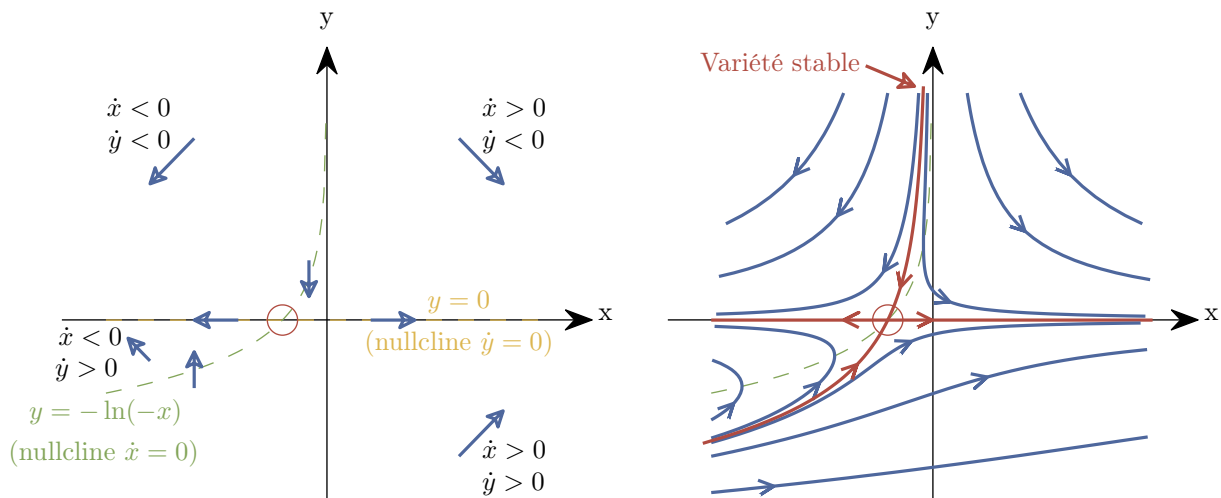
2. D'une importance physique probablement limitée...

– Flot vertical :  $\dot{x} = 0 \implies x + e^{-y} = 0$ , ou encore  $y = -\ln(-x)$ . Le flot sur cette ligne sera vers le haut si  $\dot{y} > 0$ , donc si  $y < 0$ .

Le portrait de phase est reporté sur la figure 6.2. Les deux nullclines définissent 4 quadrants dans lesquels on reporte la direction générale du flot. Ces indications nous permettent de tracer intuitivement le portrait de phase, et on peut utiliser une simulation numérique pour compléter le portrait de phase.

Remarque : les nullclines n’ont pas de pertinence physique, contrairement aux variétés du point fixe. Ces dernières représentent la ligne de démarcation entre deux bassins d’attraction et le comportement asymptotique de la solution : ce sont elles qui possèdent un vrai sens physique.

Pour bien réaliser la différence entre les nullclines et les variétés, il faut comprendre que les vecteurs vitesses sont horizontaux (ou verticaux) dans le premier cas, et tangents à la courbe dans le second.



**FIGURE 6.2** – Portrait de phase du système dynamique donné par l’équation 6.3. À gauche, on a tracé les nullclines du problème, et reporté la direction générale du flot dans chacun des quadrants obtenus. À droite, on reporte le portrait de phase obtenu à l’aide d’une simulation numérique. La variété stable du point fixe est proche de la nullcline  $y = -\ln(-x)$ , mais pas confondue : leur sens physique est différent.

Nous avons ainsi résolu cet exemple à deux dimension. L’exercice n’est en général pas plus compliqué qu’à une dimension, c’est juste 2 fois plus long!

8h en 2019

## 6.2 Existence, unicité et conséquence

**Théorème 1.** *Considérons le problème aux valeurs initiales*

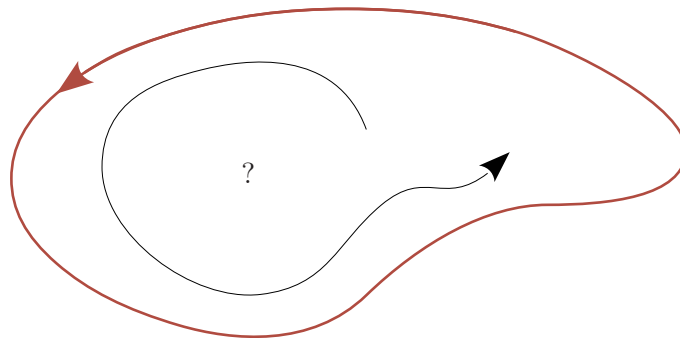
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Si  $\mathbf{f}$  est continue et que toutes ses dérivées partielles le sont dans un ouvert connexe  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ , alors pour  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ , le problème (6.5) a une solution unique, notée  $\mathbf{x}(t)$ .

Autrement dit, existence et unicité sont garanties si  $\mathbf{f}$  est continue et différentiable.

Conséquence importante : **deux trajectoires différentes ne se croisent jamais**. Le point d’intersection représenterait une condition initiale pour deux trajectoires différentes dans l’espace des phases, ce qui contredit le théorème.

À deux dimensions, cela a des répercussions *très* importantes, qui disparaissent en dimension supérieure. En effet, si l'on a une orbite fermée, toutes les trajectoires qui partent d'un point à l'intérieur de celle-ci y seront enfermées à tout jamais (illustration sur la figure 6.3). **L'intuition suggère que s'il existe un (ou plusieurs) point fixe stable dans cette orbite**, la trajectoire va converger vers ce point fixe. **Au contraire, s'il n'y a aucun point fixe** dans une orbite fermée, l'intuition suggère que le trajectoire ne peut que tourner indéfiniment. C'est ce que dit en substance le **théorème de Poincaré-Bendixson** que l'on verra plus tard : Si une trajectoire est confinée dans une région fermée ne contenant aucun point fixe, alors la trajectoire doit forcément s'approcher d'une orbite fermée que l'on appellera *cycle limite*.



**FIGURE 6.3** – *Si il existe une orbite fermée dans le plan de phase, toute condition initiale contenue dans cette orbite ne pourra pas en sortir : l'unicité des solutions interdit l'intersection des trajectoires.*

### 6.3 Points fixes et linéarisation

Nous allons généraliser la méthode utilisée à une dimension. Soit un système dynamique décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \tag{6.6}$$

où  $f$  et  $g$  sont "lisses", et  $(x^*, y^*)$  un point fixe (i.e.  $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$ ). On pose

$$\begin{cases} u = x - x^* \\ v = y - y^* \end{cases} \tag{6.7}$$

et on se place autour du point fixe ( $u$  et  $v$  «petits»). On a donc

$$\dot{u} = \dot{x} \tag{6.8}$$

$$= f(x^* + u, y^* + v) \tag{6.9}$$

$$= \underbrace{f(x^*, y^*)}_{=0} + u\partial_x f(x^*, y^*) + v\partial_y f(x^*, y^*) + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv) \tag{6.10}$$

En faisant de même pour  $\dot{v}$ , on montre que le système dynamique se réécrit autour de points d'équilibre sous la forme

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \partial_x f(x^*, y^*) & \partial_y f(x^*, y^*) \\ \partial_x g(x^*, y^*) & \partial_y g(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{J}(x^*, y^*) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

On est donc ramenés, si on néglige les termes d'ordre supérieur, à un système linéaire. La matrice  $\mathbf{J}$  est appelée *matrice Jacobienne* du système dynamique, elle est évaluée au point fixe  $(x^*, y^*)$ .

*Remarque. Est-il justifié de négliger les termes non linéaires ?* Nous nous sommes placés dans le cadre d'une approximation linéaire autour des points fixes. Les conditions de stabilité (notamment le signe des valeurs propres) doivent donc être "robustes", étant entendu que l'évolution effective du système autour du point sera légèrement différente de celle décrite par la matrice Jacobienne :

- Si la version linéaire prévoit un col, une spirale ou un nœud, alors le comportement du système non linéaire sera identique.
- Si la version linéaire prévoit un cas limite de la classification des systèmes linéaires (figure 5.12), ie une étoile, un centre, des nœuds dégénérés ou des points fixes non isolés, alors les termes non linéaires vont très probablement perturber ce comportement. Le lecteur intéressé se référera utilement à l'ouvrage [A. Andronov, *Qualitative theory of second-order dynamic systems*, Wiley (1973)].

### Exemple 1

Trouvons tous les points fixes du système dynamique décrit par

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x^3 = x(-1 + x^2) \\ \dot{y} = -2y, \end{cases} \tag{6.12}$$

classifions-les et traçons le portrait de phase.

On a trois points fixes :  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$ . La matrice jacobienne s'écrit, pour un point fixe  $(x^*, y^*)$ ,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 + 3x^{*2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

- Point fixe  $(0, 0)$  :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

La trace est négative ( $\tau = -3$ ), le déterminant positif ( $\Delta = 2$ ), et les valeurs propres sont réelles ( $\tau^2 - 4\Delta > 0$ ) : c'est un nœud stable. Plus simplement, on peut remarquer que la matrice est diagonale et que les valeurs propres sont -1 et -2, la direction lente est donc suivant l'axe des  $x$ .

- Points fixes  $(\pm 1, 0)$  :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

On calcule  $\Delta = -4$ , ce sont deux points cols. On arrive aussi directement à cette conclusion en remarquant que la matrice est diagonale et que les valeurs propres sont 2 et -2. La variété instable est donc horizontale et la variété stable verticale.

Les points fixes étant robustes, on peut en conclure qu'on est proche du comportement réel. Le portrait de phase reporté sur la figure 6.4 montre que cette analyse est corroborée par une simulation numérique de ce système.

### Exemple 2

Considérons le système dynamique décrit par

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + ax(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = +x + ay(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{6.16}$$

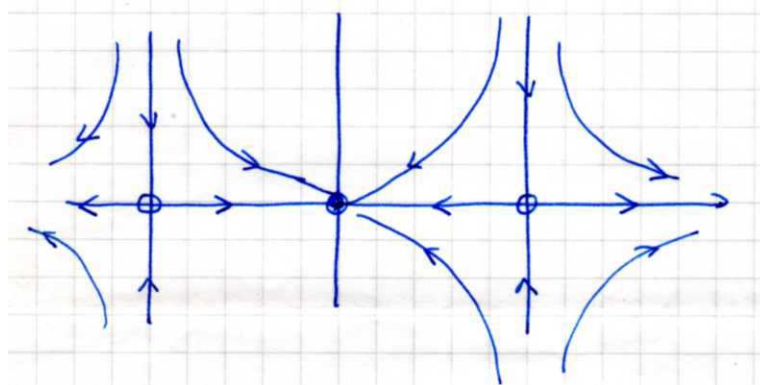


FIGURE 6.4 – Portrait de phase du système dynamique donné par l'équation (6.12).

L'origine, point fixe du système, est prédite comme un centre dans l'approximation linéaire, et ce quelle que soit la valeur de  $a$ . En effet, la matrice jacobienne en  $(0, 0)$  s'écrit

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

donc  $\Delta = 1$  et  $\tau = 0$  : il s'agit bien d'un centre. Cette prédiction n'est pas robuste, il faut donc creuser un peu plus. La forme des équations suggère un changement de variable pour passer en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases} \tag{6.18}$$

En remarquant que  $r^2 = x^2 + y^2$ , et en dérivant cette expression, on obtient :

$$r\dot{r} = \dot{x}x + \dot{y}y = a(x^2 + y^2)^2 = ar^4 \tag{6.19}$$

$$\dot{r} = ar^3 \tag{6.20}$$

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{1 - 2ar_0^2 t}} \tag{6.21}$$

Ainsi, si  $a > 0$ , on a affaire à une spirale instable (divergence en temps fini de  $r$ ). À l'inverse, si  $a < 0$  il s'agit d'une spirale stable, et le cas  $a = 0$  correspond à un centre.

Une question résiduelle est celle du sens de rotation. Dans le cas assez fréquent où  $y = \dot{x}$ , le portrait de phase tourne *toujours* dans le sens horaire (si  $\dot{x} > 0$ ,  $x$  croît, etc.). Cependant, en règle générale il faut calculer pour pouvoir conclure. Pour des coordonnées polaires, il peut être utile de se rappeler que

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \tag{6.22}$$

et donc que comme  $(\arctan(x))' = 1/(1 + x^2)$

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2}. \tag{6.23}$$

Pour notre système dynamique,  $\dot{\theta} = 1 > 0$ , on tourne donc dans le sens trigonométrique. La figure 6.5 donne le portrait de phase ainsi déduit de notre système dynamique.



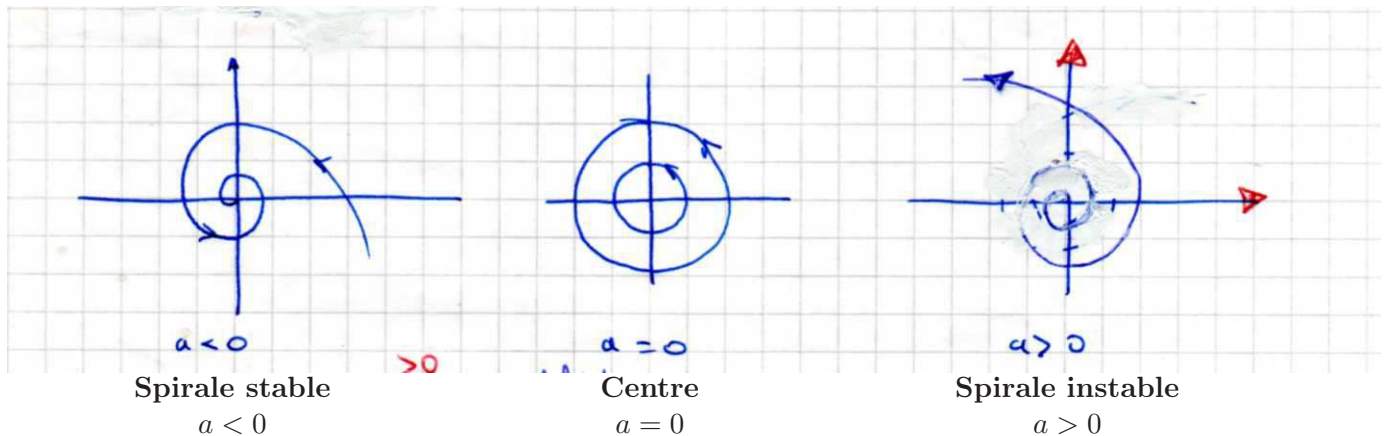


FIGURE 6.5 – Portrait de phase du système dynamique donné par l'équation (6.16).

*Remarque.* Les étoiles et les nœuds dégénérés peuvent être modifiés par la non-linéarité, mais pas leur stabilité (au contraire des centres qui représentent une limite de stabilité). Cette propriété semble assez évidente à la lecture de la classification de la figure 5.12.

*Remarque.* Si l'on s'intéresse plus particulièrement à la stabilité plutôt qu'aux détails géométriques de la trajectoire, on classe les points fixes sous la forme :

- Cas robustes : **points hyperboliques**
  - *Sources* : deux valeurs propres de partie réelle  $> 0$ .
  - *Puits* (ou attracteurs) : deux valeurs propres de partie réelle  $< 0$ .
  - *Cols* : une valeur propre de partie réelle  $> 0$ , l'autre de partie réelle  $< 0$ .
- Cas marginaux : **points non-hyperboliques**
  - *Centres* : deux valeurs propres purement imaginaires.
  - *Points fixes non isolés* : au moins une valeur propre nulle.

Les points fixes des cas robustes ont une partie réelle non nulle pour les deux valeurs propres, ils sont appelés points hyperboliques (à ne pas confondre avec les points cols...). Ces points ne sont pas affectés par la non-linéarité. Par opposition, les points-non hyperboliques sont fragiles. Ces dénominations se généralisent aux dimensions supérieures.

## 6.4 Modèle de compétition entre moutons et lapins

Nous étudions dans ce paragraphe un modèle de co-évolution de population partageant une même ressource, par exemple des lapins et moutons en compétition pour manger la même herbe. On se place dans le cadre d'un système isolé et stationnaire : pas de prédateurs (loups ou rapaces par exemple), pas d'effet de saison, etc.

Dans ce modèle de Lotka-Volterra, on modélise deux phénomènes principaux :

- En l'absence de l'autre espèce, chaque espèce connaît une croissance de type logistique.
- En présence de l'autre espèce, il y a compétition. On suppose que les conflits sont proportionnels à la quantité de l'autre espèce.

### Exemple

Notons  $x = [\text{lapin}]$ ,  $y = [\text{mouton}]$ , et supposons que les populations d'équilibre en l'absence de l'autre espèce soient  $x = 3$ ,  $y = 2$  (un mouton consomme plus de ressources qu'un lapin). D'autre part, on suppose qu'un mouton pénalise plus la croissance des lapins qu'un lapin ne pénalise la croissance des moutons. Le système d'équations suivantes est un exemple répondant à ces différents critères :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 2y) \\ \dot{y} = y(2 - x - y) \end{cases} \quad (6.24)$$

Les points fixes de ce système sont au nombre de 4 :  $(0, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(3, 0)$ , et  $(1, 1)$ . Le Jacobien s'écrit :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 3 - 2x^* - 2y^* & -2x^* \\ -y^* & 2 - x^* - 2y^* \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Étudions ces 4 points fixes successivement :

- $(x^*, y^*) = (0, 0)$ . On a alors

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Il s'agit d'un noeud instable, puisque les deux valeurs propres (3 et 2) sont positives. Les trajectoires partent tangentiellement au mode le moins instable (direction lente), l'axe des  $y$  ici.

*Remarque* :  $\dot{x} = 3x$  et  $\dot{y} = 2y \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{3x}{2y} \rightarrow \frac{2}{3} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \rightarrow y = y_0(x/x_0)^{2/3}$  qui part bien tangentiellement à l'axe des  $y$ , i.e. tangentiellement au mode le moins instable (direction lente).

- $(x^*, y^*) = (0, 2)$ . On a alors

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Les valeurs propres sont  $-1$  et  $-2$ , il s'agit d'un noeud stable. La direction lente est celle associée à  $\lambda = -1$ , soit  $\mathbf{V}_{-1} = (1, -2)$ .

- $(x^*, y^*) = (3, 0)$ . On a alors

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

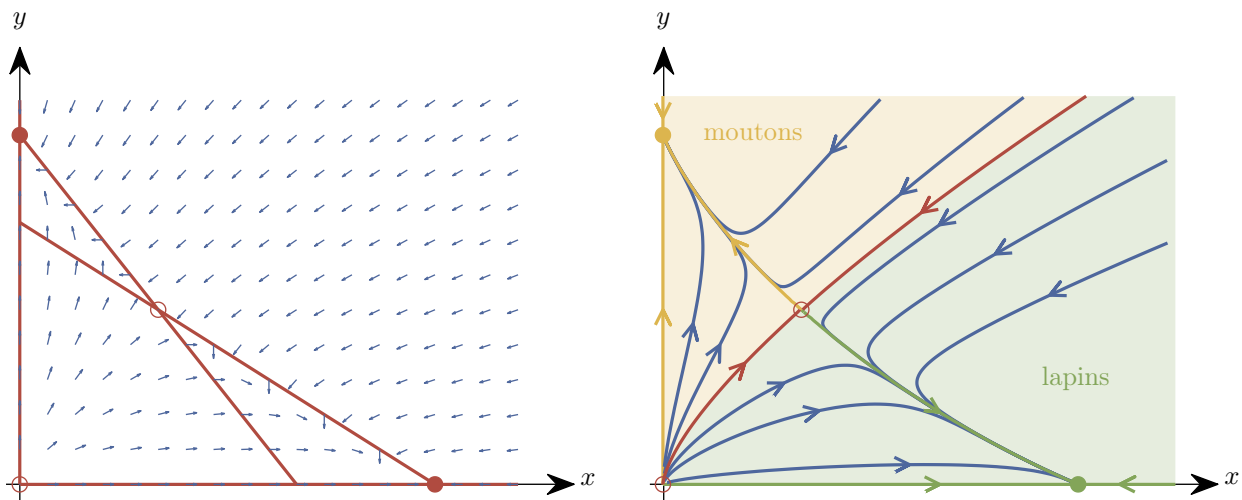
Les valeurs propres sont  $-3$  et  $-1$ , il s'agit d'un noeud stable. La direction lente est celle associée à  $\lambda = -1$ , soit  $\mathbf{V}_{-1} = (3, -1)$ .

- $(x^*, y^*) = (1, 1)$ . On a alors

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

Les valeurs propres sont  $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}$ , il s'agit d'un col. Les vecteurs propres sont :  $\mathbf{V}_- = (\sqrt{2}, 1)$  associé à  $\lambda_- = -1 - \sqrt{2}$  (variété stable), et  $\mathbf{V}_+ = (\sqrt{2}, -1)$  associé à  $\lambda_+ = -1 + \sqrt{2}$  (variété instable).

En reportant ces 4 points fixes dans le portrait de phase (figure 6.6), on devine aisément comment connecter entre eux les points fixes du système dynamique via les variétés stables et instables du point col. Une simulation numérique confirme cette intuition.



**FIGURE 6.6** – Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra. La variété stable du point col est une séparatrice de l'espace des phases : elle définit deux bassins d'attraction associés aux 2 noeuds stables du système dynamique, chacun correspondant à l'extinction d'une espèce selon le principe d'exclusion par compétition.

### “Morale écologique” du portrait de phase

La présence de deux espèce partageant la même ressource tend généralement à l'extinction de l'une des deux. C'est le principe d'*exclusion par compétition*, qui assure que 2 espèces ne peuvent pas coexister si elles luttent pour la même ressource.

On définit la **notion de bassin d'attraction** selon que l'état final converge vers l'extinction des moutons ou des lapins : la variété stable du point col sépare les deux bassins d'attraction : on l'appelle la **séparatrice**. Cette notion est d'importance, car les séparatrices séparent l'espace des phases en région dont les comportements sont très différents aux temps longs. On verra plus loin des bassins d'attraction plus complexes, dont on tirera des applications.

## 6.5 Systèmes conservatifs

Considérons un système mécanique sans dissipation où la force ne dépend que de  $x$ , donc de la forme

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t). \quad (6.30)$$

Introduisons le potentiel  $V$  dont dérive la force, qui vérifie par définition

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} \quad (6.31)$$

et posons

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x). \quad (6.32)$$

On a alors immédiatement

$$\frac{dE}{dt} = \left( m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} \right) \dot{x} = 0 \quad (6.33)$$

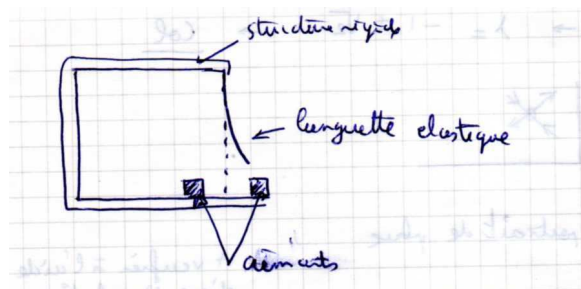
ce qui signifie que la quantité  $E$  est conservée ; on l'appelle énergie du système.

### Exemple : Équation de Duffing

On considère  $m = 1$  dans un potentiel dit «double puits» :

$$V(x) = -\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^4}{4} \quad (6.34)$$

Cette équation modélise par exemple une languette métallique libre d'osciller entre deux aimants (figure 6.7).



**FIGURE 6.7** – Une lame flexible aimantable entre deux aimants est un oscillateur mécanique régi par l'équation de Duffing : la position centrale est instable, et il existe deux positions d'équilibre (une à proximité de chaque aimant).

On peut montrer que le premier mode d'oscillation de la dite languette vérifiera l'équation de Duffing

$$\ddot{x} = x - x^3, \quad (6.35)$$

qui correspond au potentiel étudié ici. Ce montage mécanique est assez simple à réaliser et a été très utilisé pour caractériser la notion de chaos<sup>3</sup>.

3. Pour obtenir un système chaotique à l'aide ce système, il faut nécessairement ajouter un degré de liberté. Expérimentalement, ce degré de liberté supplémentaire est le temps si on applique un forçage horizontal du système, qui présente une dynamique chaotique sous certaines conditions.

Le système dynamique à deux dimensions s'écrit sous la forme habituelle,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3. \end{cases} \tag{6.36}$$

Les points fixes  $(x^*, y^*)$  vérifient

$$\begin{cases} 0 = y^* \\ 0 = x^* (1 - x^{*2}) \end{cases} \tag{6.37}$$

et la matrice jacobienne s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^{*2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.38}$$

Le point fixe  $(0,0)$  correspond donc à un col ( $\tau = 0, \Delta = -1$ ), tandis que les points  $(\pm 1, 0)$  sont des centres ( $\tau = 0, \Delta = 2$ ) dans l'approximation linéaire. La méfiance est donc de rigueur pour la classification de ces derniers.

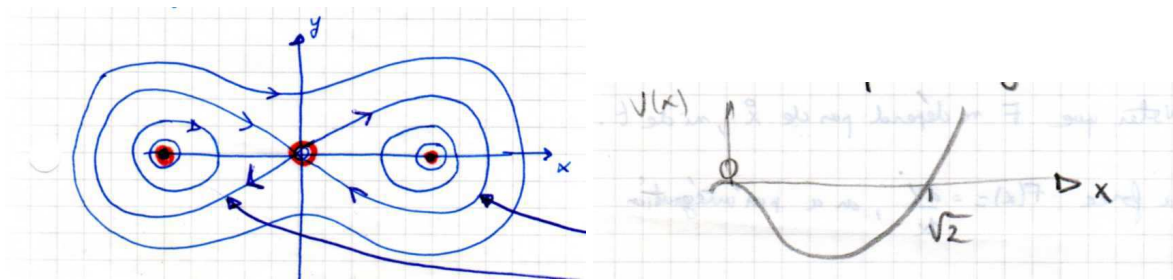


FIGURE 6.8 – Potentiel et portrait de phase associé à l'équation de Duffing.

La figure 6.8 reporte le **portrait de phase** en correspondance avec le potentiel. On devine facilement ce dessin en imaginant un point matériel se déplaçant sans friction dans le potentiel. Les trajectoires sont à des courbes fermées correspondant à une énergie fixée. Le sens de rotation dans le plan de phase est toujours horaire pour un système mécanique ( $\dot{x} = y > 0$ , donc vers la droite, dans le demi plan supérieur ;  $\dot{x} = y < 0$ , donc vers la gauche, dans le demi plan inférieur).

Les trajectoires passant par l'origine ne se coupent pas : ce sont en fait deux trajectoire distinctes, reliant un point fixe à lui même. On les appelle **orbites homoclines**. Elles sont courantes dans les systèmes conservatifs, rares ailleurs. Le temps mis pour les parcourir est infini. En effet, si l'on se place sur une telle trajectoire passant par  $(0,0)$ , la conservation de  $E$  implique

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) \\ &= \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = 0 \end{aligned} \tag{6.39}$$

et donc

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{2} \right) \tag{6.40}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} &= \int_0^{T/2} dt \\ &= \int_{x=0}^{x_{\max}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2/2}} \\ &\sim \int_0 \frac{dx}{x} \sim \infty \end{aligned} \tag{6.41}$$

**Le temps à atteindre le point fixe est donc infini** dans le cadre d'un point col, c'est une caractéristique commune à tous les points fixes correspondant à un maximum du potentiel en l'absence de dissipation : on effectue un développement limité autour de ce maximum et on retrouve la divergence observée ci-dessus à proximité du point fixe approché à vitesse nulle.

Notons également **point fixe ne peut pas être atteint en temps fini** de par le théorème d'unicité des trajectoires : le point fixe est une solution du système dynamique, il n'existe donc aucune autre trajectoire passant par ce point.

Si l'on omet les points fixes et les trajectoires homoclines, les solutions sont périodiques. Le caractère centre d'oscillation des points fixes  $(\pm 1, 0)$  est ainsi préservé dans ce système non linéaire. C'est en réalité une généralité pour les systèmes conservatifs : les minima de l'énergie sont des centres d'oscillation.

Illustrons cette propriété en traçant la surface d'énergie  $E(x, \dot{x}) = \dot{x}^2/2 - x^2/2 + x^4/4$ , reportée sur la figure 6.9. Les trajectoires correspondent à des sections iso-énergie de cette surface. Les trajectoires

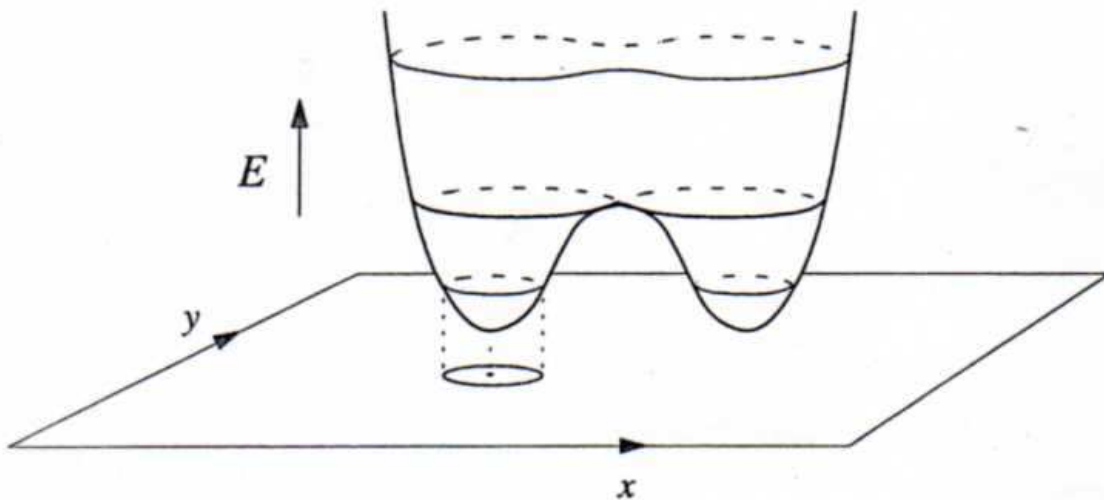


FIGURE 6.9 – Énergie mécanique de l'oscillateur de Duffing.

sont donc fermées près des minima de  $E$ , et correspondent à des cycles périodiques. Ce raisonnement s'étend à tout système conservatif.

**Théorème 2.** Centres non-linéaires pour les systèmes conservatifs : soit un système dynamique  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  avec  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  et  $\mathbf{f}$  continûment différentiable, s'il existe une quantité  $E(\mathbf{x})$  conservée et que  $x^*$  est un point fixe isolé pour lequel  $E$  présente un minima, alors toutes les trajectoires suffisamment proches de  $x^*$  sont fermées.

**Effet de la dissipation**

On suppose qu'on introduit un frottement fluide dans le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \mu y. \end{cases} \tag{6.42}$$

où  $\mu > 0$ .

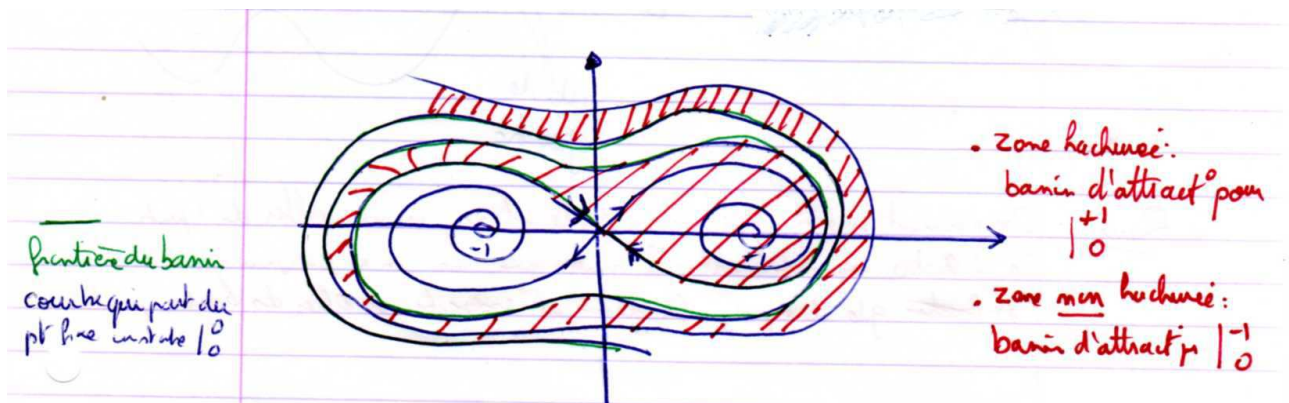
Les points fixes restent inchangés par la dissipation. En revanche, la jacobienne en  $(x^*, 0)$  s'écrit à présent

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^{*2} & -\mu \end{pmatrix}, \tag{6.43}$$

Le déterminant de la matrice est inchangé, mais la trace est maintenant négative ( $\tau = -\mu$ ). Les valeurs propres ont pour expression  $\lambda_{\pm} = (-\mu \pm \sqrt{4 + \mu^2 - 12x^2})/2$ .

L'origine reste donc un col ( $\lambda_{\pm}(x^* = 0) = (-\mu \pm \sqrt{4 + \mu^2})/2$ ).

En revanche, les deux points fixes  $(\pm 1, 0)$  sont maintenant des spirales ( $\lambda_{\pm}(x^* = \pm 1) = (-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 8})/2$ ) stables (pour  $\mu < \sqrt{8}$ ) ou des noeuds stables (pour  $\mu > \sqrt{8}$ ). Dans ce dernier cas, le système atteint son point d'équilibre sans osciller (même si la vitesse initiale est grande, car la dissipation l'est tout autant). Le portrait de phase pour une dissipation faible est reporté sur la figure 6.10. Ce portrait de phase peut s'interpréter facilement en imaginant le trajet d'une bille dans le potentiel à deux puits.



**FIGURE 6.10** – Portrait de phase l'oscillateur de Duffing faiblement amorti. La partie de la courbe du potentiel en traits pleins (resp. en pointillés) correspond au lieu des conditions initiales qui vont évoluer vers le point fixe stable  $(1, 0)$  (resp.  $(-1, 0)$ ).

La figure 6.10 met en évidence deux bassins d'attractions, définis comme l'ensemble des conditions initiales évoluant vers l'un ou l'autre des 2 points fixes stables. La frontière entre les deux bassins est courbe qui passe par l'origine : c'est la variété stable de  $(0, 0)$ . Pour certains systèmes dynamiques, les deux bassins d'attraction peuvent être encore plus intriqués ou interpénétrés. C'est un effet similaire à ce qui est utilisé pour les systèmes de mélange de peinture ou encore pour fabriquer des gateaux marbrés appétissants ! Cet enchevêtrement se retrouve en considérant l'ensemble des conditions initiales sans vitesse qui conduisent à l'un ou l'autre puits, schématisés sur la figure 6.10

## 6.6 Stabilité des systèmes visqueux

Considérons un système générique avec dissipation visqueuse :

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = F(x) \quad (6.44)$$

D'un point de vue énergétique, on associe le potentiel  $V(x)$  à la force conservative  $F(x) = -V'(x)$  et on définit l'énergie mécanique du système par

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x). \quad (6.45)$$

On a alors immédiatement

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma\dot{x}^2 < 0 \quad (6.46)$$

L'énergie ne peut que décroître : on converge donc invariablement vers un minimum du potentiel.

La stabilité locale d'un point fixe ne dépend alors pas de l'inertie du système : si un point fixe est stable pour un système suramorti ( $m \rightarrow 0$ ), il est localement stable pour un système inertiel ayant le même potentiel.

La stabilité globale par contre peut être différente, un système dynamique pouvant terminer dans un puits de potentiel différent en fonction des conditions initiales choisies.

## 6.7 Le pendule

### 6.7.1 Sans dissipation

L'équation du pendule est un exemple très classique qui vous a suivi toute votre scolarité, mais l'équation non-linéaire adimensionnée

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0 \quad (6.47)$$

était très rapidement simplifiée pour sa forme linéaire, valable dans la limite des petits angles :

$$\ddot{\theta} + \theta = 0 \quad (6.48)$$

On obtient ainsi l'incontournable équation de l'oscillateur harmonique, d'une importance primordiale d'un point de vue didactique. Les solutions linéaires sont connues analytiquement et s'écrivent de la forme  $A \cos(t + \phi)$ . Ainsi quelques soient les conditions initiales le système évolue à la même pulsation, et donc le pendule oscille avec la même période. On parle d'**isochronisme des oscillations**, ce qui se traduit comme vu au chapitre précédent par un portrait de phase en forme de cercle – ou d'ellipse selon une transformation linéaire des coordonnées. Le portrait de phase du pendule "non linéarisé" permet de visualiser la perte d'isochronisme aux grands angles.

Nous allons pour la première fois attaquer le problème de front et traiter le cas général des angles arbitrairement grands. Posons  $p = \dot{\theta}$ . On obtient alors le système dynamique à deux dimensions suivant :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = p \\ \dot{p} = -\sin \theta, \end{cases} \quad (6.49)$$

dont les points fixes vérifient

$$\begin{cases} \theta^* = k\pi \\ p^* = 0 \end{cases} \quad (6.50)$$



où  $k \in \mathbb{Z}$ . L'équation (6.49) étant  $2\pi$ -périodique, il suffit d'étudier  $\theta^* = 0$  et  $\pi$  pour obtenir un traitement exhaustif des points fixes.

La matrice jacobienne est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \theta^* & 0 \end{pmatrix} \tag{6.51}$$

et l'on vérifie aisément que  $\theta^* = \pi$  correspond à un col alors que l'origine est un centre linéaire. Dans le cas général, cette propriété est donc sujette à caution, mais nous avons ici affaire à un système conservatif et l'origine est un centre non-linéaire.

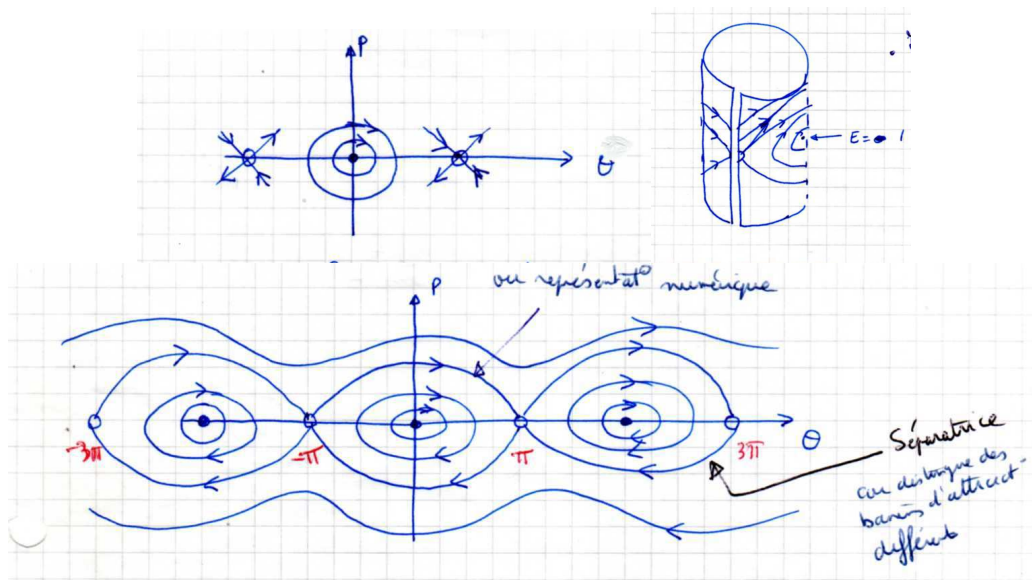
Pour obtenir la figure 6.11 qui présente le portrait de phase complet du système, étudions l'énergie d'un tel système qui s'écrit

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos \theta. \tag{6.52}$$

Elle est conservée au cours de l'évolution temporelle. Les lignes iso-énergies permettent de tracer les trajectoires exactes dans l'espace des phases :

- Pour  $E < 1$ , on retrouve de petites oscillations autour du centre, également nommées libérations<sup>4</sup>
- Pour  $E = 1$ , le pendule met un temps infini pour parcourir le chemin entre  $\theta = -\pi$  et  $\theta = \pi$  : on parle de trajectoires hétéroclines<sup>5</sup> (qui relie deux points fixes différents, ici des cols) ou encore de séparatrices.
- Pour  $E > 1$ , le pendule tourne sans fin, on observe des rotations.

Le portrait de phase est symétrique par la transformation  $\theta, p \leftrightarrow \theta, -p$ , qui correspond à l'invariance des équations du mouvement par reversement du temps.



**FIGURE 6.11** – Portrait de phase du pendule sans dissipation. La périodicité selon  $\theta$  se retrouve dans le plan de phase, que l'on peut représenter sous forme cylindrique (périodicité selon  $\theta$  mais pas selon  $p$ ).

4. Le terme libration vient de l'astronomie, il signifie oscillation lente. La plus connue est celle de la lune.

5. Si on considère un espace des phases cylindrique, les trajectoires sont homoclines de part l'équivalence entre  $-\pi$  et  $\pi$

### 6.7.2 Avec dissipation

Introduisons maintenant une dissipation visqueuse :

$$\ddot{\theta} + 2\eta\dot{\theta} + \sin \theta = 0 \tag{6.53}$$

où  $\eta > 0$  est le coefficient de dissipation. Le système dynamique s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{\theta} = p \\ \dot{p} = -\sin \theta - 2\eta p \end{cases} \tag{6.54}$$

et l'énergie du système décroît :

$$\frac{dE}{dt} = -2\eta\dot{\theta}^2 < 0 \tag{6.55}$$

On devine intuitivement comment l'espace des phases va être modifié par cette dissipation en imaginant à nouveau une particule dans le potentiel  $V(\theta) = -\cos \theta$ , évoluant cette fois avec une dissipation visqueuse.

Les points fixes restent inchangés; en revanche l'équation caractéristique des valeurs propres en  $\theta^* = k\pi$  s'écrit

$$\lambda^2 + 2\eta\lambda + (-1)^k = 0 \tag{6.56}$$

ce qui donne immédiatement

$$\lambda_{\pm} = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - (-1)^k} \tag{6.57}$$

**Faible dissipation** On se place dans l'hypothèse  $\eta \ll 1$ . On a donc  $\lambda_{\pm} \simeq -\eta \pm (-1)^{\frac{k+1}{2}}$ , d'où

- $\lambda_{\pm} \simeq \pm i - \eta$  en l'origine : le centre est transformé en spirale stable
- $\lambda_{\pm} \simeq \pm 1 - \eta$  en  $\theta^* = \pi$  : le col reste un col

Cette exemple illustre que les points hyperboliques (cols) ne changent pas de nature lors d'une petite perturbation du système, tandis que les points non hyperboliques (centres) en changent. Le portrait de phase est reporté sur la figure 6.12.

La nature des séparatrices change également : une trajectoire qui, partant de  $-\pi$ , atteignait auparavant le point  $\pi$  en l'absence de dissipation, va manquer sa cible à cause de la perte d'énergie, et «spiralera» vers l'origine. Les trajectoires hétéroclines sont désormais ouvertes.

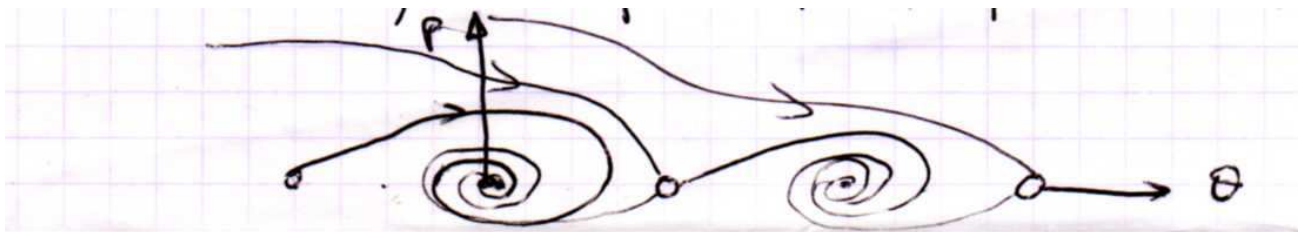


FIGURE 6.12 – Portrait de phase du pendule avec dissipation.

**Système suramorti** Lorsque  $\eta > 1$ , il existe un changement qualitatif dans le portrait de phase : les spirales deviennent des noeuds, le pendule atteint son équilibre sans osciller.

### 6.8 Tourbillons ponctuels dans un écoulement

L'**écoulement** bi-dimensionnel induit par deux tourbillons de circulation  $\pm\Gamma$  et éloignés d'une distance  $2d$  est donné par la fonction de courant de Lamb (1945)

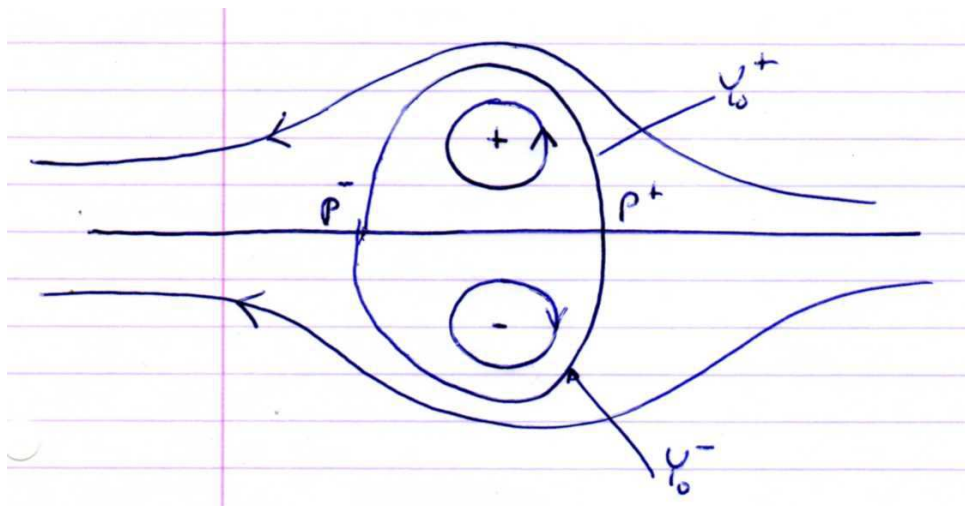
$$\psi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \log \left( \frac{x^2 + (y - d)^2}{x^2 + (y + d)^2} \right) - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{y}{d} \tag{6.58}$$

si l'on suppose que les vortex ont pour coordonnées  $(0, \pm d)$ .

Le **champ de vitesse** se déduit de la fonction de courant et conduit à

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = +\partial_y \psi \\ v_y = \dot{y} = -\partial_x \psi \end{cases} \tag{6.59}$$

Ce système dynamique à 2 points fixes (points d'arrêt ou points de stagnation de l'écoulement) :  $(\pm\sqrt{3}d, 0)$ . Ceux ci sont connecté par 3 lignes de courants qui sont les trajectoires hétéroclines du système dynamique. Ces séparatrices définissent des zones distinctes : si l'on met du colorant dans l'une de ces zones, il y reste indéfiniment. La figure 6.13 montre le portrait de phase du système dynamique, qui se confond avec la forme de cet écoulement.



**FIGURE 6.13** – Portrait de phase d'un écoulement bi-dimensionnel à deux vortex ponctuels de circulations opposées.



# Chapitre 7

## Cycles limites

### 7.1 Introduction

Un cycle limite est une trajectoire *fermée* et *isolée* (ce qui signifie que les trajectoires voisines ne sont pas fermées, mais qu'elles spiralent vers ou s'éloignent du cycle limite).

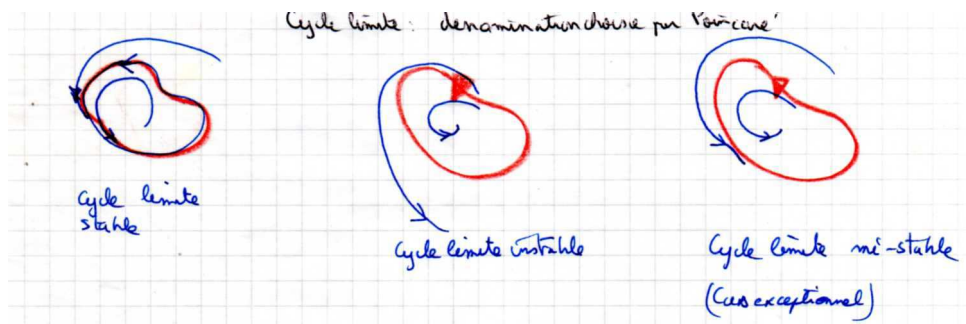


FIGURE 7.1 – A remplir

Les cycles limites sont des notions essentielles, car ils modélisent des oscillations propres du système (i.e. en l'absence de forçage extérieur). Il existe de nombreux exemples comme les battements du cœur, l'excitation périodique d'un neurone, le rythme journalier de la température corporelle, les sécrétions d'hormones, certaines réactions chimiques oscillantes ou encore les oscillations d'un cristal de quartz.

Dans tous ces exemples, il existe un cycle de forme fixe et une période propre. Si on perturbe le système, on retourne vers l'oscillation propre du système.

**Un cycle limite n'est pas chaotique** : au contraire le système est cadencé et son comportement prédictible.

Les cycles limites sont des **caractéristiques intrinsèquement non linéaires**. Dans un système linéaire, il peut exister des orbites fermées, mais elles ne sont pas isolées. En effet, si  $\mathbf{x}(t)$  est une orbite fermée,  $c\mathbf{x}(t)$  où  $c \in \mathbb{R}$  est aussi une trajectoire du système, et est aussi fermée. En faisant tendre  $c$  vers 1, il apparaît que la trajectoire  $\mathbf{x}(t)$  n'est pas isolée. L'amplitude de l'oscillation par exemple est donc entièrement déterminée par les conditions initiales, et toute perturbation restera présente à temps long. Ce n'est pas le cas **pour un système non-linéaire, qui retrouvera son cycle limite après une perturbation.**

## 7.2 Exemples

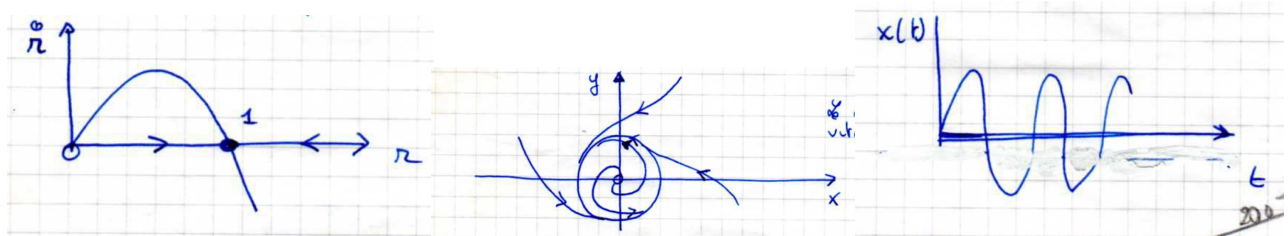
### 7.2.1 Un premier exemple trivial

Considérons le système décrit en coordonnées polaires<sup>1</sup> par

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (7.1)$$

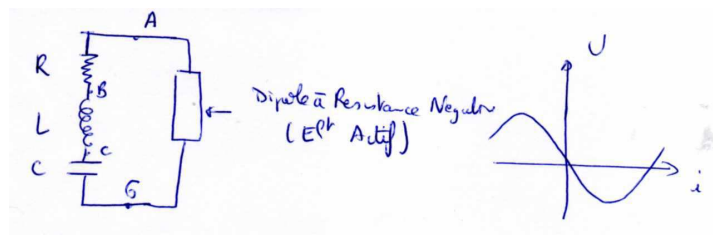
Comme  $r$  et  $\theta$  sont régis par deux équations découplées, on peut les analyser séparément.

En traitant la première comme un système du premier ordre, on voit que  $r^* = 0$  est un point fixe instable, tandis que  $r^* = 1$  est un point fixe stable (portrait de phase sur la ligne figure 7.2). Comme  $\dot{\theta} \neq 0$ , le système dynamique à deux dimensions n'admet pas de point fixe stable : les trajectoires spiralent vers le cycle limite  $r = 1$  à vitesse angulaire constante (pour toute condition initiale hormis le point fixe instable). Les coordonnées cartésiennes  $x(t), y(t)$  sont des fonctions périodiques (sinusoïdales) du temps.



**FIGURE 7.2** – Évolution du système dynamique de l'équation (7.1) :  $r$  est régi par un système dynamique du premier ordre qui possède un seul point fixe globalement stable ( $r^* = 1$ ), alors que l'angle polaire  $\theta$  décrit une rotation continue à vitesse angulaire constante. On converge donc vers un cycle limite qui est le cercle unitaire

### 7.2.2 Un exemple très important : l'oscillateur de van der Pol (1926)



**FIGURE 7.3** – Circuit électrique équivalent d'un oscillateur de van der Pol : on connecte en série une résistance  $R$ , une inductance  $L$ , une capacité  $C$ , et un dipôle actif  $D$  à résistance négative de caractéristique  $U = -R_0I + bI^3$  ( $I$  le courant circulant dans le dipôle).

1. En coordonnées cartésiennes, ce même système est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y \\ \dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + x \end{cases}$$

Considérons le circuit électrique de la figure 7.3, constitué d'un circuit RLC en série avec dipôle actif  $D$  à résistance négative de caractéristique courant tension  $(U, I)$   $U = -R_0I + bI^3$  avec  $R_0, b > 0$ . On a donc

$$U = -\left(\frac{Q}{C} + RI + LI\dot{\phantom{I}}\right) = -R_0I + bI^3 \tag{7.2}$$

avec  $Q$  la charge du condensateur. Comme  $I = \dot{Q}$ , on obtient

$$L\ddot{I} + (R - R_0 + 3bI^2)\dot{I} + \frac{I}{C} = 0 \tag{7.3}$$

qui se réécrit sous la forme générique (en adimensionnant le temps et l'intensité)

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \tag{7.4}$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de van der Pol<sup>2</sup>. Apparue dès les premiers circuits avec des tubes électroniques, elle a été très étudiée tout au long de la théorie des systèmes dynamiques. Le paramètre  $\mu$  s'assimile à une viscosité, et est toujours positif. Pour  $\mu = 0$ , on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique. Pour  $\mu \neq 0$ , on a soit

- une dissipation positive si  $|x| > 1$ ;
- une dissipation négative si  $|x| < 1$ .

On comprend intuitivement que ce système dynamique va forcer les grandes oscillations à décroître et les petites à augmenter, conduisant ainsi le système vers un cycle limite.

Le système dynamique s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\mu y(x^2 - 1) - x. \end{cases} \tag{7.5}$$

dont le seul point fixe est l'origine. La matrice jacobienne s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}, \tag{7.6}$$

Elle est de trace  $\tau = \mu > 0$  et de déterminant  $\Delta = 1$ , l'origine est donc instable. On distingue alors trois cas selon le signe du discriminant  $\tau^2 - 4\Delta = \mu^2 - 4$  :

- $0 < \mu < 2$  : le discriminant est négatif, donc  $\lambda_{\pm} = (\mu \pm i\sqrt{4 - \mu^2})/2$  est de partie imaginaire non nulle et de partie réelle positive; il s'agit d'une **spirale instable**;
- $\mu = 2$  : le discriminant est nul, donc  $\lambda = 1 > 0$  ce qui implique que l'origine est un **nœud instable**;
- $\mu > 2$  : on a alors  $\lambda_{\pm} = (\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4})/2 > 0$  donc il s'agit d'un **nœud instable**.

L'origine est donc toujours un point fixe instable. Partant de l'origine on va alors spiraler vers un cycle limite proche d'une ellipse pour les faibles non linéarités ( $\mu \ll 1$ ), ou rejoindre rapidement un cycle limite plus "anguleux" lorsque  $\mu$  est grand. La figure 7.4 reporte le portrait de phase et la trace temporelle du système dynamique pour quelques valeurs de  $\mu$  : la non linéarité est marquée pour  $\mu$  grand, avec un signal périodique très différent d'une sinusoïde.

---

2. Balthasar van der Pol (1889 - 1959) était un physicien expérimentateur, connu pour ses travaux sur les oscillations non-linéaires et notamment l'équation qui porte son nom. En 1935 il reçoit la médaille d'or Valdemar Poulsen de l'Académie Technique Danoise.

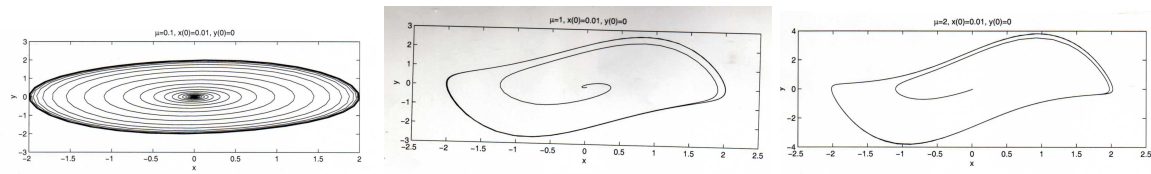


FIGURE 7.4 – Portrait de phase et trace temporelle de l’oscillateur de Van Der Pol pour quelques valeurs du paramètre  $\mu$ .

### 7.3 Éliminer la possibilité des orbites fermées

Après avoir illustré par quelques exemples la possibilité d’observer des cycles limites, nous allons aborder les outils qui permettent de **prévoir l’existence ou l’absence de solutions périodiques** pour un système dynamique. Nous commençons par leur absence : imaginons qu’expérimentalement ou numériquement on présume très fortement qu’un système ne possède pas d’orbites fermées ; comment le prouver ? Nous allons voir trois méthodes possibles.

#### 7.3.1 Système gradient

Supposons qu’on puisse écrire

$$\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V \tag{7.7}$$

où  $V(\mathbf{x})$  est une fonction continue et différentiable, appelée fonction potentielle. Si le système vérifie cette condition, on parle de système gradient.

**Théorème 3.** *Les orbites fermées sont impossibles pour les systèmes gradients.*

*Preuve.* On va raisonner par l’absurde et supposer qu’il existe une orbite fermée. On note  $T$  sa période, et on pose

$$\Delta V = V(\mathbf{x}(T)) - V(\mathbf{x}(0)) \tag{7.8}$$

Comme  $V$  est  $T$ -périodique,  $\Delta V = 0$ , et par ailleurs

$$\Delta V = \int dV \tag{7.9}$$

$$= \int_{\mathbf{x}(0)}^{\mathbf{x}(T)} \nabla V d\mathbf{x} \tag{7.10}$$

$$= \int_0^T \nabla V \dot{\mathbf{x}} dt \tag{7.11}$$

$$= - \int_0^T |\dot{\mathbf{x}}|^2 dt < 0 \tag{7.12}$$

sauf si  $\dot{\mathbf{x}} = 0$  tout au long du cycle.

On aboutit à une contradiction. Il n’existe donc pas d’orbite fermée pour un système gradient.

*Remarque.* Ce théorème est vrai pour toute dimension, en particulier pour la dimension 1. Or pour toute fonction  $f(x) = \dot{x}$  suffisamment régulière, on peut définir une fonction  $V(x)$  vérifiant

$$\nabla V = \frac{dV}{dx} = -f \tag{7.13}$$

ce qui signifie que les hypothèses du théorème sont toujours respectées à une dimension : on retrouve le fait que **les oscillations sont impossibles à une dimension.**



**Exemple** Le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = x \cos y \end{cases} \tag{7.14}$$

n'a pas d'orbite fermée. En effet, on vérifie facilement que  $\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V$  avec  $V(x, y) = -x \sin y$ .

### 7.3.2 Fonction de Lyapunov

Dans certains systèmes qui n'ont rien à voir avec la mécanique, on peut parfois construire une fonction analogue à une énergie qui décroît avec le temps le long des trajectoires. C'est ce qu'on appelle une fonction de Lyapunov. Si une telle fonction existe, les orbites fermées sont interdites.

**Théorème 4.** *Considérons un système dynamique  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{x}^*$  un point fixe. On suppose qu'il existe une fonction  $V$  qui soit  $\mathcal{C}^1$ , avec les propriétés*

1.  $V(\mathbf{x}^*) = 0$  ;
2.  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*, V(\mathbf{x}) > 0$  (on dit que  $V$  est définie positive) ;
3.  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*, \frac{dV}{dt} < 0$  .

Alors le point  $\mathbf{x}^*$  est globalement asymptotiquement stable, c'est-à-dire que pour toutes les conditions initiales,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ .

L'existence d'une telle fonction pour un point fixe permet de **prouver la stabilité globale** de ce dernier, l'ensemble de l'espace des phases constituant son bassin d'attraction. Ce critère est valable en toute dimension, mais il n'y a pas de manière systématique de construire une fonction de Lyapunov, il faut se servir de son intuition ou avoir une inspiration divine !

**Exemple** Montrons que le système décrit par

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases} \tag{7.15}$$

n'a pas d'orbite fermée.

Essayons la fonction  $V(x, y) = x^2 + ay^2$  où  $a \in \mathbb{R}^+$  est à déterminer. En choisissant  $a > 0$ ,  $V$  est définie positive. Par ailleurs

$$\dot{V} = 2x\dot{x} + 2ay\dot{y} \tag{7.16}$$

$$= -2x^2 - 2ay^4 + \underbrace{(8 - 2a)}_{= 0 \text{ si } a = 4} xy, \tag{7.17}$$

donc si l'on pose  $a = 4$ , la fonction  $V$  sera bien une fonction de Lyapunov et on a donc montré que le système ne possédait pas d'orbite fermée : toutes les trajectoires convergent vers l'origine.

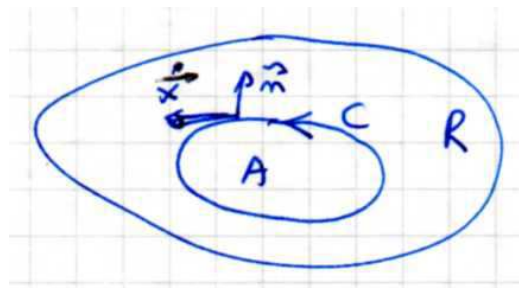
### 7.3.3 Critère de Dulac

**Théorème 5.** Si  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  est un champ de vecteur continu et différentiable, défini sur un sous ensemble  $\mathcal{R}$  simplement connecté de  $\mathbb{R}^2$ , et s'il existe une fonction  $g$  qui soit  $\mathcal{C}^1$  et telle que  $\nabla \cdot (g\dot{\mathbf{x}})$  ait un seul signe sur  $\mathcal{R}$  (strictement positif ou strictement négatif), alors le système n'a pas d'orbite fermée dans  $\mathcal{R}$ .

*Preuve.* Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une orbite fermée  $C \in \mathcal{R}$ . Soit  $A$  la région à l'intérieur de  $C$ . Alors d'après le théorème de Green-Stokes,

$$\iint_A \nabla \cdot (g\dot{\mathbf{x}}) \, dA = \oint_C g \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} \, ds \tag{7.18}$$

où  $\mathbf{n}(s)$  est le vecteur unitaire normal au contour en  $s$ . Comme l'intégrand de l'intégrale de gauche a un seul signe, le terme de gauche est non nul. En revanche le terme de droite est nul car comme  $\dot{\mathbf{x}}$  est un vecteur tangent à la trajectoire (illustration figure 7.5),  $\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Il y a une contradiction, d'où la validité du critère.



**FIGURE 7.5** – Démonstration par l'absurde du critère de Dulac : l'intégrale sur la surface  $A$  de la divergence du champ  $g\dot{\mathbf{x}}$  est non nul, mais le flux du champ à travers le contour d'une orbite fermée  $C$  l'est...

*Remarque.* 1. On peut prendre une hypothèse plus faible, par exemple que  $\nabla \cdot (g\dot{\mathbf{x}})$  soit non nul sur  $R$ , sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle.

*Remarque.* 2. Ce critère n'est valable qu'en dimension 2, l'aspect "bricolage" de l'énoncé n'étant pas étranger à ce fait.

**Exemple** Nous allons montrer que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y + x^2 + y^2 \end{cases}$$

défini n'admet pas de cycle limite. Posons fortuitement

$$g(x, y) = e^{-2x}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (g\dot{\mathbf{x}}) &= \partial_x (ye^{-2x}) + \partial_y ([-x - y + x^2 + y^2] e^{-2x}) \\ &= -2ye^{-2x} - e^{-2x} + 2ye^{-2x} \\ &= -e^{-2x} < 0 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure à l'impossibilité d'orbites fermées.

**Démonstration du théorème de Green-Stokes à 2D**

**Lemme :** Considérons un petit élément de surface  $dS = dx dy$  pour lequel on souhaite calculer la somme sur les 4 côtés de la quantité  $\vec{V} \cdot \vec{n} dl$  où  $\vec{n}$  est la normale au côté pointant vers l'extérieur de la surface. On notera  $V_x$  la composante selon l'axe  $x$ . La contribution du côté  $CD$  est  $-V_x(x = 0)dy$ . Celle du côté  $AB$  est  $V_x(x = dx)dy$ . La somme des deux contributions est donc

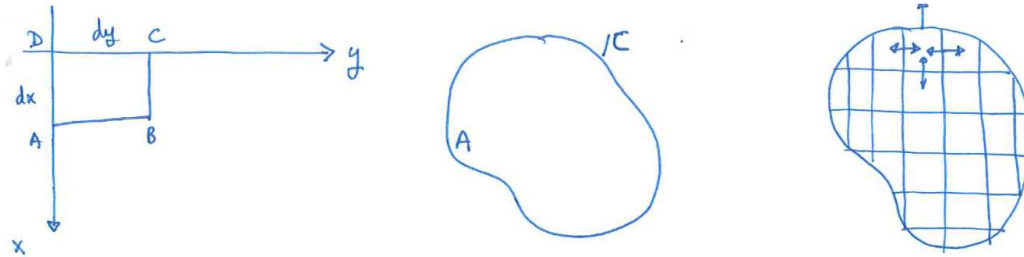
$$V_x(x = dx)dy - V_x(x = 0)dy = \left[ V_x(x = 0) + dx \frac{\partial V_x}{\partial x}(x = 0) \right] dy - V_x(x = 0)dy \tag{7.19}$$

$$= \frac{\partial V_x}{\partial x}(x = 0)dx dy \tag{7.20}$$

si l'on utilise le développement au premier ordre.

Il n'y a évidemment pas de raison de privilégier l'axe des  $x$ . On obtient une contribution similaire pour les 2 faces perpendiculaires à l'axe  $y$ , en remplaçant  $x$  par  $y$ . On aboutit à

$$\sum_{4 \text{ cotes}} \vec{V} \cdot \vec{n} dl = \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) dS \tag{7.21}$$



**Démonstration du Théorème**

Imaginons que l'aire  $A$  est divisée en un nombre arbitrairement grand de petits rectangles. Pour chacun d'entre eux, on a d'après le lemme précédent

$$\sum_{4 \text{ cotes}} \vec{V} \cdot \vec{n} dl = \text{div} \vec{V} dS. \tag{7.22}$$

En faisant la somme sur tous les carrés, on trouve que les termes  $\vec{V} \cdot \vec{n} dl$  s'éliminent pour tous les côtés intérieurs : seules les contributions extérieures subsistent. On aboutit donc à

$$\sum_{\text{cotes ext}} \vec{V} \cdot \vec{n} dl = \sum_{\text{tous les cotes}} \vec{V} \cdot \vec{n} dl = \sum_{\text{tous les volumes}} \text{div} \vec{V} dS. \tag{7.23}$$

De manière analogue à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme, on prend la limite lorsque le nombre de parallélépipède tend vers l'infini et les côtés de chacun tends vers zéro. On obtient

$$\int_C \vec{V} \cdot \vec{n} dl = \int_A \text{div} \vec{V} dS. \tag{7.24}$$

## 7.4 Le théorème de Poincaré-Bendixson

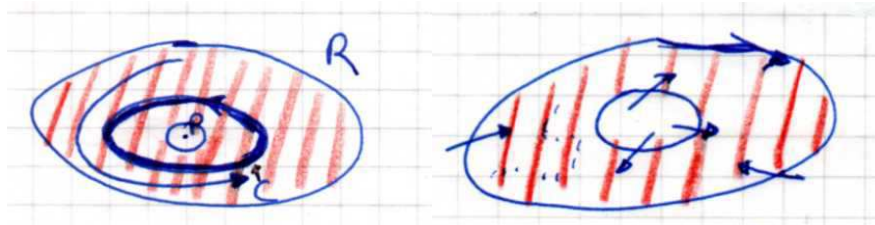
Grâce aux deux sections précédentes, nous avons à notre disposition quelques outils pour démontrer l'absence de cycle limite pour un système dynamique, ou contraindre leur existence. Nous cherchons maintenant à démontrer le contraire : *l'existence* d'un cycle limite dans un système dynamique. Le théorème de Poincaré-Bendixson est l'un des rares résultats dans cette direction, mais c'est l'un des plus importants dans les problèmes de dynamique non linéaire, car il implique que le chaos ne peut pas exister à 2 dimensions.

**Théorème 6.** *Supposons que*

1.  $\mathcal{R}$  est une partie du plan fermée et bornée ;
2.  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  est un champ de vecteurs continûment différentiable sur un ouvert contenant  $\mathcal{R}$  ;
3. Il n'y a pas de point fixe dans  $\mathcal{R}$  ;
4. Il existe une trajectoire  $C$  contenue dans  $\mathcal{R}$

Alors soit  $C$  est une orbite fermée, soit elle spirale vers une orbite fermée (qu'elle atteint pour  $t \rightarrow \infty$ ).

Les conditions 1 à 3 sont faciles à respecter ou vérifier, c'est la dernière condition qui est la plus difficile à prouver. L'astuce standard pour vérifier le point 4 consiste à construire une région  $\mathcal{R}$  fermée et connexe, de telle manière que les champs de vecteurs soient toujours dirigés vers l'intérieur au niveau des frontières. Toutes les trajectoires vont être confinées dans  $\mathcal{R}$  car "repoussées" par les bords (illustration figure 7.6). Si l'on peut montrer que  $\mathcal{R}$  ne contient pas de point fixe, alors le théorème s'applique. Dans le cas général toutefois, la vérification des hypothèses du théorème est délicate.



**FIGURE 7.6** – Illustration du théorème de Poincaré-Bendixson : si la région  $\mathcal{R}$  contient une trajectoire à temps long et aucun point fixe, alors elle contient une trajectoire fermée  $C$ . Remarque : nous avons dessiné  $\mathcal{R}$  comme un anneau car le cycle limite  $C$  entoure nécessairement un point fixe (ou plus), et  $\mathcal{R}$  n'en contient aucun.

**Exemple** Considérons le système dynamique décrit, en coordonnées polaires, par

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (7.25)$$

où  $\mu > 0$  (le cas  $\mu = 0$  a déjà été traité plus haut, et on a montré alors qu'il existait un cycle limite). Montrons qu'il existe une orbite fermée pour  $\mu > 0$  suffisamment petit.

Nous allons chercher deux cercles concentriques avec  $\dot{r} \leq 0$  pour le plus grand (de rayon  $r_{\max}$ ) et  $\dot{r} \geq 0$  pour le plus petit (de rayon  $r_{\min}$ ), de façon à ce que les trajectoires soient entrantes dans l'anneau  $\mathcal{A}$  délimité par ces deux cercles (illustration figure 7.7). Cet anneau fera office d'ensemble  $\mathcal{R}$  pour l'application du théorème ; comme  $\dot{\theta} \neq 0$ , il n'y a pas de point fixe dans  $\mathcal{A}$ , et donc si cet anneau existe, on a gagné. Reste à montrer l'existence et à expliciter  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$ .

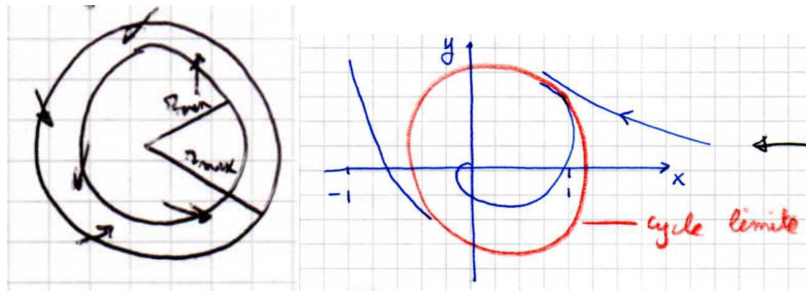
On utilise pour cela le caractère borné de la fonction cosinus :  $|\cos \theta| \leq 1$ , d'où

$$1 - r^2 - \mu \leq \frac{\dot{r}}{r} \leq 1 - r^2 + \mu \tag{7.26}$$

Il vaut mieux prendre  $r_{\min}$  le plus grand possible pour avoir la région  $\mathcal{R}$  la plus petite possible : un bon choix est  $r_{\min} = 0.999\sqrt{1 - \mu}$ . Pour  $r = r_{\min}$ , on a  $1 - r_{\min}^2 - \mu > 0 \Rightarrow \dot{r} > 0$  si  $\mu < 1$  sur le cercle  $r = r_{\min}$ . La définition de  $r_{\min}$  implique qu'on se restreigne à  $\mu < 1$ .

De la même manière, prenons  $r_{\max} = 1.001\sqrt{1 + \mu}$ . On a donc  $1 - r_{\max}^2 + \mu < 0 \Rightarrow \dot{r} < 0$  sur le cercle  $r = r_{\max}$ .

Il existe donc une orbite fermée contenue dans la région annulaire  $0.999\sqrt{1 - \mu} < r < 1.001\sqrt{1 + \mu}$  qui respecte donc le critère que l'on s'est fixé.



**FIGURE 7.7** – Application du théorème de Poincaré-Bendixson au système dynamique de l'équation (7.25) : la région  $\mathcal{R}$  est définie comme un anneau de rayons  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$  dans lequel les trajectoires sont uniquement entrantes. Cet anneau contient nécessairement un cycle limite, illustré à droite par une simulation numérique du système dynamique.

Lorsque les coordonnées polaires ne sont pas adaptées à un système dynamique donné, on peut aussi tenter de définir la région de capture à partir des nullclines.

**Épilogue** Le théorème de Poincaré-Bendixson est central, puisqu'il montre que les possibilités dans le plan sont très limitées. Lorsqu'une trajectoire est confinée dans une région fermée et bornée vierge de point fixe, alors la trajectoire est une orbite fermée, ou s'en approche asymptotiquement. Rien de plus compliqué ne peut arriver.

Ce résultat dépend fortement de la dimension du problème (ici  $d = 2$ ). Pour les systèmes à plus grande dimension ( $d \geq 3$ ), le théorème ne s'applique plus. La dynamique du système peut alors être bien plus exotique : les trajectoires peuvent tourner indéfiniment sans atteindre ni un point fixe, ni un cycle limite. Dans certains cas, les trajectoires tendent vers les objets complexes, appelés attracteurs étranges : un ensemble fractal sur lequel le mouvement est aperiodique est sensible à de très petites perturbations. Cette sensibilité rend impossible la prédiction à long terme : c'est le chaos!

12h en 2019

## 7.5 Oscillations de relaxation

Jusqu'ici nous avons privilégié le qualitatif, passons au quantitatif. Sachant qu'une orbite fermée existe, que peut-on dire sur sa forme et sa période? En général nous ne pourrions pas répondre de manière exacte (analytiquement), mais il est possible dans certains cas d'obtenir des expressions approximatives, notamment lorsque certains paramètres sont grands ou petits...

Nous allons illustrer cette approche sur l'oscillateur de Van der Pol dans la limite fortement non linéaire :

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \tag{7.27}$$

avec cette fois  $\mu \gg 1$ .

Nous allons démontrer que l'on obtient des cycles fermés, appelés oscillations de relaxation : une charge s'accumule jusqu'à un seuil de rupture où elle est libérée de manière soudaine. Ce comportement est analogue avec des situations diverses : oscillation de stick-slip d'un archet sur une corde de violon, comportement de cellules nerveuses soumises à un courant constant,...

Il est utile pour analyser cette équation d'effectuer un changement de variables : on réécrit l'équation de Van der Pol sous la forme

$$-x = \ddot{x} + \mu (x^2 - 1) \dot{x} = \frac{d}{dt} \left( \dot{x} + \underbrace{\mu \left( \frac{x^3}{3} - x \right)}_{F(x)} \right) \tag{7.28}$$

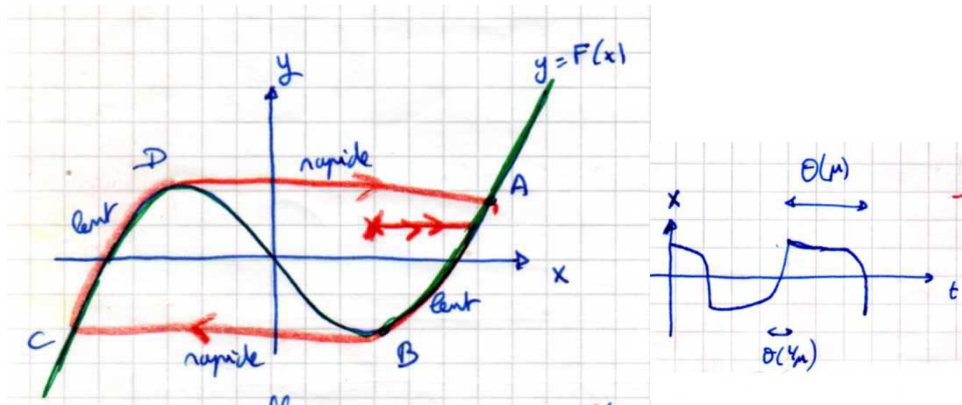
En notant ainsi  $F(x) = x^3/3 - x$ , on introduit une variable  $w$  telle que

$$\begin{cases} w = \dot{x} + \mu F(x) \\ \dot{w} = -x \end{cases} \tag{7.29}$$

On pose alors  $y = w/\mu$  pour obtenir le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu (y - F(x)) \\ \dot{y} = -\frac{1}{\mu} x \end{cases} \tag{7.30}$$

L'hypothèse  $\mu \gg 1$  guide alors l'analyse graphique du plan de phase : tant que  $y - F(x)$  est d'ordre 1, alors la vitesse du point est très grande selon  $x$  (d'ordre  $\mu$ ), et très faible selon  $y$  (d'ordre  $1/\mu$ ). Toute condition initiale va donc rejoindre très rapidement la courbe  $y = F(x)$ , sur une trajectoire essentiellement horizontale (illustration sur la figure 7.8).



**FIGURE 7.8** – Oscillations de relaxation de l'oscillateur de Van der Pol fortement non linéaire dans le plan de phase : en partant d'une condition initiale quelconque, le système dynamique rejoint la courbe définie par  $y = F(x)$  à grande vitesse (d'ordre  $\mu$ ), puis dérive lentement le long de cette courbe (vitesse d'ordre  $1/\mu$ ). Les extrema de cette courbe sont le siège d'un changement de comportement radical : le système dynamique passe alors par une phase rapide pour rejoindre l'autre branche lente du cycle limite d'oscillations. À droite, on reporte la trace temporelle de la variable  $x$  durant ces oscillations de relaxations : les périodes lentes impliquent des temps caractéristiques d'ordre  $\mu$ , les rapides d'ordre  $1/\mu$ .

Suffisamment proche de la courbe,  $y - F(x)$  devient d'ordre  $1/\mu^2$  : les composantes verticales et horizontales de la vitesse sont alors comparables et le système évolue le long de la courbe avec

une vitesse d'ordre  $1/\mu$ , très lentement. Il reste sur la courbe car cette dernière est stable pour des perturbations horizontales, et descend si  $x > 0$  ou monte si  $x < 0$ . Arrivé aux extrema locaux B ou D sur cette courbe, le système dynamique n'a d'autre choix que de quitter la courbe et se dirige alors vers C ou A à grande vitesse (d'ordre  $\mu$ ). On rejoint alors le voisinage de la courbe, et continue son cycle limite.

Les distances à parcourir sont d'ordre 1 dans le plan de phase, et la vitesse d'ordre  $\mu$  (phases rapides) ou  $1/\mu$  (phases lentes). **Il existe donc deux temps caractéristiques dans le cycle temporel** : des périodes lentes de temps caractéristique  $\mu$  et des périodes rapides de temps caractéristique  $1/\mu$ . On retrouve cette alternance dans la trace temporelle des variables  $x$  et  $y$  de la figure 7.8.

Calculons la période du cycle limite (toujours dans la limite  $\mu \gg 1$ ). Cette dernière correspond essentiellement aux 2 parties le long de la courbe, le temps pour effectuer les deux "sauts" étant négligeable. Comme le cycle limite est symétrique,

$$T \simeq 2 \int_{t_A}^{t_B} dt. \tag{7.31}$$

Par ailleurs, on sait que

$$\begin{aligned} -\frac{x}{\mu} &= \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \end{aligned} \tag{7.32}$$

Or, sur la portion de courbe considérée,  $y \simeq F(x)$ , donc  $\frac{dy}{dx} \simeq F'(x) = x^2 - 1$ . Ainsi,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-x}{\mu(x^2 - 1)} \tag{7.33}$$

$$dt = -\mu \left( x - \frac{1}{x} \right) dx \tag{7.34}$$

$$2 \int_{t_A}^{t_B} dt = 2 \int_{x_A}^{x_B} \mu \left( \frac{1}{x} - x \right) dx \tag{7.35}$$

$$T = \mu [2 \ln x - x^2]_{x_A}^{x_B} \tag{7.36}$$

Il est facile de montrer que  $x_A = 2$  et  $x_B = 1$ , on trouve alors que

$$T = \mu(3 - 2 \ln 2). \tag{7.37}$$

Cette période est d'ordre  $\mu$ , comme anticipé dans l'analyse qualitative.

Dans cet exemple, nous avons repéré une dynamique avec deux échelles de temps bien distinctes, qui interviennent de manière successive. Nous allons tenter dans les parties suivantes de généraliser cette approche à des cas où deux échelles de temps interviennent simultanément : il faudra être plus subtil, moins brutal dans notre approche...

## 7.6 Oscillations faiblement non linéaires

Considérons les équations de la forme

$$\ddot{x} + x + \epsilon h(x, \dot{x}) = 0 \tag{7.38}$$

où  $\epsilon \ll 1$ , et  $h$  est une fonction douce. Le terme  $\epsilon h(x, \dot{x})$  représente généralement un terme *non linéaire* qui s'ajoute à l'équation classique de l'oscillateur harmonique. De très nombreuses équations entrent dans cette catégorie :

- Van der Pol :  $\ddot{x} + x + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0$  ;
- Duffing :  $\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0$ .

On a vu que dans certains cas, on pouvait prévoir l'existence d'un cycle limite. Par exemple, la dynamique de l'oscillateur de Van der Pol dans la limite faiblement non linéaire est dans le plan de phase une spirale dont le rayon évolue lentement (par rapport à la période d'oscillation) pour tendre vers le cycle limite. Si tel est le cas, qu'en est-il de sa forme, de son rayon ou encore de sa période ? Nous allons tenter de répondre à ces questions en nous servant de la proximité de l'équation (7.38) avec celle de l'oscillateur harmonique.

### 7.6.1 Théorie des perturbations régulières (Poincaré-Lindstedt)

Pour simplifier, on étudie l'équation

$$\ddot{x} + x = -2\epsilon\dot{x} \tag{7.39}$$

qui est celle d'un oscillateur amorti, avec les conditions initiales

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 1. \tag{7.40}$$

Comme on connaît la solution analytique du problème, on va pouvoir évaluer l'efficacité de la méthode.

#### Solution exacte

On cherche les solutions de la forme  $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$ . Le paramètre  $\lambda$  doit donc vérifier

$$\lambda^2 + 2\epsilon\lambda + 1 = 0. \tag{7.41}$$

Le discriminant  $\epsilon^2 - 1$  est négatif puisque  $\epsilon$  est supposé petit. On a donc

$$\lambda_{\pm} = -\epsilon \pm i\sqrt{1 - \epsilon^2}. \tag{7.42}$$

La solution générale s'écrit alors

$$x(t) = e^{-\epsilon t} \left[ A \cos(\sqrt{1 - \epsilon^2} t) + B \sin(\sqrt{1 - \epsilon^2} t) \right]. \tag{7.43}$$

Avec les conditions initiales (7.40), on obtient finalement

$$x(t, \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} e^{-\epsilon t} \sin(\sqrt{1 - \epsilon^2} t). \tag{7.44}$$

#### Solution par la méthode des perturbations

On cherche  $x(t, \epsilon)$  sous la forme d'un développement en puissances de  $\epsilon$  :

$$x(t, \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots \tag{7.45}$$

où les fonctions  $x_k(t)$  doivent être déterminées, et où l'on suppose que chaque terme est négligeable devant les précédents : on souhaiterait retrouver l'information importante dans les premiers termes de cette série, idéalement les 2 premiers, et que les suivants ne soient que de faibles corrections. C'est la théorie des perturbations régulière due à Lindstedt pour l'astronomie (1882).

En injectant cette expression dans l'équation (7.39), on obtient

$$\ddot{x}_0 + x_0 + \epsilon(\ddot{x}_1 + x_1 + 2\dot{x}_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0, \tag{7.46}$$

équation qui doit être vérifiée à tout ordre en  $\epsilon$  :



- ordre  $\epsilon^0$  :  $\ddot{x}_0 + x_0 = 0$
- ordre  $\epsilon^1$  :  $\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_0 + x_1 = 0$
- ... (En étant optimiste, il sera inutile d'écrire les équations d'ordres plus élevés)

De même, les conditions initiales doivent être vérifiées à tout ordre en  $\epsilon$ , elle se résument à  $x_0(0) = x_1(0) = \dots = 0$ ,  $\dot{x}_0(0) = 1$  et  $\dot{x}_{k>0}(0) = 0$ .

On obtient donc  $x_0(t) = \sin t$ , que l'on injecte dans l'équation d'ordre  $\epsilon^1$ . Il vient

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2 \cos t \tag{7.47}$$

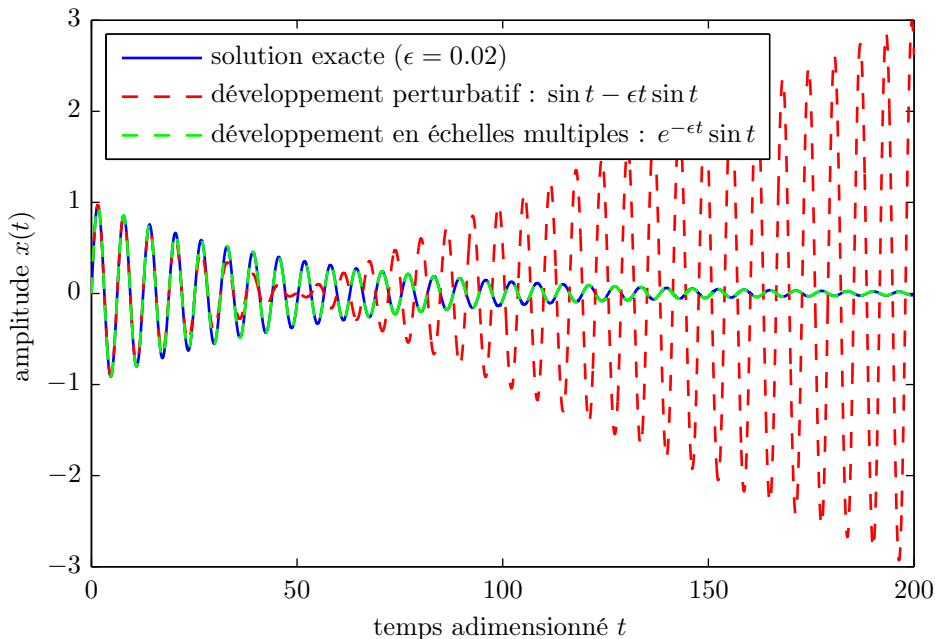
On reconnaît l'équation décrivant le forçage d'un oscillateur harmonique à sa fréquence propre  $\omega = 1$ . Cela va nécessairement induire des problèmes, car l'amplitude de  $x_1$  va diverger de sorte qu'il ne sera plus possible de négliger  $\epsilon x_1$  par rapport à  $x_0$ . Quoiqu'il en soit, la solution mathématique de l'équation (7.47) qui vérifie les conditions initiales est

$$x_1(t) = -t \sin t \tag{7.48}$$

d'où pour la solution globale :

$$x(t, \epsilon) = \sin t - \epsilon t \sin t + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \tag{7.49}$$

La comparaison avec la solution exacte sur la figure 7.9 met en évidence un écart qui diverge avec le temps. La "perturbation" n'en est plus une à temps long, on parle d'un terme séculaire : en astronomie, la théorie des perturbations régulière mène à des termes divergents à l'échelle du siècle... La solution perturbative suggère de manière erronée que la solution croît comme  $t \sin t$ , alors qu'elle décroît en réalité en  $e^{-\epsilon t}$ .



**FIGURE 7.9** – Solution exacte vs développement perturbatif classique d'un oscillateur harmonique faiblement amorti : le terme correctif diverge à temps long... Un traitement en échelle multiples permet a contrario de trouver une solution approchée valable à tout temps.

Ce développement n'est donc valable que pour  $\epsilon t \ll 1$ , et l'approche perturbative perd son sens à temps long où les termes correctifs explosent. Si on calcule tous les termes d'ordres supérieurs, on trouve une série convergente, mais on perd tout l'intérêt d'un traitement perturbatif...

La solution exacte fait intervenir deux échelles de temps, une rapide en  $t$  pour la partie sinusoïdale, l'autre lente en  $\epsilon t$  pour la partie exponentielle. De plus la pulsation exacte est  $\omega = \sqrt{1 - \epsilon^2} = 1 - \epsilon^2/2 + \dots$ . Après un temps d'ordre  $1/\epsilon^2$ , l'erreur sur la pulsation aura de grandes conséquences, ce qui suggère même l'existence d'une échelle de temps très lente,  $\epsilon^2 t$ .

### 7.6.2 Méthode des échelles multiples

Nous allons considérer deux échelles de temps,  $\tau = t$  et  $T = \epsilon t$ , et traiter ces deux variables comme indépendantes. Cette méthode n'a pas de justification propre et rigoureuse, mais elle marche ! L'analogie est de considérer que la taille d'un être humain est constante à l'échelle de la journée, mais varie à l'échelle de la vie.

La méthode consiste à chercher  $x(t, \epsilon)$  sous la forme

$$x(t, \epsilon) = x_0(\tau, T) + \epsilon x_1(\tau, T) + \epsilon^2 x_2(\tau, T) + \dots \tag{7.50}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= (\partial_\tau + \epsilon \partial_T) x. \end{aligned} \tag{7.51}$$

On trouve alors en développant :

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \tag{7.52}$$

$$\dot{x} = \partial_\tau x_0 + \epsilon (\partial_\tau x_1 + \partial_T x_0) + \epsilon^2 (\partial_\tau x_2 + \partial_T x_1) + \dots \tag{7.53}$$

$$\ddot{x} = \partial_\tau^2 x_0 + \epsilon (\partial_\tau^2 x_1 + 2\partial_T \partial_\tau x_0) + \epsilon^2 (\partial_\tau^2 x_2 + 2\partial_T \partial_\tau x_1 + \partial_T^2 x_0) + \dots \tag{7.54}$$

On injecte ces expressions dans l'équation (7.39) et, comme précédemment, on annule les ordres successifs en  $\epsilon$  :

- ordre  $\epsilon^0$  :  $\partial_\tau^2 x_0 + x_0 = 0$
- ordre  $\epsilon^1$  :  $\partial_\tau^2 x_1 + 2\partial_T \partial_\tau x_0 + x_1 = -2\partial_\tau x_0$
- ordre  $\epsilon^2$  :  $\partial_\tau^2 x_2 + 2\partial_T \partial_\tau x_1 + \partial_T^2 x_0 + x_2 = -2\partial_\tau x_1 - 2\partial_T x_0$

La solution à l'ordre 0 en  $\epsilon$  s'écrit

$$x_0(\tau, T) = A(T) \sin \tau + B(T) \cos \tau. \tag{7.55}$$

Les constantes  $A$  et  $B$  sont maintenant des fonctions de la variable lente  $T$ , que l'on doit déterminer à l'ordre suivant :

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 x_1 + x_1 &= -2\partial_T \partial_\tau x_0 - 2\partial_\tau x_0 \\ &= -2(A + A') \cos \tau + 2(B + B') \sin \tau, \end{aligned} \tag{7.56}$$

où  $A' = dA/dT$  et  $B' = dB/dT$ . On obtient à nouveau l'équation d'un oscillateur harmonique forcé à sa fréquence de résonance, qui va conduire à des termes séculaires en  $\tau \sin \tau$  et  $\tau \cos \tau$ . Cependant cette

fois, on peut **choisir**  $A$  et  $B$  de façon à éviter le forçage. Imposons donc  $A + A' = 0$  et  $B + B' = 0$ , on obtient alors

$$\begin{cases} A(T) = A(0)e^{-T} \\ B(T) = B(0)e^{-T} \end{cases} \quad (7.57)$$

Avec les conditions initiales ( $x(0) = 0$  et  $\dot{x}(0) = 1$ ), on en déduit que  $x(0) = B(T) = 0$ , et  $A(T) = e^{-T}$ , d'où

$$\begin{aligned} x_0(\tau, T) &= e^{-T} \sin \tau \\ &= e^{-\epsilon t} \sin t \end{aligned} \quad (7.58)$$

Le premier terme du développement contient à lui seul les caractéristiques dominantes de la solution exacte : une oscillation sinusoïdale rapide d'enveloppe exponentiellement décroissante. Le temps caractéristique de décroissance est celui de la solution exacte ( $1/\epsilon$ ), et la pulsation est correctement estimée à l'ordre  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ . La figure 7.9 illustre l'excellente précision de cette approche, dès ce terme d'ordre  $\epsilon^0$ .

Poursuivons le développement pour vérifier que tout se passe bien à l'ordre 1 en  $\epsilon$ . Comme on a éliminé les termes résonants de l'équation (7.56), on peut résoudre cette dernière, et la solution s'écrit

$$x_1(\tau, T) = C(T) \sin \tau + D(T) \cos \tau. \quad (7.59)$$

À nouveau, il faut aller à l'ordre suivant pour connaître l'évolution de  $C(T)$  et  $D(T)$ . L'équation pour l'ordre 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 x_2 + x_2 &= -2\partial_T \partial_\tau x_1 - \partial_T^2 x_0 - 2\partial_\tau x_1 - 2\partial_T x_0 \\ &= -2(C + C') \cos \tau + 2(D + D') \sin \tau + e^{-T} \sin \tau. \end{aligned} \quad (7.60)$$

La condition d'anti-résonance permettant d'éviter les termes séculaires pour  $x_2$  s'écrit donc

$$C + C' = 0 \quad (7.61)$$

$$D + D' = -\frac{1}{2}e^{-T}. \quad (7.62)$$

Les solutions générales de ces équations sont  $C(T) = C_0 e^{-T}$  et  $D(T) = D_0 e^{-T}$ .

Cherchons une solution particulière pour  $D$  avec la méthode de variation de la constante : on écrit  $D(T) = \Delta(T) e^{-T}$  et on reporte dans l'équation (7.62) :

$$\Delta(T) e^{-T} + \Delta'(T) e^{-T} - \Delta(T) e^{-T} = -\frac{1}{2}e^{-T} \quad (7.63)$$

$$\Delta'(T) = -\frac{1}{2} \quad (7.64)$$

$$\Delta(T) = D_0 - \frac{1}{2}T \quad (7.65)$$

Les conditions initiales se traduisent par  $C_0 = 0$  et  $D_0 = 0$ , ainsi

$$x_1(\tau, T) = -\frac{1}{2}T e^{-T} \cos \tau = -\frac{1}{2}\epsilon t e^{-\epsilon t} \cos t \quad (7.66)$$

La solution générale du problème par la méthode des échelles multiples s'écrit donc

$$x(t) = x_0 + \epsilon x_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (7.67)$$

$$= e^{-\epsilon t} \sin t - \frac{1}{2}\epsilon^2 t e^{-\epsilon t} \cos t + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (7.68)$$

$$= e^{-\epsilon t} \sin t + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (7.69)$$

Le terme d'ordre 1 est finalement nul ! Ce résultat est intuitif à partir de l'expression de la solution exacte

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} e^{-\epsilon t} \sin\left(\sqrt{1-\epsilon^2} t\right). \tag{7.70}$$

En effet,  $\sqrt{1-\epsilon^2} = 1 - \epsilon^2/2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$ , donc pas de terme d'ordre 1 et, à l'ordre 2, on obtient  $x = e^{-\epsilon t} \sin t + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ . La solution perturbative est donc le premier terme du développement de la solution exacte.

Si on souhaite améliorer la solution en explicitant l'ordre 2, il faut alors considérer une troisième échelle de temps très lente en introduisant  $\mathcal{T} = \epsilon^2 t$  dans l'analyse.

14h en 2019

### 7.6.3 Cas général

Au delà de cet exemple simple de l'oscillateur linéaire, on peut généraliser la démarche à un nombre quelconque d'échelles de temps, notées  $\tau_i = \epsilon^i t$ , en cherchant une solution de la forme

$$x(t) = x_0(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots) + \epsilon x_1(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots) + \dots \tag{7.71}$$

L'opérateur différentiel  $d/dt$  s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} = \partial_{\tau_0} + \epsilon \partial_{\tau_1} + \epsilon^2 \partial_{\tau_2} + \dots \tag{7.72}$$

À l'ordre  $\epsilon^0$ , on obtient une équation du type

$$\mathcal{L}_0 x_0 = 0, \tag{7.73}$$

où  $\mathcal{L}_0$  est un opérateur linéaire. On sait résoudre cette équation. À l'ordre  $\epsilon^1$ , on obtient génériquement

$$\mathcal{L}_0 x_1 = \mathcal{N}\mathcal{L}_1(x_0) \tag{7.74}$$

où  $\mathcal{N}\mathcal{L}_1$  est un opérateur (a priori non linéaire). On élimine les termes résonants de cette équation pour obtenir des contraintes sur l'évolution des paramètres lents à l'ordre 0, puis on résout l'équation non résonante. On passe ensuite à l'ordre 2, où l'équation se présente sous la forme

$$\mathcal{L}_0 x_2 = \mathcal{N}\mathcal{L}_2(x_0, x_1), \tag{7.75}$$

où  $\mathcal{N}\mathcal{L}_2$  est un nouvel opérateur (a priori non linéaire lui aussi). Il suffit alors de répéter la même stratégie jusqu'à l'ordre désiré !

### 7.6.4 Analyse qualitative par la méthode de la moyenne

Considérons à nouveau l'équation faiblement non linéaire

$$\ddot{x} + x + \epsilon h(x, \dot{x}) = 0 \tag{7.76}$$

et la quantité  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2$ . Lorsque  $\epsilon = 0$ ,  $\mathcal{E}$  est l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique. Étudions sa variation temporelle :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (\ddot{x} + x)\dot{x} = -\epsilon h(x, \dot{x})\dot{x} \tag{7.77}$$

et par conséquent, la différence d'énergie mécanique à l'instant  $t$  par rapport à l'instant  $t = 0$  s'écrit

$$\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(0) = \int_0^t \frac{d\mathcal{E}}{dt} dt = -\epsilon \int_0^t h(x, \dot{x}) \dot{x} dt.$$

On peut alors considérer plusieurs cas intéressants pour poursuivre la discussion :

1. Si  $\forall t, \dot{x}h(x, \dot{x}) > 0$ , alors  $\mathcal{E}(t) < \mathcal{E}(0)$  :  $h$  joue le rôle d'un amortissement, l'énergie diminue.  $\mathcal{E}$  est ici une fonction Lyapunov pour le système dynamique, l'origine est alors un point fixe globalement stable et attractif.
2. Si  $\forall t, \dot{x}h(x, \dot{x}) < 0$ , alors  $\mathcal{E}(t) > \mathcal{E}(0)$  :  $h$  joue le rôle d'une source d'énergie, et l'énergie augmente continûment. Il n'existe pas de point fixe ni de cycle limite.
3. Dans le cas général,  $\dot{x}h$  est tantôt positif, tantôt négatif, et on ne peut pas dire grand chose. Supposons néanmoins que l'on ait un cycle limite de période  $T$ . Dans ce cas  $\mathcal{E}(T) = \mathcal{E}(0)$ , donc

$$\int_0^T h(x, \dot{x}) \dot{x} dt = 0 \tag{7.78}$$

d'où le nom de "méthode de la moyenne".

**Exemple** Considérons l'équation de van der Pol sous la forme

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - \alpha)\dot{x} + x = 0. \tag{7.79}$$

On a alors, avec la terminologie précédente  $h(x, \dot{x}) = \dot{x}(x^2 - \alpha)$ . On distingue alors deux cas, en fonction du signe du paramètre  $\alpha$ .

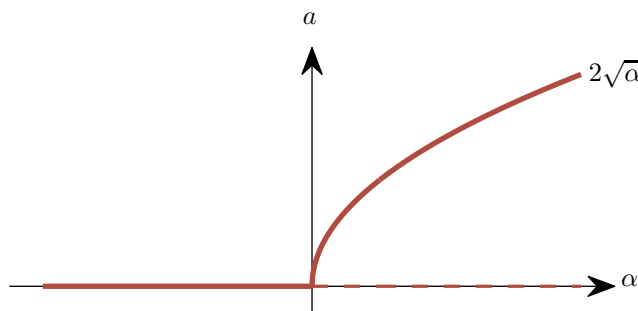
$\alpha < 0$  : On a alors

$$\int_0^T \underbrace{(x^2 - \alpha)}_{>0} \dot{x}^2 dt = 0 \tag{7.80}$$

donc  $\dot{x} = 0$  pour tout  $t$ , on retrouve le fait que le seul cycle limite est le point fixe.

$\alpha > 0$  : Supposons toujours  $\epsilon$  faible afin d'avoir une dynamique proche de celle de l'oscillateur harmonique. On s'attend donc qu'à l'ordre le plus bas,  $x(t) \simeq a \cos t$ . On a donc

$$\int_0^T \dot{x}^2 (x^2 - \alpha) dt = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2 t (a^2 \cos^2 t - \alpha) dt = 0 \Rightarrow a^2 \left( \frac{a^2}{4} - \alpha \right) \pi = 0 \Rightarrow a = 2\sqrt{\alpha}$$



**FIGURE 7.10** – Le rayon  $a$  du cercle limite de l'oscillateur de van der Pol faiblement non linéaire est décrit par une bifurcation fourche avec  $\alpha$  le paramètre de contrôle.

Le rayon du cycle limite de l'équation de van der Pol, dans la limite des faibles non-linéarités, est donc piloté par une bifurcation fourche en fonction du paramètre de contrôle  $\alpha$  (voir figure 7.10).

Dans l'exemple de la figure 7.3, le circuit électronique décrit par l'oscillation de van der Pol présente cette bifurcation lorsque la résistance négative  $R_0$  devient plus grande (en valeur absolue) que la résistance  $R$  du circuit.

## 7.7 Évolution dans l'espace des phases

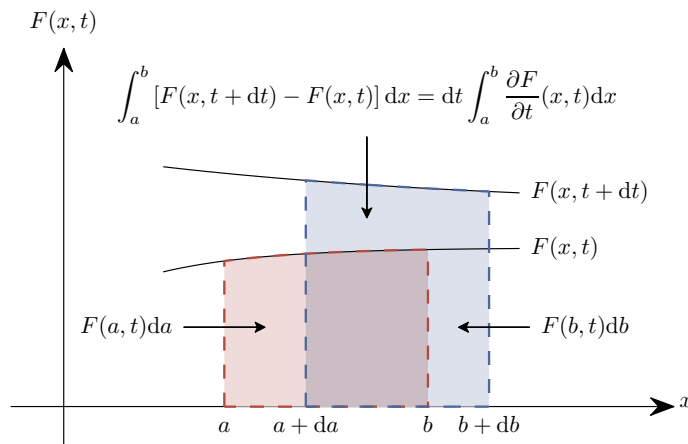
Pour caractériser l'évolution du système dynamique dans l'espace des phases il peut être utile de comprendre l'évolution temporelle d'un volume  $V(t)$  (une surface à deux dimensions, un segment à une dimension) : soit l'ensemble des conditions initiales dans  $V(t = 0)$ , comment ces points se comportent-ils à temps long ?

On considère ainsi  $V(t)$ , un volume dans l'espace des phases. On cherche à savoir comment évolue ce volume avec le temps, i.e. à calculer

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} dV. \tag{7.81}$$

On a donc besoin de savoir comment évolue une intégrale dont les bornes et l'intégrant dépendent du temps.

### Intuition à une dimension



**FIGURE 7.11** – Démonstration du Théorème de Leibniz : l'évolution de l'aire sous la courbe est la somme de la contribution de l'évolution de la courbe elle-même, et des contributions des termes de bord.

À l'aide de la figure 7.11, on démontre facilement le théorème de Leibniz qui décrit comment évolue une intégrale à une dimension :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} F(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} F dx + \frac{db}{dt} F(b, t) - \frac{da}{dt} F(a, t) \tag{7.82}$$

Cette formule se généralise à  $d$  dimensions en la formule du transfert de Reynolds, valable pour tout tenseur  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  et tout volume  $V(t)$ .

### Formule du transfert de Reynolds

Soit un flot de vitesse  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ . Pour tout tenseur  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  et pour toute région de l'espace (fixe ou pas)  $V(t)$  de frontière  $S(t)$ , on a

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_{V(t)} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} dV + \iint_{S(t)} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_S \cdot d\mathbf{S} \tag{7.83}$$

où  $\mathbf{v}_S$  représente la vitesse du volume  $V$  à la frontière  $S$ .

*Remarque.* Dans le membre de droite de l'équation, le premier terme représente la **variation explicite en temps** du tenseur  $F(\mathbf{x}, t)$ , tandis que le second est lié à l'**advection par le flot** du volume d'intégration  $V(t)$ .

La formule du transfert de Reynolds constitue en fait une généralisation de la formule cinématique d'Euler

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F} \tag{7.84}$$

On parle aussi de dérivée lagrangienne, particulière, ou encore totale. L'opérateur  $\mathbf{v} \cdot \nabla$  est l'opérateur d'advection. Le tenseur  $\mathbf{F}$  peut être un scalaire (la température par exemple ; on en verra un exemple dans la troisième partie), un vecteur (le champ magnétique  $\mathbf{B}$  si l'on considère un écoulement de particules chargées), etc.

Prenons le cas très simple  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = 1$ . On obtient alors pour le système dynamique  $\mathbf{v}_S = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} dV &= \frac{dV}{dt} = \iiint_{V(t)} 0 \cdot dV + \iint_{S(t)} 1 \cdot \mathbf{v}_S d\mathbf{S} \\ &= \iiint_{V(t)} \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV \end{aligned} \tag{7.85}$$

Il est important de noter que cette formule peut être utilisée pour des systèmes dynamiques de dimension quelconque. Étudions les conséquences de cette propriété sur quelques exemples.

### Exemple 1 : Oscillateur harmonique

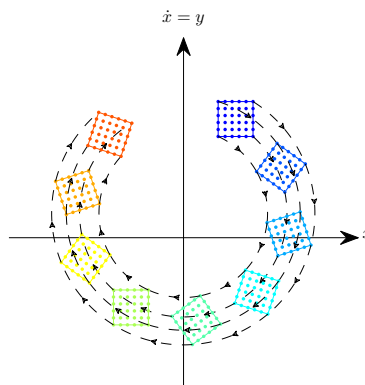
Décrivons très classiquement l'oscillateur harmonique  $\ddot{x} + x = 0$  sous la forme d'un système du premier ordre à deux dimensions :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = -x \end{cases} \tag{7.86}$$

donc

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \partial_x y - \partial_y x = 0 \tag{7.87}$$

ce qui implique que  $V(t) = \text{cte} = V(0)$ . Le volume dans l'espace des phases reste donc constant : on parle de conservation des aires. La figure 7.12 illustre cette propriété : en partant d'une surface initiale carrée, on conserve la même aire au cours de l'évolution du système.



**FIGURE 7.12** – Dans le plan de phase, les aires sont conservées lors de l'évolution temporelle de de l'oscillateur harmonique  $\ddot{x} + x = 0$ .

### Exemple 2 : Oscillateur harmonique amorti

L'oscillateur harmonique amorti  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x = 0$  est décrit à deux dimensions par

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = -x - \gamma y \end{cases} \quad (7.88)$$

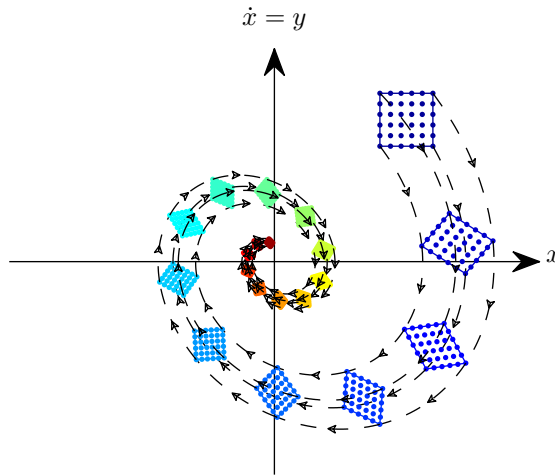
donc

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \partial_x y - \partial_y (x + \gamma y) = -\gamma \quad (7.89)$$

Ainsi

$$\frac{dV}{dt} = - \iiint_{V(t)} \gamma dV = -\gamma V(t) \Rightarrow V(t) = V(0) e^{-\gamma t}. \quad (7.90)$$

On observe donc une contraction exponentielle du volume (ici une surface) dans l'espace des phases, comme illustré par la figure 7.13. **Cette contraction, contrôlée par l'amortissement  $\gamma$ , traduit la dissipation d'énergie lors de l'évolution temporelle du système.** Pour  $\gamma = 0$ , on retrouve la conservation du volume.



**FIGURE 7.13** – Simulation numérique de l'oscillateur harmonique amorti  $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x = 0$  avec  $\gamma = 0.4$ . Dans le plan de phase, les aires sont contractées lors de l'évolution temporelle. L'effet est de type : oscillateur harmonique (rotation) + amortissement (contraction) → évolution vers le point fixe (l'origine).

### Exemple 3 : Oscillateur de van der Pol

L'oscillateur de van der Pol générique  $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$  est décrit à deux dimensions par

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \ddot{x} = -x - \mu(x^2 - 1)y \end{cases} \quad (7.91)$$

donc

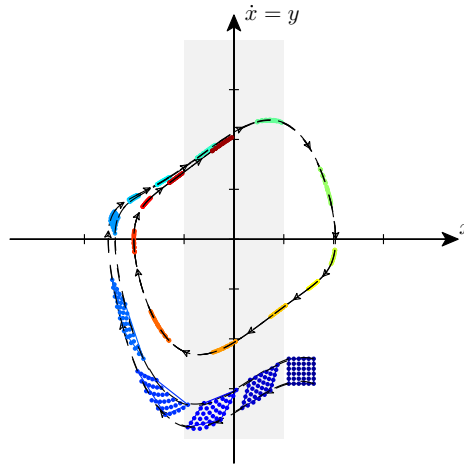
$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \partial_x y - \partial_y (x + \mu(x^2 - 1)y) = -\mu(x^2 - 1) \quad (7.92)$$

Ainsi

$$\frac{dV}{dt} = -\mu \iiint_{V(t)} (x^2 - 1) dV \quad (7.93)$$

On observe donc une contraction du volume dans les deux demi-plans définis par  $|x| > 1$ , et une dilatation du volume dans la bande définie par  $|x| < 1$ .





**FIGURE 7.14** – Simulation numérique de l’oscillateur de van der Pol  $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$  avec  $\mu = 0.6$ . Dans le plan de phase, la surface des conditions initiales choisies vient s’écraser sur le cycle limite. Les aires sont en expansion dans la bande grisée ( $|x| < 1$ ), et en contraction dans le reste du plan.

### Cas général

Dans le cas général,  $\text{div } \mathbf{f}$  dépend de la position  $\mathbf{x}$  dans l’espace des phases. On parle de contraction lorsque  $\text{div } \mathbf{f} < 0$ , et de dilatation lorsque  $\text{div } \mathbf{f} > 0$ .

Lorsque le système est caractérisé par des régions où  $\text{div } \mathbf{f} < 0$ , on parle de systèmes dissipatifs. Il y a alors des zones attractives dans l’espace des phases (l’origine pour un oscillateur harmonique amorti, le cycle limite pour l’oscillateur de van der Pol). On emploie le terme générique d’attracteur.

Nous verrons que dans le cas de systèmes chaotiques, il existe un autre type d’attracteur : les attracteurs étranges (qui sont des ensembles fractals).

### Systèmes Hamiltoniens

Considérons les systèmes Hamiltoniens, i.e. des systèmes à  $6N$  variables dont les vecteurs à  $3N$  composantes vérifient les équations dites de Hamilton :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \tag{7.94}$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = +\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \tag{7.95}$$

ce qui dans notre terminologie constitue un système dynamique à  $6N$  dimensions. On a alors

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{f} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{q}} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{p}} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7.96}$$

**Les équations de Hamilton préservent donc le volume dans l’espace de phases ;** on parle de système non dissipatif ou conservatif. Les systèmes Hamiltoniens n’ont ainsi pas d’attracteur au sens usuel du terme. L’incompressibilité dans l’espace des phases est liée au Théorème de Liouville.



# Chapitre 8

## Retour sur les bifurcations

Nous allons étendre à deux dimensions ce que nous avons étudié à une dans le chapitre 3. Les points fixes peuvent toujours être créés ou détruits lorsque l'on modifie un paramètre, mais notre catalogue s'est étoffé à 2D des orbites fermées : nous pouvons désormais également étudier la création ou disparition de mouvements périodiques.

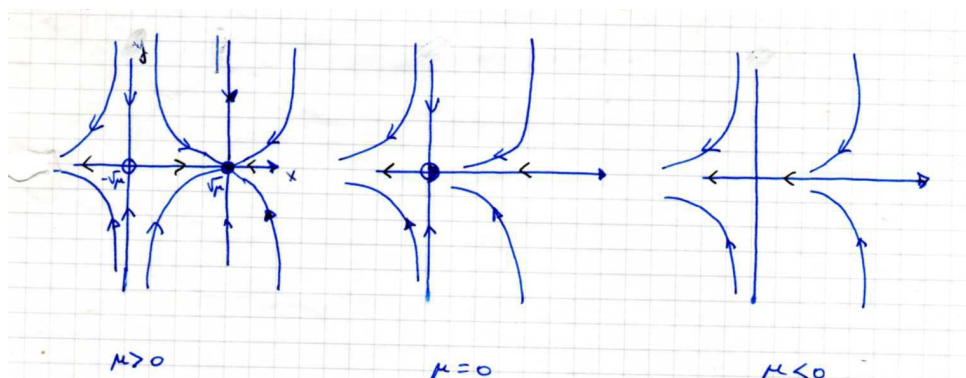
### 8.1 Bifurcations nœud-col, transcritiques et fourches

Les bifurcations de points fixes sont identiques aux cas à une dimension, et ce dans toutes les dimensions supérieures : rien d'original ni de nouveau ici. Toute l'action est confinée au sous espace de dimension 1 le long duquel a lieu la bifurcation. Dans toutes les autres dimensions, le flot est une attraction ou répulsion simple de ce sous espace.

#### 8.1.1 Bifurcation nœud-col

La bifurcation nœud-col est le mécanisme de base de création et destruction de points fixes. Le prototype d'une telle bifurcation est le système décrit par

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 & \text{Partie unidimensionnelle (équation vue à 1d).} \\ \dot{y} = -y & \text{Mouvement exponentiellement amorti dans la seconde direction.} \end{cases} \quad (8.1)$$



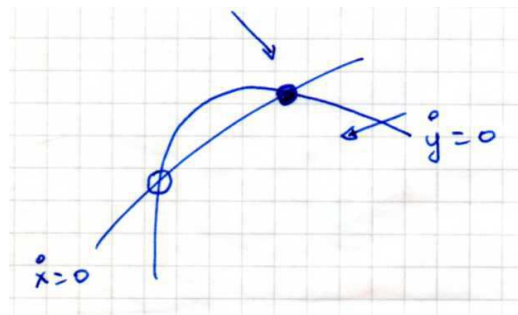
**FIGURE 8.1** – La bifurcation nœud-col correspond à l'annihilation de 2 points fixes dans l'espace des phases. Une direction joue un rôle neutre, ici la convergence exponentielle vers  $y = 0$  verticalement.

Lorsque  $\mu > 0$ , il existe deux points fixes,  $(\sqrt{\mu}, 0)$  qui est stable (nœud stable), et  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  qui est instable (col). Au fur et à mesure que  $\mu$  diminue, les deux points fixes se rapprochent, coalescent à  $\mu = 0$ , puis disparaissent, comme illustré par la figure 8.1

Cet exemple est le prototype du cas plus général :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\mu(x, y) \\ \dot{y} = g_\mu(x, y) \end{cases} \tag{8.2}$$

représenté sur la figure 8.2 : les points fixes sont à l'intersection des deux nullclines  $\dot{x} = f_\mu(x, y) = 0$  et  $\dot{y} = g_\mu(x, y) = 0$ , ces deux courbes perdant leur intersection lorsque  $\mu$  varie. Il y a alors collision des deux points fixes lorsque les courbes sont tangentes. Sauf cas particuliers, la continuité des fonctions  $f_\mu$  et  $g_\mu$  impose que les deux points fixes soient de stabilité opposée. Toutes les bifurcations nœud-col ont *localement* cette structure.



**FIGURE 8.2** – Une bifurcation nœud-col à deux dimensions correspond dans l'espace des phases à la perte de l'intersection des deux nullclines  $\dot{x} = f_\mu(x, y) = 0$  et  $\dot{y} = g_\mu(x, y) = 0$  lorsque le paramètre de contrôle  $\mu$  varie.

**Exemple**

Nous allons étudier un modèle pour un système de contrôle génétique, proposé par Griffith (1971). L'activité d'un certain gène est supposée directement conditionnée par deux copies de la protéine qu'il code : le gène est stimulé par son produit, créant un *feedback* auto-catalytique. En notant  $x$  la concentration de la protéine, et  $y$  celle de l'ARN messenger la codant, ce modèle propose la dynamique suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + y \\ \dot{y} = \frac{x^2}{1 + x^2} - by, \end{cases} \tag{8.3}$$

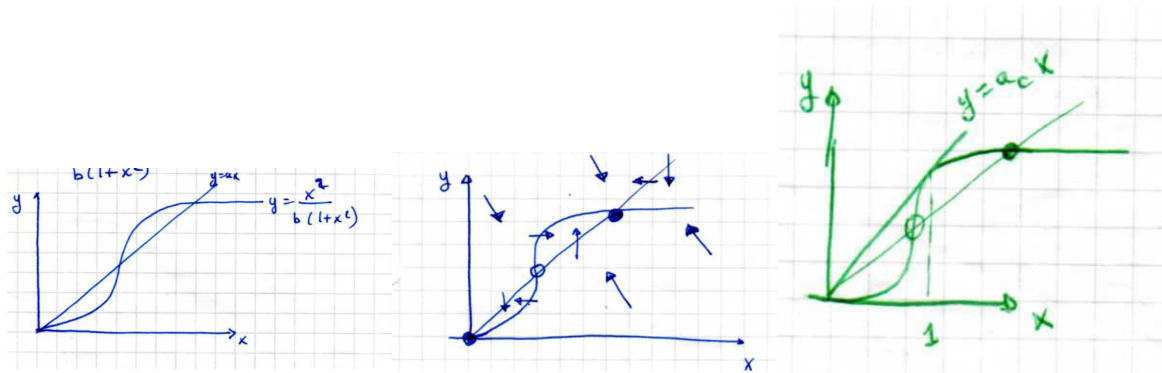
où  $(a, b)$  sont deux paramètres positifs qui modélisent la dégradation de la protéine et de l'ARN. En supposant qu'on fixe le paramètre  $b$ , nous allons montrer qu'il y a une bifurcation nœud-col contrôlée par le paramètre  $a$ .

Un point fixe d'un tel système dynamique va vérifier

$$y^* = ax^* \tag{8.4}$$

$$y^* = \frac{x^{*2}}{b(1 + x^{*2})}, \tag{8.5}$$

ce qui implique que pour déterminer les points fixes graphiquement, il suffit de considérer les intersections des deux nullclines d'équation  $y = ax$  et  $y = \frac{x^2}{b(1+x^2)}$ . La figure 8.3 illustre ce problème



**FIGURE 8.3** – On représente les nullclines du système dynamique (8.3), les champs de vecteurs étant verticaux sur la droite bleue et horizontaux sur la droite rouge. Lorsque  $a > a_c = 1/(2b)$ , le seul point fixe est l'origine.

mathématique simple : lorsque  $a$  varie, la droite  $y = ax$  présente entre 1 et 3 points d'intersection avec l'autre courbe. En reportant la direction du flot sur les nullclines dans le cas des trois points d'intersection, on réalise intuitivement que le point fixe central est un col (instable), quand les deux autres sont attractifs.

La valeur seuil  $a_c$  de  $a$  associée à la disparition de deux points fixes correspond au cas où les deux courbes sont tangentes. D'après ce qui précède, un point fixe du système vérifie

$$\frac{x^{*2}}{1 + x^{*2}} = abx^*, \tag{8.6}$$

une équation polynomiale du second degré dont  $x^* = 0$  est solution. Les autres solutions sont alors racines de

$$x^{*2} - \frac{1}{ab}x^* + 1 = 0 \tag{8.7}$$

de discriminant  $D = (ab)^{-2} - 4$ . Lorsque  $a = a_c$  il y a coalescence de deux points fixes ; cela correspond donc à  $D = 0$ , soit

$$a_c = \frac{1}{2b} \tag{8.8}$$

Au passage, notons que  $x_c^* = x^*(a_c) = 1/(2a_c b) = 1$ .

Vérifions analytiquement la stabilité des points fixes. La matrice jacobienne du système en  $(x^*, y^*)$  s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x^*}{(1+x^{*2})^2} & -b \end{pmatrix}. \tag{8.9}$$

On a donc  $\tau = -(a + b) < 0$ .

Si  $x^* = 0$ ,  $\Delta = ab > 0$ . Comme l'on a en outre  $\tau^2 - 4\Delta = (a - b)^2 > 0$ , l'origine est donc un point fixe stable

Pour les autres points fixes,

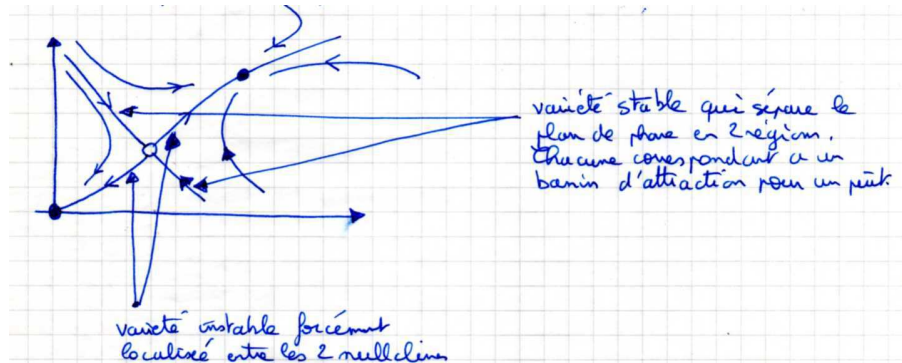
$$\Delta = ab - \frac{2x^*}{(1 + x^{*2})^2} \tag{8.10}$$

et donc d'après l'équation (8.7),

$$\Delta = ab \left( 1 - \frac{2x}{1 + x^{*2}} \right) = \frac{ab(x^{*2} - 1)}{1 + x^{*2}}. \tag{8.11}$$

Pour  $x_-^* < x_c^* = 1$ , on a ainsi  $\Delta < 0$ , donc un col, tandis que pour  $x_+^* > x_c^* = 1$ , on observe un nœud stable.

On peut ainsi tracer le portrait de phase du système sur la figure 8.4



**FIGURE 8.4** – Portrait de phase du système dynamique 8.3. Les variétés instables du point col sont très contraintes par la positions des nullclines. La variété stable du col sépare l'espace des phase en deux bassins d'attraction.

L'interprétation biologique du système dynamique est celui d'un commutateur biochimique si et seulement si  $ab < 1/2$  (pour avoir  $\Delta > 0$  et donc trois points fixes), c'est-à-dire **si le taux de dégénération est suffisamment faible**.

Dans ce cas à trois points fixes, il y aura deux états stables :

- à l'origine : le gène est silencieux et il n'y a pas d'expression de la protéine.
- à  $x_+^* \neq 0$  : le gène est actif et soutenu par une quantité importante de protéines.

La variété stable joue le rôle de seuil et indiquera si le gène est ou n'est pas exprimé.

*Remarque* : Le schéma est très proche de celui de la figure 8.1 : la bifurcation est fondamentalement 1D puisque toutes les trajectoires relaxent vers la bifurcation initiale. Elle correspond aux 2 points fixes qui se rapprochent. Cela justifie tous les efforts consacrés à l'étude du cas unidimensionnel, qui se retrouve à toute dimension !

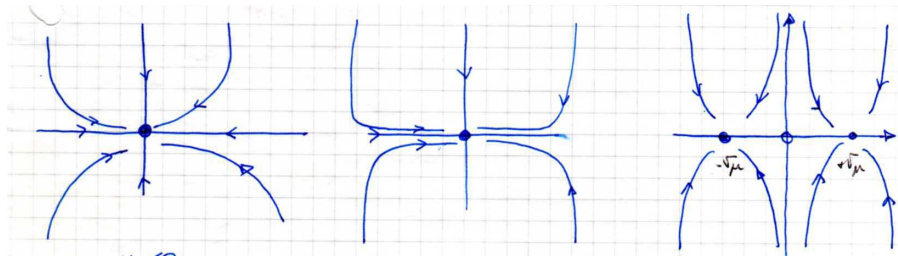
### 8.1.2 Bifurcations fourches et bifurcations transcritiques

On peut à nouveau construire des prototypes (des formes normales) en prenant pour la dynamique de la variable  $x$ , les prototypes du cas 1D et un mouvement exponentiel amorti pour la variable  $y$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad \text{Bifurcation transcritique.} \quad (8.12)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad \text{Bifurcation fourche supercritique.} \quad (8.13)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad \text{Bifurcation fourche sous-critique.} \quad (8.14)$$



**FIGURE 8.5** – Bifurcation fourche supercritique. La figure de gauche pour  $\mu < 0$ , met en évidence un seul nœud stable à l’origine. Celle au centre, pour  $\mu = 0$ , correspond à une décroissance critique (critical slowing down) car très lente (algébrique en temps et non plus exponentielle). Enfin, la figure de droite pour  $\mu > 0$  a un point fixe instable à l’origine et deux points fixes stables et symétriques.

**Exercice**

Les bifurcation fourches apparaîtront dans les systèmes avec symétrie comme nous l’avons déjà vu. Considérons par exemple,

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y + \sin x \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \tag{8.15}$$

Montrer que c’est une bifurcation fourche supercritique qui a lieu à l’origine. Tracer ensuite le portrait de phase près de l’origine pour  $\mu > \mu_c$  et proche de  $\mu_c$ .

*Solution* (à ne pas faire en cours).

Le système est invariant par la transformation  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$  qui correspond à la symétrie par rapport à l’origine.

L’origine est d’ailleurs un point fixe et le Jacobien en ce point est

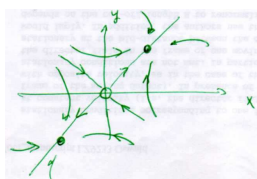
$$J = \begin{pmatrix} \mu + 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{8.16}$$

qui a pour trace  $\tau = \mu$  et discriminant  $\Delta = -(\mu + 2)$ . On a donc un point fixe stable si  $\mu < -2$  et un col si  $\mu > -2$ . Cela suggère donc effectivement qu’une bifurcation fourche a lieu pour  $\mu = \mu_c = -2$ .

Pour confirmer cela, cherchons une paire symétrique de points fixes proches de l’origine quand  $\mu$  est proche de  $\mu_c$ . Le point fixe vérifie  $\mu(x^* + 1) + \sin x^* = 0$  et  $x^* = y^*$ . Dans le régime  $x \ll 1$ , on peut réécrire cette expression sous la forme  $\mu(x^* + 1) + x^* - x^{*3}/6 = \mathcal{O}(x^{*5})$ , qui conduit à  $x^* = \pm\sqrt{6(\mu + 2)}$  pour  $\mu > \mu_c$  et proche de  $\mu_c = -2$ .

Remarque : La bifurcation est supercritique car les deux points fixes n’existent que lorsque l’origine n’est plus stable. Sinon elle aurait été sous-critique. En outre, comme la bifurcation est supercritique, on sait sans le vérifier que les nouveaux points fixes sont stables.

Près de  $\mu = \mu_c$ , le Jacobien pour l’origine est  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , qui a pour vecteur propre  $\mathbf{V}_+ = (1, 1)$  et  $\mathbf{V}_- = (1, -1)$  avec les valeurs propres correspondantes 0 et 2.



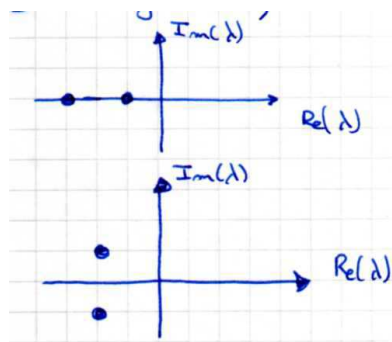
**FIGURE 8.6** – Portrait de phase près du point de bifurcation.

## 8.2 Bifurcation de Hopf

À deux dimensions, quelles sont les possibilités pour qu'un système dynamique perde sa stabilité lorsque l'on modifie un paramètre ? La réponse se trouve dans les valeurs propres du Jacobien.

Si le point fixe est stable, cela veut dire que la partie réelle des deux valeurs propres est négative. Les deux valeurs propres sont donc dans le demi-plan gauche. Par ailleurs, comme les valeurs propres sont solutions d'une équation du second degré à coefficients réels, il n'y a que deux possibilités.

- Soit deux valeurs propres **réelles négatives**.
- Soit deux valeurs propres **complexes conjuguées**.

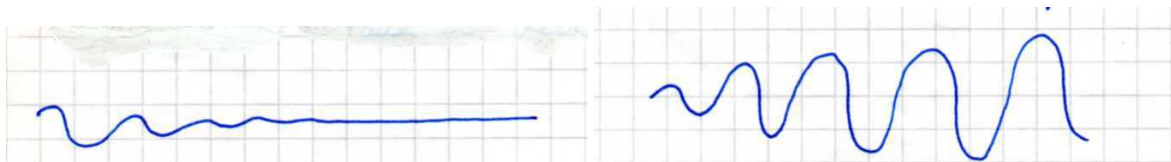


Pour que le point fixe se déstabilise, il faut donc que l'une (ou les deux!) entrent dans la partie droite, i.e. dans la zone où la partie réelle des valeurs propres est positive.

Nous venons de considérer le premier cas pour décrire les bifurcations fourches et transcritique. Considérons désormais l'autre situation.

### 8.2.1 Bifurcation de Hopf supercritique

Supposons que l'on considère un système qui va vers l'équilibre avec des oscillations exponentiellement amorties. Supposons par ailleurs que le taux de décroissance est un paramètre noté  $\mu$ .



**FIGURE 8.7** – Si  $\mu < \mu_c$ , on a l'amortissement exponentiel de gauche. Si, au contraire,  $\mu > \mu_c$ , l'état d'équilibre perd sa stabilité pour  $\mu = \mu_c$ , puisqu'il n'y a plus croissance mais croissance.

Dans de nombreux cas, le mouvement correspond à une oscillation de petite amplitude.

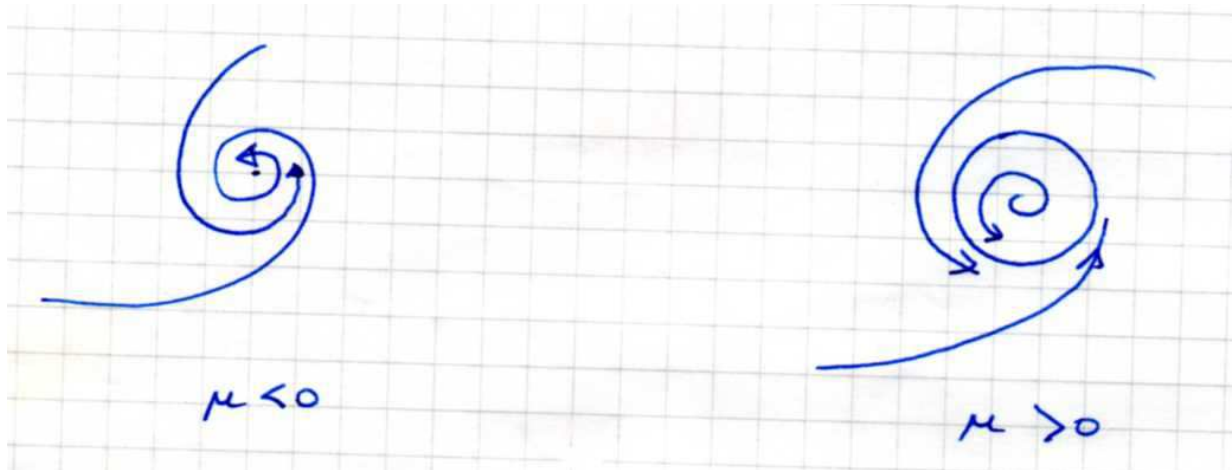
Bifurcation de Hopf supercritique : une spirale stable change en une spirale instable entourée par un petit cycle limite elliptique. C'est en 2 dimensions qu'on le rencontre pour la première fois, mais ce type de bifurcations existe aussi pour  $D > 2$ .

#### Exemple

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = \omega + br^2 \end{cases} \quad (8.17)$$

Le paramètre  $\mu$  contrôle la stabilité de l'origine,  $\omega$  la fréquence des petites oscillations, alors que  $b$  détermine la fréquence pour les grandes amplitudes.





**FIGURE 8.8** – Pour  $\mu < 0$ , l'origine est une spirale stable dont le sens de rotation dépend du signe de  $\omega$ . En revanche, pour  $\mu > 0$ , il y a une spirale instable autour de l'origine mais un cycle limite pour  $r^* = \sqrt{\mu}$ . Notons que pour  $\mu = 0$ , il y a toujours une spirale mais avec une décroissance algébrique.

Pour étudier les valeurs propres, il est plus facile de passer en cartésienne. À partir de  $x = r \cos \theta$ , on en déduit

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \tag{8.18}$$

$$= (\mu r - r^3) \cos \theta - r(\omega + br^2) \sin \theta \tag{8.19}$$

$$= [\mu - (x^2 + y^2)]x - [\omega + b(x^2 + y^2)]y \tag{8.20}$$

$$= \mu x - \omega y + \text{Termes cubiques.} \tag{8.21}$$

De la même manière on aboutit à  $\dot{y} = \omega x + \mu y + \text{Termes cubiques}$ .

On en déduit donc que le Jacobien à l'origine est

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}, \tag{8.22}$$

qui conduit aux valeurs propres  $\lambda_{\pm} = \mu \pm i\omega$  qui croiseront l'axe imaginaire lorsque l'on augmentera effectivement  $\mu$ .

### 8.2.2 Bifurcation de Hopf sous-critique

C'est une situation plus dramatique pour les applications puisque le système saute vers un attracteur éloigné qui peut être 1 point fixe, 1 cycle limite, l'infini ou même un attracteur chaotique lorsque l'on considèrera des cas  $d \geq 3$  comme pour le modèle de Lorenz.

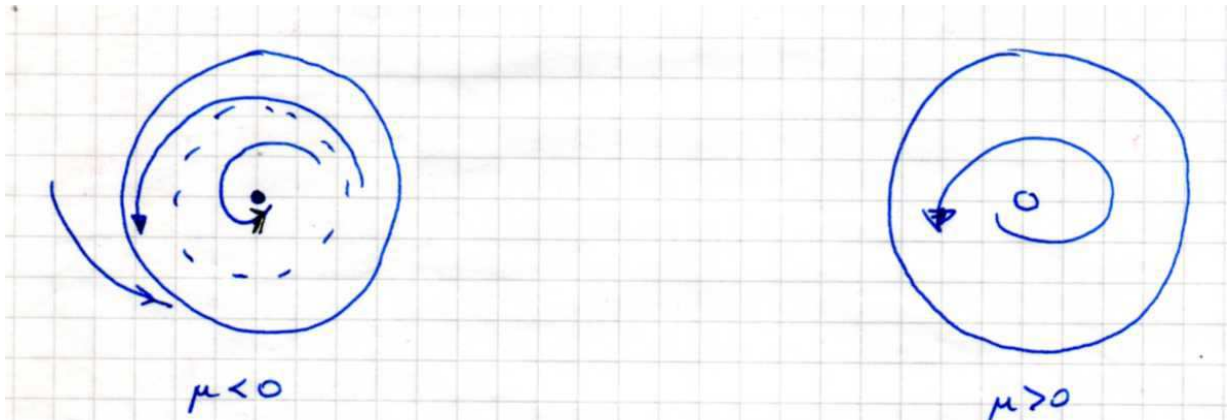
Un exemple proche de l'exemple discuté dans le cas supercritique est

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} = \omega + br^2 \end{cases}, \tag{8.23}$$

dans lequel on note le terme cubique déstabilisant.

Lorsque le paramètre  $\mu$  augmente, le cycle limite instable se réduit et se rapproche du point fixe pour entrer en collision avec lui en  $\mu = 0$ , le rendant instable.

Les solutions de petites amplitudes autour de l'origine sont alors obligées de croître avec des oscillations de grande amplitude : c'est bien une bifurcation sous-critique avec des conséquences très visibles.



**FIGURE 8.9** – Pour  $\mu < 0$ , il y a deux attracteurs : l'origine est une spirale stable dont le sens de rotation dépend du signe de  $\omega$  ainsi qu'un cycle limite pour une valeur  $r_+^* = \sqrt{1/2 + \sqrt{\mu + 1/4}} \neq 0$ . Il y a forcément un cycle limite instable entre les deux pour  $r_-^* = \sqrt{1/2 - \sqrt{\mu + 1/4}}$ . En revanche, pour  $\mu > 0$ , il n'y a qu'un seul attracteur, le cycle limite  $r_+^*$ , puisqu'il y a une spirale instable autour de l'origine.

*Remarque* : Il y a un hystérésis. Une fois que  $\mu > 0$ , si l'on décroît le paramètre  $\mu$ , il faut attendre la valeur  $\mu = -1/4$  avant que les oscillations de grande amplitude ne cessent par collision entre les cycles limites stables et instables.

*Exemples de bifurcation sous-critique* :

- Dynamique de cellules nerveuses
- Vibrations des ailes d'avion
- Instabilités de fluides

**Exemple**

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + xy^2 \\ \dot{y} = x + \mu y + y^3 \end{cases} \quad (8.24)$$

Montrer que ce système dynamique a une bifurcation de Hopf. Déterminer si elle est sous-critique ou supercritique.

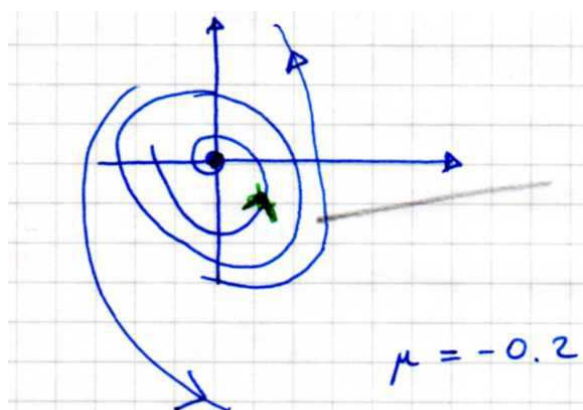
À l'origine, la matrice Jacobienne s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}, \quad (8.25)$$

qui a pour trace  $\tau = 2\mu$  et pour déterminant  $\Delta = \mu^2 + 1 > 0$ . Le polynôme caractéristique  $(\lambda - \mu)^2 + 1 = 0$  conduit aux valeurs propres  $\lambda = \mu \pm i$ .

Lorsque le paramètre de contrôle  $\mu$  augmente, on passe donc d'une spirale stable pour  $\mu < 0$ , à une spirale instable pour  $\mu > 0$ . Il y a donc bien une bifurcation de Hopf pour  $\mu = 0$ . À ce stade, cependant, on ne sait pas si elle est sous-critique ou supercritique.

En passant en polaire, on aboutit à  $\dot{r} = \mu r + r y^2 \geq \mu r$ . Pour  $\mu > 0$ , la quantité  $r$  croît plus vite qu'exponentiellement puisque la borne inférieure de l'inégalité précédente conduit à la solution  $r_0 e^{\mu t}$ . Les trajectoires partent donc vers l'infini et il n'y a pas d'orbite fermée pour  $\mu > 0$ . La spirale instable n'est donc pas entourée par un cycle limite stable : la bifurcation ne peut donc pas être supercritique. Elle est donc sous-critique et c'est bien confirmée par le portrait de phase dessiné sur la figure 8.10.



**FIGURE 8.10** – Portrait de phase tracé pour  $\mu = -0.2$  avec un cycle limite instable entoure le point fixe. Si l'on augmente la valeur de  $\mu$  ; le cycle limite va entourer le point fixe.

### 8.3 Réactions chimique oscillantes : oscillateurs chimiques.

Un exemple fameux : la réaction de Belousov-Zhabotinskii.

► En 1958, le biochimiste russe Boris Pavlovitch Belousov découvrit par hasard une réaction aux propriétés surprenantes : contrairement à ce qui s'était toujours vu, cette réaction présentait des oscillations de concentrations de certaines espèces. À cause de la guerre froide, il ne parvint pas à faire partager sa découverte au monde scientifique si ce n'est par une courte publication dans une revue méconnue (Sbornik Referatov po Radiacni Medecine).

► En 1961, Anatol Zhabotinsky, étudiant en biophysique, consacra sa thèse à l'étude de la réaction de Belousov. Ce fut le commencement d'un intérêt grandissant pour l'étude des systèmes chimiques oscillants et son extension aux phénomènes non linéaires.

► L'oxydation de l'acide malonique par l'ion bromate est plus simple et présente des oscillations dans les concentrations de certaines espèces. Elle est décrite dans l'article suivant : Shakhashiri B.Z. (1985) Cerium catalyzed Bromate-Malonic Acid reaction Chemical Demonstration vol 2 pp.257-261

Pour la présentation, prendre trois éprouvettes :

1. Verser dans le bêcher qui contient un barreau magnétique 31 mL de solution A et 18 mL de solution B
2. Agiter 1 min.
3. Verser ensuite 57 mL de solution C et puis 10 gouttes de ferroïne.
4. Maintenir l'agitation.
5. Le passage au vert est rapide, le reste de l'évolution est lente.

A  $33^{\circ}\text{C}$ , la période est de 30 s. On a facilement plus de 40 oscillations. A  $25^{\circ}\text{C}$ , c'est beaucoup plus lent. L'idéal est d'avoir des solutions tièdes (en fait, la solution C à  $50^{\circ}\text{C}$  suffit puisqu'elle réchauffe les autres).

### 8.4 Bifurcation globale de cycles

À deux dimensions, il y a 4 possibilités pour qu'un cycle limite soit créé ou détruit. La bifurcation de Hopf est la plus célèbre, la plus importante mais il y en a d'autres.

- Bifurcation noeud-col de cycles
- Bifurcations de période infinie
- Bifurcation homocline

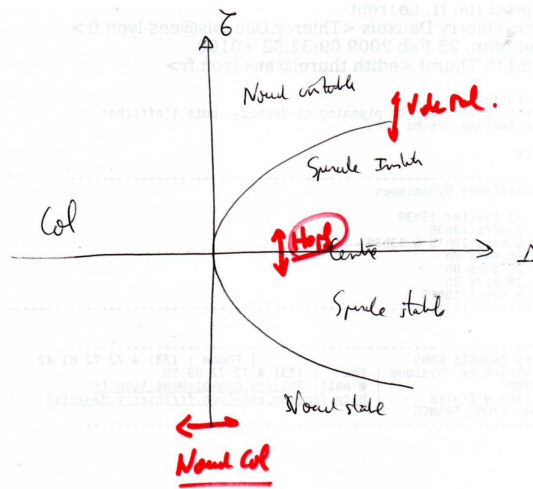


FIGURE 8.11 –

### 8.5 Sections de Poincaré

Ces sections de Poincaré sont utiles pour étudier des flots tourbillonnants, comme ceux près d’une orbite périodique.

Considérons un système à  $n$  dimensions :  $\dot{x} = f(x)$  et  $S$  une section de dimension  $n - 1$ , transversale au flot (jamais parallèle).

La section de Poincaré est l’application de  $S$  vers elle-même ; obtenue en suivant l’intersection d’une trajectoire avec  $S$  à la prochaine.

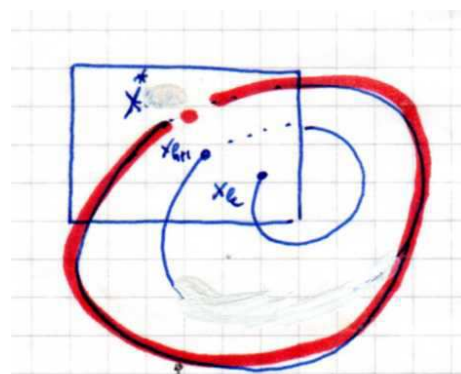


FIGURE 8.12 – Principe schématique de la section de Poincaré, dans un cas où il y a un cycle limite dessiné en rouge.

$x_{k+1} = P(x_k)$ . Si  $x^*$  est un point fixe de  $P$ , cela signifie qu’une trajectoire qui démarre en  $x^*$  retourne toujours en  $x^*$ , après un certain temps  $T$ . C’est donc une orbite fermée pour le système d’origine.

En outre, en étudiant le comportement de  $P$  autour de ce point fixe, on peut déterminer la stabilité de l’orbite fermée.

Cette méthode permet de transformer la recherche d’orbites fermées généralement difficile en la recherche de points fixes d’une application, ce qui est généralement plus simple.

**Exemple**

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (8.26)$$

Déterminer l'application de Poincaré associée à ce système dynamique en prenant pour  $S$  l'axe des  $x$ . Montrer que ce système a une orbite périodique unique et déterminer sa stabilité.

*Solution*

Soit  $r_0$  le point de départ. Comme  $\dot{\theta} = 1$ , le premier retour sur  $S$  a lieu pour  $t = 2\pi$  et  $r_1 = P(r_0)$  avec

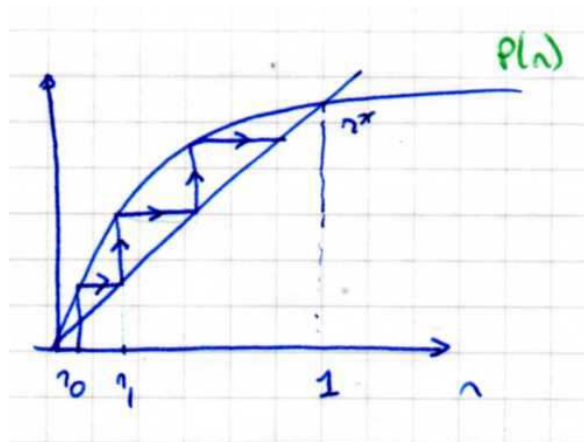
$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r(1 - r^2)} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \quad (8.27)$$

$$= -\frac{1}{2} [\ln(r^{-2} - 1)]_{r_0}^{r_1} \quad (8.28)$$

qui conduit à

$$r_1 = [1 + e^{-4\pi}(r_0^{-2} - 1)]^{-1/2} = P(r_0). \quad (8.29)$$

En traçant cette application unidimensionnelle comme indiqué sur la figure 8.13, on réalise qu'il y a deux points fixes mais un stable pour  $r^* = 1$  au niveau de l'intersection entre  $P(r)$  et la bissectrice.



**FIGURE 8.13** – Principe schématique de la section de Poincaré, dans un cas où il y a un cycle limite dessiné en rouge.

Cette méthode graphique permet par conséquent de résoudre cette application de manière graphique. Elle est très souvent utilisée.



Troisième partie

Dynamique chaotique



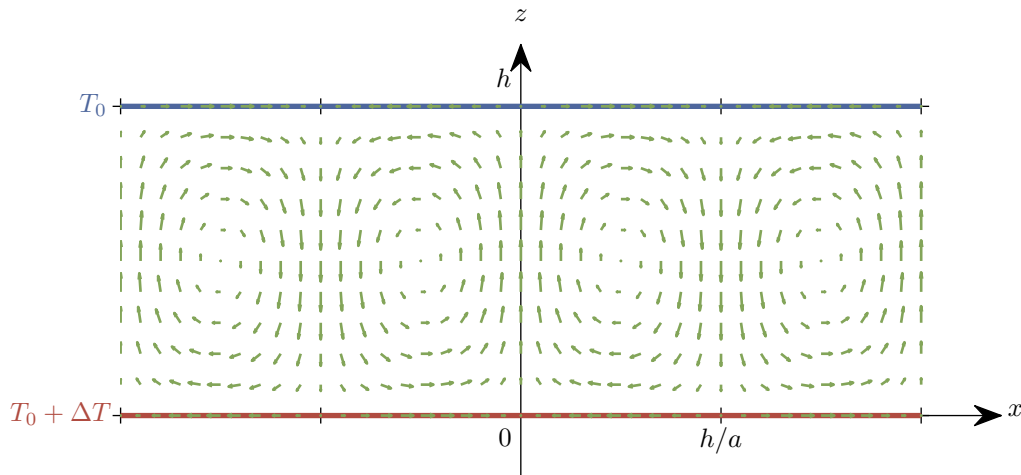


# Chapitre 9

## Modèle de Lorenz

### 9.1 Introduction

Ce modèle a été introduit pour décrire qualitativement l'évolution de l'atmosphère et étudier la faisabilité des prédictions météorologiques. Il est fondé sur une simplification (non contrôlée!) des équations hydrodynamiques qui gouvernent la convection de Rayleigh-Bénard.



**FIGURE 9.1** – Convection de Rayleigh-Bénard : lorsqu'un fluide est chauffé par le bas, au delà d'un seuil pour la différence de température, le fluide se met en mouvement et des rouleaux de convection apparaissent. La hauteur de la cellule est  $h$ , et le paramètre  $a$  (sans dimension) définit le rapport d'aspect des rouleaux.

On étudie donc un fluide chauffé par le bas : il est confiné entre 2 plaques horizontales, orthogonales au champ de température, avec

$$\Delta T = T_{\text{bas}} - T_{\text{haut}} > 0 \quad (9.1)$$

- Pour  $\Delta T$  suffisamment petit, le transfert de chaleur se fait uniquement par diffusion (sans mouvement du fluide).
- Au delà d'un certain seuil (caractérisé par le nombre de Rayleigh critique  $R_c$ ), il apparaît des rouleaux de convection qui augmentent l'efficacité du transfert de chaleur.
- Si  $\Delta T$  est suffisamment grand, les rouleaux eux-même deviennent instables.

Le modèle de Lorenz se concentre sur cette instabilité secondaire : il suppose un régime périodique en espace, et étudie l'amplitude des premiers modes de la décomposition dans l'espace de Fourier du champ de température et de la fonction de courant. Nous présentons dans les lignes qui suivent les étapes principales de la dérivation du modèle de Lorenz à partir des équations de la mécanique des fluides.

### 9.1.1 Dérivation du modèle de Lorenz

On note  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  le champ de vitesse du fluide, et  $T(\mathbf{x}, t)$  le champ de température. L'évolution spatio-temporelle de  $\mathbf{v}$  et  $T$  est régie par l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (9.2)$$

l'équation de conduction de la chaleur

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T, \quad (9.3)$$

et l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (9.4)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $\mathbf{g}$  la gravité,  $p$  la pression,  $\mu$  la viscosité dynamique, et  $\kappa$  la diffusivité thermique.

On travaille dans l'approximation de Boussinesq, qui suppose que les coefficients (et notamment  $\rho$ ) sont indépendants de la température, à l'exception du terme de poussée d'Archimède pour lequel on suppose une dépendance linéaire de la densité avec la température

$$\rho \mathbf{g} = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \mathbf{g} \quad (9.5)$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'expansion thermique.

On suppose de plus que la solution est invariante par translation selon  $y$ . L'écoulement est alors bidimensionnel et incompressible, et l'équation (9.4) se simplifie en

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (9.6)$$

Il est alors possible de définir une fonction de courant  $\psi$  de l'écoulement telle que

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (9.7)$$

$$u_z = +\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (9.8)$$

Les conditions aux limites pour la température sont

$$T(x, y, z = 0, t) = T_0 + \Delta T \quad (9.9)$$

$$T(x, y, z = h, t) = T_0. \quad (9.10)$$

Introduisons la différence de température au profil linéaire

$$\theta(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}, t) - \left( T_0 + \Delta T \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \right). \quad (9.11)$$

L'équation (9.3) devient alors

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \theta - \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \theta - \Delta T \frac{z}{h} \right) \quad (9.12)$$

$$= \kappa \nabla^2 \theta + \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (9.13)$$

$$= \kappa \nabla^2 \theta + \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} - J(\psi, \theta). \quad (9.14)$$

De même, l'équation de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq devient

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = \nu \nabla^4 \psi + g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} - J(\psi, \nabla^2 \psi) \quad (9.15)$$

avec  $\nu = \mu/\rho$  la viscosité cinématique.

Pour simplifier ces équations, Lorenz utilise comme conditions aux limites une température fixe et une vitesse verticale nulle sur les plaques

$$\theta(x, z = 0, t) = \theta(x, z = h, t) = 0 \quad (9.16)$$

$$\psi(x, z = 0, t) = \psi(x, z = h, t) = 0 \quad (9.17)$$

$$\nabla^2 \psi(x, z = 0, t) = \nabla^2 \psi(x, z = h, t) = 0. \quad (9.18)$$

Il ne retient de plus que les termes d'ordre le plus bas dans le développement en série de Fourier spatiale de  $\psi$  et  $\theta$ . Il introduit donc  $X(t)$ ,  $Y(t)$  et  $Z(t)$  sous la forme

$$\frac{a}{1+a^2} \frac{1}{\kappa} \psi = \sqrt{2} X(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \quad (9.19)$$

$$\frac{\pi R}{R_c \Delta T} \theta = \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right), \quad (9.20)$$

où le nombre de Rayleigh  $R$  et sa valeur critique  $R_c$  sont définis par

$$R = \frac{gah^3}{\kappa\nu} \Delta T \quad (9.21)$$

$$R_c = \pi^4 \frac{(1+a^2)^3}{a^2}. \quad (9.22)$$

En injectant ces expressions dans les équations (9.14) et (9.15), on obtient les équations de Lorenz

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \quad (9.23)$$

$$\dot{Y} = rX - Y - XZ \quad (9.24)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \quad (9.25)$$

où le temps est redéfini par  $\tau = \pi^2 h^{-2} (1+a^2) \kappa t$ ,  $\sigma = \nu/\kappa$  est le nombre de Prandtl,  $b = 4/(1+a^2)$  est un paramètre lié au rapport d'aspect des rouleaux et  $r = R/R_c$  est le paramètre de contrôle (nombre de Rayleigh réduit).

### 9.1.2 Au delà de la convection...

Ces mêmes équations peuvent être obtenues pour des systèmes très différents : lasers, dynamos couplées, roue à eau chaotique... Lorenz a découvert que ce modèle pouvait avoir une dynamique erratique aléatoire alors qu'il paraît pourtant assez simple. La solution oscille de manière irrégulière, sans se répéter mais tout en restant dans la même région. En représentant la trajectoire 3D, il a découvert une structure compliquée que l'on appelle désormais attracteur étrange. Contrairement aux points fixes, aux cycles limites, ce n'est ni un point, ni une courbe, ni une surface, c'est une fractale de dimension entre 2 et 3! Nous allons préciser ce que tout cela veut dire.

## 9.2 Propriétés simples des équations de Lorenz

Nous allons essayer de suivre la démarche de Lorenz pour éliminer par les méthodes traditionnelles toutes les possibilités. Les amplitudes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont renommées en  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans la suite pour alléger les équations.

**Non linéarités** Il n'y a que deux termes non linéaires, tous du second ordre.

**Symétries** Le système est invariant dans la transformation  $(x, y) \leftrightarrow (-x, -y)$ . Donc si  $(x, y, z)$  est une solution, alors  $(-x, -y, z)$  l'est également.

**Contraction du volume** On sait que l'évolution d'un volume  $V$  est pilotée par l'équation (7.85)

$$\dot{V} = \iiint_V \nabla \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dV. \quad (9.26)$$

Pour le modèle de Lorenz, on obtient

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{x}} = \partial_x(-\sigma x + \sigma y) + \partial_y(rx - y - xz) + \partial_z(xy - bz) \quad (9.27)$$

$$= -\sigma - 1 - b \quad (9.28)$$

et donc

$$\dot{V} = -(\sigma + 1 + b)V \quad \Rightarrow \quad V(t) = V_0 e^{-(\sigma+1+b)t}. \quad (9.29)$$

Le système est dissipatif : le volume de l'espace des phase se contracte exponentiellement vers un attracteur de volume nul, qui sera un ensemble de points fixes, de cycles limites ou un attracteur étrange selon les paramètres.

**Recherches de points fixes** Les points fixes vérifient

$$x = y \quad (9.30)$$

$$x(r - 1 - z) = 0 \quad (9.31)$$

$$x^2 = bz. \quad (9.32)$$

L'origine  $(0, 0, 0)$  est donc toujours un point fixe. De plus, pour  $r > 1$ , il existe une paire de points fixes symétriques

$$x^* = y^* = \pm \sqrt{b(r - 1)} \quad (9.33)$$

$$z^* = r - 1. \quad (9.34)$$

Ces points fixes, appelés  $C^+$  et  $C^-$  par Lorenz, correspondent aux rouleaux de convection. Ils coalescent à l'origine dans une bifurcation fourche pour  $r \rightarrow 1$ .

**Stabilité de l'origine** En linéarisant les équations au voisinage de l'origine, on a

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y \quad (9.35)$$

$$\dot{y} = rx - y \quad (9.36)$$

$$\dot{z} = -bz. \quad (9.37)$$

La dernière équation est découplée et correspond à une décroissance exponentielle de  $z$  vers 0. On peut donc oublier cette dimension. Le Jacobien restant à deux dimensions est

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.38)$$

La trace  $\tau = -\sigma - 1$  est négative et le déterminant vaut  $\Delta = \sigma(1 - r)$ . L'origine est donc un puits si  $r < 1$  (c'est même un noeud stable car  $\tau^2 - 4\Delta > 0$ ), et un col si  $r > 1$ . Ce col est d'un nouveau type : il y a deux directions convergentes et une divergente puisque l'on est à 3D.

**Stabilité globale de l'origine pour  $r < 1$**  Cette propriété se démontre à l'aide d'une fonction de Lyapunov : définissons

$$V(x, y, z) = \frac{x^2}{\sigma} + y^2 + z^2. \quad (9.39)$$

La fonction est définie positive et sa dérivée temporelle

$$\frac{1}{2}\dot{V} = \frac{x\dot{x}}{\sigma} + y\dot{y} + z\dot{z} \quad (9.40)$$

$$= x(y - x) + y(rx - y - xz) + z(xy - bz) \quad (9.41)$$

$$= (r + 1)xy - x^2 - y^2 - bz^2 \quad (9.42)$$

$$= - \left[ x - \frac{r+1}{2}y \right]^2 - \left[ 1 - \left( \frac{r+1}{2} \right)^2 \right] y^2 - bz^2. \quad (9.43)$$

On a donc  $\dot{V} < 0$  si  $r < 1$ . L'origine est donc globalement attractive en dessous du seuil de l'instabilité convective.

**Stabilité de  $C^+$  et  $C^-$**  Nous allons montrer qu'ils sont linéairement stables si

$$1 < r < r_H \quad (9.44)$$

et que pour  $r = r_H$ , les points fixes symétriques perdent leur stabilité via une bifurcation de Hopf. On notera que cette bifurcation n'arrive que si  $r_H > 0$ .

Pour cela, étudions les valeurs propres  $\lambda$  du Jacobien en  $C^\pm$

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r - (r-1) & -1 - \lambda & \mp \sqrt{b(r-1)} \\ \pm \sqrt{b(r-1)} & \pm \sqrt{b(r-1)} & -b - \lambda \end{pmatrix}. \quad (9.45)$$

Les valeurs propres vérifient  $\det(J - \lambda I) = 0$ , soit

$$\lambda^3 + (b + 1 + \sigma)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0. \quad (9.46)$$

Cette équation ne peut admettre de racine réelle positive puisque tous ses coefficients sont positifs. Pour  $r = 1$ , les solutions sont  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = -b$  et  $\lambda = -1 - \sigma$ . Par continuité pour  $r \gtrsim 1$ , les valeurs propres restent réelles négatives. Il existe toujours une valeur propre réelle négative, la seule possibilité d'avoir des points fixes instables correspond donc à l'apparition d'une paire de valeurs propres complexes, dont la partie réelle devient positive suite à une bifurcation de Hopf. Les valeurs propres sont à la bifurcation imaginaires pures :  $\lambda = i\omega$ . On a alors

$$-i\omega^3 - (b + 1 + \sigma)\omega^2 + i(r_H + \sigma)b\omega + 2b\sigma(r_H - 1) = 0, \quad (9.47)$$

soit en séparant parties réelles et imaginaires

$$\omega^2 = (r_H + \sigma)b \tag{9.48}$$

$$(b + 1 + \sigma)\omega^2 = 2b\sigma(r_H - 1). \tag{9.49}$$

En éliminant le terme en  $\omega^2$  de cette équation, on trouve la valeur de  $r$  à la bifurcation

$$r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}. \tag{9.50}$$

Pour que cette situation existe, il faut bien sûr que  $r_H$  soit positif, donc que  $\sigma > b + 1$ .

Remarque : on peut arriver à la même conclusion pour la bifurcation de Hopf en appliquant le critère de Routh-Hurwitz à l'équation (9.46) : soit  $P(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$  un polynôme d'ordre 3, toutes ses racines sont à partie réelle négative si et seulement si  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  et  $a_1a_2 > a_0$ .

**Diagramme de bifurcation** Cette bifurcation de Hopf en  $r = r_H$  est sous-critique : au delà de  $r_H$  la dynamique est très complexe et il n'existe pas d'attracteur proche de  $C^\pm$ . On utilise donc un ordinateur pour visualiser le portrait de phase, que nous commenterons dans la partie suivante. La figure 9.2 résume le diagramme de bifurcation que nous avons obtenu analytiquement pour les équations de Lorenz lorsque  $r$  varie.

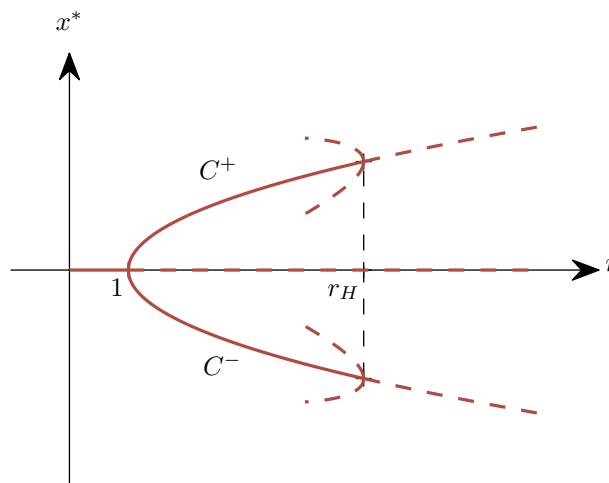


FIGURE 9.2 – Diagramme de bifurcation des équations de Lorenz.

18h en 2019

En utilisant le programme Matlab Lorenz.m, on peut montrer les différentes situations

- $r = 0.5$  : Convergence vers l'origine
- $r = 2.5$  : Convergence vers le point de coordonnées (2,2,1.5)
- $r = 10$  et  $16$  : Convergence en spirale vers le point de fixe
- $r = 26$  : Convergence vers le papillon

```
function Lorenz
b=8/3;
```

```

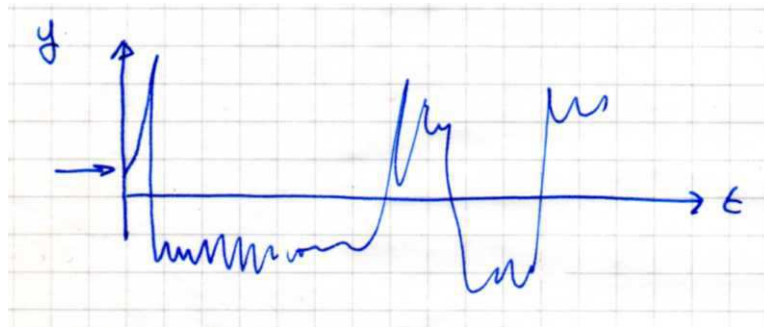
s=10;
r=0.5; %r=2.5; %r=10; %r=16; %r=30;
x(1,1)=0.01;
x(2,1)=0.01;
x(3,1)=0.01;
t=0.005;
for i=1:20000
x(1,i+1)=x(1,i)-t*s*(x(1,i)-x(2,i));
x(2,i+1)=x(2,i)+t*(r*x(1,i)-x(2,i)-x(1,i)*x(3,i));
x(3,i+1)=x(3,i)+t*(-b*x(3,i)+x(1,i)*x(2,i));
end
figure(1)
plot3(x(1,:),x(2,:),x(3:),'r');
hold on
y(1,1)=0.0102;
y(2,1)=0.01;
y(3,1)=0.01;
t=0.005;
for i=1:20000
y(1,i+1)=y(1,i)-t*s*(y(1,i)-y(2,i));
y(2,i+1)=y(2,i)+t*(r*y(1,i)-y(2,i)-y(1,i)*y(3,i));
y(3,i+1)=y(3,i)+t*(-b*y(3,i)+y(1,i)*y(2,i));
end
plot3(y(1,:),y(2,:),y(3:),'b');
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
hold off
figure(2)
plot(x(3:),'r')
xlabel('t')
ylabel('z')
hold on
plot(y(3:),'b')
hold off
figure(3)
semilogy(sqrt((x(1,:)-y(1,:)).^2+(x(2,:)-y(2,:)).^2+(x(3,:)-y(3,:)).^2),'r')
xlabel('t')
ylabel('\delta')

```

### 9.3 Chaos sur un attracteur étrange

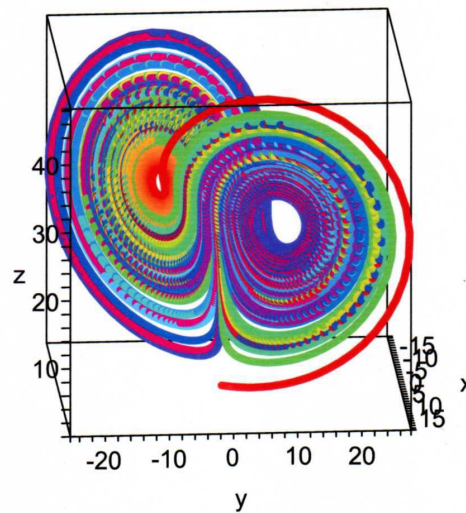
Lorenz utilisa un ordinateur pour visualiser les trajectoires pour  $r > r_H$ . Il prit  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  et  $r = 28$ . Cette valeur de  $r$  se situe juste après  $r_H \simeq 24.74$ . Il prit une condition initiale près de l'origine qui est dans ce régime un point col.

Il obtint donc un comportement irrégulier qui persista indéfiniment, sans pour autant se répéter. C'est un signal **apériodique**.



**FIGURE 9.3** – Evolution de la variable  $y$  issue de la dynamique de Lorenz lorsque l'on part de la condition initiale  $(0,1,6)$ .

Cependant en le traçant dans le plan  $(x, z)$ , il a découvert un papillon. La figure a l'air de se répéter mais ce n'est qu'une impression fautive de la projection. Il n'y a pas d'intersection à 3D : on a un **attracteur étrange de type fractal**.



**FIGURE 9.4** – Représentation du Papillon de Lorenz.

**Divergence exponentielle de trajectoire infiniment proche** Le mouvement sur l'attracteur met en évidence de la sensibilité aux conditions initiales, c'est à dire que si l'on part de deux points proches, très rapidement, ils vont être très loin, l'un de l'autre. **La prédiction à long terme s'avère donc impossible.**

Essayons de clarifier cette aide un peu plus précisément. Soit  $\vec{x}(t)$  un point de l'attracteur au temps  $t$ . Considérons un point voisin,  $\vec{x}(t) + \vec{\delta}(t)$  où  $\delta(t) = \|\vec{\delta}(t)\|$  est très petit, typiquement  $\delta = 10^{-15}$ .

Il s'agit d'étudier l'éloignement progressif entre les deux trajectoires issues des deux points initialement vraiment très proches. Comme l'écart augmente très vite, on trace l'évolution du logarithme de la norme du vecteur  $\|\vec{\delta}\|(t)$  en fonction du temps.

La figure met en évidence une évolution dont la tendance est une croissance linéaire avec des



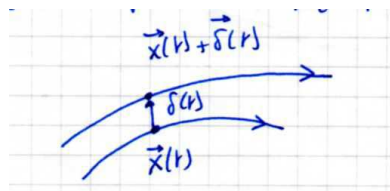


FIGURE 9.5 -

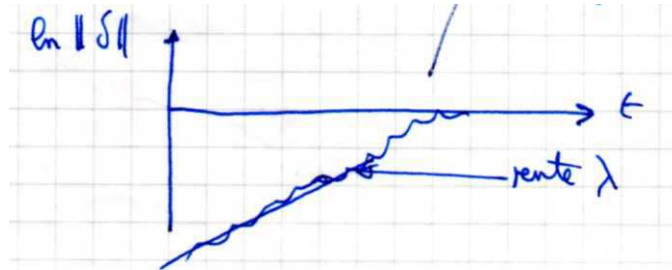


FIGURE 9.6 - Prendre  $r = 26$ .

fluctuations. La représentation montre une croissance exponentielle  $\delta(t) \sim \delta(0) e^{\lambda t}$  avec  $\lambda \simeq 0.9$ .

Remarques :

- La courbe n'est pas exactement droite car la force de la divergence n'est pas partout la même.
- La divergence exponentielle doit s'arrêter lorsque la séparation devient comparable à la taille de l'attracteur. C'est la raison de la saturation de la courbe.
- La quantité  $\lambda$  qui caractérise le taux de croissance de la divergence est appelé exposant de Lyapunov.
- Attention, il y a  $n$  exposants de Lyapunov dans un système à  $n$  dimensions. Mais numériquement on verra toujours le plus grand, à moins de prendre des précautions particulières.
- L'exposant de Lyapunov dépend a priori et en général de la trajectoire.
- $1/\lambda$  est l'ordre de grandeur du temps au dessus duquel on ne peut plus faire de prédictions. En notant  $a$  la tolérance (ou critère d'acceptabilité) et  $\delta_0$  l'erreur (ou imprécision) initiale, on s'attend à atteindre la tolérance lorsque  $a \sim \delta_0 e^{\lambda t_H}$  si l'on définit  $t_H$  le temps horizon. On en déduit  $t_h \sim \mathcal{O}[(1/\lambda) \ln(a/\delta_0)]$ .

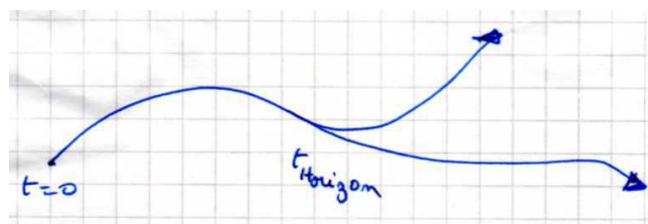


FIGURE 9.7 - .

On note par conséquent que le temps horizon dépend logarithmiquement de l'imprécision initiale  $\delta_0$ . Il faut par conséquent démarrer extrêmement proche de la bonne trajectoire pour pouvoir être en mesure de faire une prédiction aux temps longs.

Ainsi si l'on note  $t_{H_1}$ , le temps horizon correspondant à  $\delta_0 = 10^{-7}$  et  $t_{H_2}$ , le temps horizon correspondant à  $\delta_0 = 10^{-13}$ , pour lequel on aurait gagné 6 ordres de grandeur (!), une tolérance modérée  $a = 10^{-3}$ , conduit au résultat  $t_{H_2}/t_{H_1} = \ln(10^{-3}/10^{-13})/\ln(10^{-3}/10^{-7}) = \ln 10^{10}/\ln 10^4 = 10/4 = 2.5$ . En améliorant la précision d'un facteur 1 million, on améliore la durée de la prédiction que d'un facteur 2.5... On doit donc pouvoir zapper sans scrupules, avant

les prédictions de la météo à 20h45 ...!

*Exercice* : Calculer l'exposant de Lyapunov des trajectoires de Messi sur la vidéo : <https://www.dailymotion.com/video/x1rbk0>

**Définir le Chaos**

Il n'y a pas de définition universellement acceptée mais on s'accorde sur :

**Le chaos est un comportement apériodique aux temps longs dans un système déterministe qui met en évidence une sensibilité aux conditions initiales.**

- **Comportement apériodique aux temps longs** : Pas de point fixe, pas d'orbite périodique ou quasi-périodique. Pour des raisons pratiques, il faut que cela arrive avec une probabilité nulle.
- **Déterministe** : Cela veut dire que le système n'a pas de composante stochastique ou de bruits. Le comportement irrégulier provient bien du système nonlinéaire lui-même.
- **Sensibilité aux conditions initiales** : Un exposant de Lyapunov positif.

*Remarque* : **Chaos n'est pas synonyme d'instabilité.**  $\dot{x} = x$  est un système dynamique déterministe qui présente une séparation exponentielle de trajectoires proches, mais il n'est cependant pas chaotique. Les trajectoires sont en effet repoussées vers l'infini qui joue le rôle de point fixe ; elles ne reviennent jamais. Le comportement chaotique doit être **apériodique** et cela exclut les points fixes.

**Définir attracteur et attracteur étrange**

Le mot attracteur est aussi difficile à définir.

Un attracteur est un ensemble  $A$  avec les propriétés suivantes :

1. Il est invariant : toute trajectoire  $\mathbf{x}(t)$  qui démarre en  $A$ , y reste à jamais.
2. Il attire un ouvert de conditions initiales : il existe un ouvert  $U$ , contenant  $A$ , tel que si  $\mathbf{x}(0) \in U$ , la distance de  $\mathbf{x}(t)$  à  $A$  diminue lorsque  $t \rightarrow \infty$ .  
Le plus grand ensemble  $U$  est appelé **bassin d'attraction**.
3.  $A$  est minimal : il n'y a pas d'autre sous-espace vérifiant les conditions 1 et 2.

**Exemple**

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (9.51)$$

- a) L'ensemble  $I = ([-1, 1] \times \{0\})$  est-il invariant ?
- b)  $I$  attire-t-il un ouvert de conditions initiales ?
- c)  $I$  est-il un attracteur ?

*Solution* Les deux points fixes  $(\pm 1, 0)$  sont situés au bout de l'ensemble  $I$  et l'origine est un col.

- a) Il est clair que  $I$  est invariant : toute trajectoire qui démarre sur  $I$ , y reste pour toujours. La condition 1 est donc bien satisfaite.
- b)  $I$  attire **toutes** les trajectoires du plan et donc il attire bien un ensemble ouvert. La condition 2 est donc bien satisfaite.
- c) Mais ce n'est pas un attracteur, car il n'est pas minimal. Les deux points fixes forment le sous-ensemble de  $I$  qui vérifie bien les conditions 1 et 2. Ces deux points sont les seuls attracteurs de ce problème.

*Remarque* : Dans le cas de l'attracteur de Lorenz, personne n'a réussi à montrer qu'il était minimal, même si l'immense majorité des chercheurs en sont convaincus.

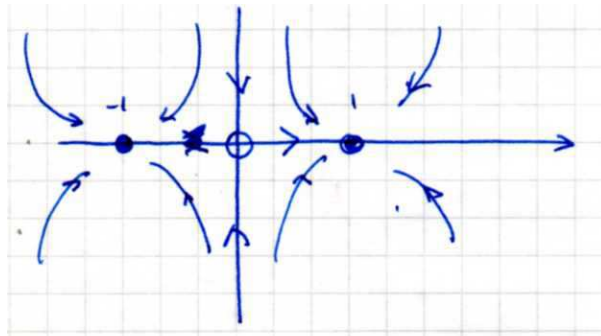


FIGURE 9.8 – Portrait de phase du système dynamique.

Un **attracteur étrange** est un attracteur qui met en évidence une sensibilité aux conditions initiales. Historiquement, on les appelait “étranges” car ce sont souvent des fractales. De nos jours, on préfère souvent insister sur la sensibilité aux conditions initiales : on parle désormais plus souvent d'**attracteur chaotique**.



## Chapitre 10

# Application Unidimensionnelles

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à des situations où le temps est discret. On parle alors d'**équations aux différences, d'applications itérées ou d'applications**.

Prenez votre calculatrice et choisissez un nombre  $x_0$ . Appuyer plusieurs fois sur la touche "cosinus" et déterminer l'orbite issue de  $x_0$  :  $x_1, x_2, \dots$   $x_1 = \cos x_0$ , puis  $x_2 = \cos x_1$ ,  $x_3 = \cos x_2$ , ... Sur Matlab, "ans=1" puis plusieurs fois "cos(ans)". On s'aperçoit que l'on tend toujours vers 0.739...

Comment expliquer ce qui se passe après quelques itérations ?

*Remarque* : On rencontre les applications dans les cas suivants

- Ce sont des outils pour analyser les équations différentielles : sections de Poincaré, Applications de Lorenz,...
- Ce sont des modèles de phénomènes naturels, finance, économie, population d'animaux dont les générations ne se superposent pas
- Exemples simples de chaos et laboratoire pour l'étudier. Les applications bien qu'à une dimension autorisant les sauts, elles conduisent à des comportements plus complexes que les flots continus étudiés jusqu'ici.
- Ces applications unidimensionnelles sont en outre très facile à étudier à l'aide d'un ordinateur qui est par essence une dynamique discrète.
- Ces applications unidimensionnelles ont été extrêmement utiles pour l'analyse et la prédiction des comportements, et tout particulièrement le chemin vers le chaos, avec les études expérimentales de signaux dans les semi-conducteurs, dans la convection, les cellules cardiaques, les lasers ou les oscillations chimiques.

## 10.1 Point fixe et Toile d'araignée

### 10.1.1 Point fixe et stabilité linéaire

Pour étudier la stabilité autour d'un point fixe  $x^* = f(x^*)$ , on étudie l'évolution de  $x_n = x^* + \eta_n$ . La trajectoire s'éloigne-t-elle ou se rapproche-t-elle du point fixe ?

Sans grande surprise par rapport à ce que l'on a vu précédemment, on a

$$x_{n+1} = x^* + \eta_{n+1} = f(x_n) = f(x^* + \eta_n) = \underbrace{f(x^*)}_{=x^*} + \eta_n f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta_n^2) \quad (10.1)$$

qui se simplifie en  $\eta_{n+1} = \eta_n f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta_n^2)$ .

Après linéarisation, on peut donc obtenir la solution explicite. Notons  $\lambda = f'(x^*)$ . On a alors  $\eta_2 = \lambda \eta_1 = \lambda^2 \eta_0$  qui conduit à  $\eta_n = \lambda^n \eta_0$ .

Par conséquent, si  $|\lambda| = |f'(x^*)| < 1$ ,  $\eta_n \rightarrow 0$  : le point fixe  $x^*$  est linéairement stable.  
 En revanche, si  $|\lambda| = |f'(x^*)| > 1$ ,  $\eta_n \rightarrow \infty$  : le point fixe  $x^*$  est linéairement instable.  
 Le cas  $|\lambda| = 1$  est à étudier au cas par cas.

**Exemple**

Déterminer les points fixes et la stabilité de l'application itérée  $x_{n+1} = x_n^2$ .

*Solution*

Les points fixes sont donnés par  $x^* = x^{*2}$  qui a pour solution  $x^* = 0$  et  $x^* = 1$ .

La valeur de  $|f'(x^*)| = 2x^*$  en ces deux points donne la stabilité de ces deux points fixes. On a donc  $x^* = 0$  qui est stable tandis que  $x^* = 1$  est instable. Ce résultat est très facile à vérifier sur votre calculatrice.

**10.1.2 Toile d'araignée**

Connaissant la condition initiale  $x_0$  et l'application  $x_{n+1} = f(x_n)$ , on peut tracer facilement la figure 10.1.

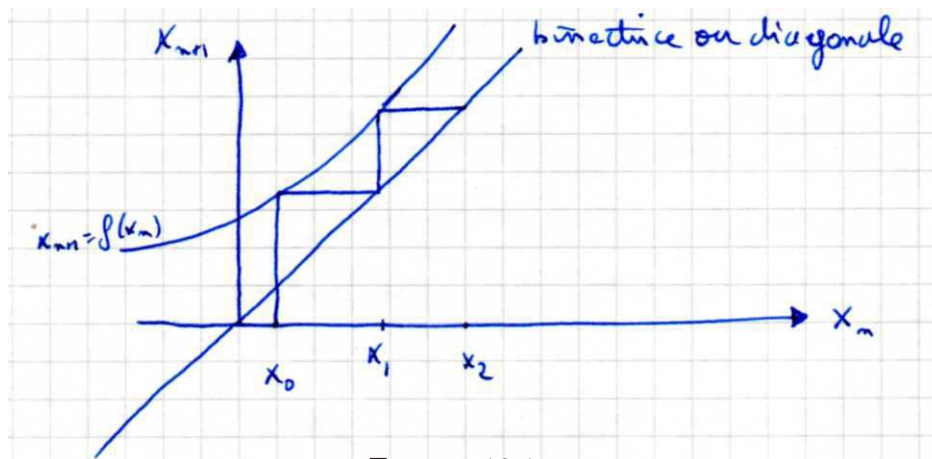


FIGURE 10.1 - .

**Exemples**

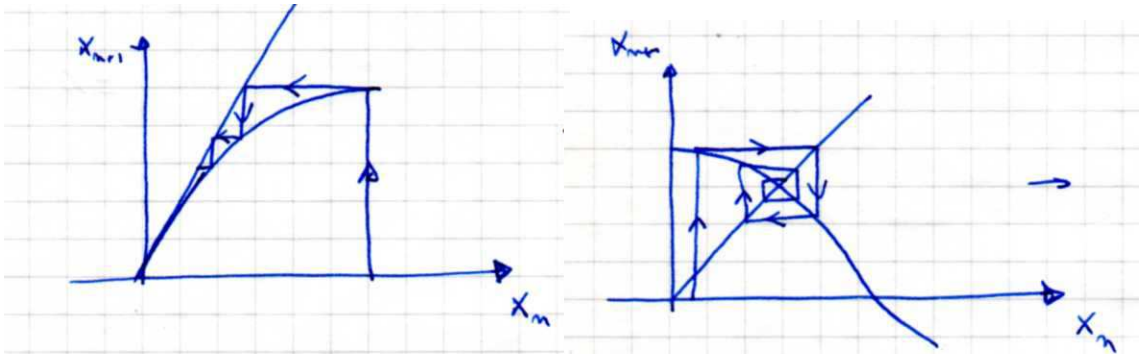
1. Étudier l'application itérée  $x_{n+1} = \sin x_n$ . Quelle est la stabilité du point fixe ?

*Solution* Le point fixe est  $x^* = 0$ . La valeur de la dérivée en ce point,  $f'(x^* = 0) = \cos 0 = 1$ , est donc un cas limite. Il n'y a donc pas de prédiction analytique en utilisant l'approximation linéaire discutée jusqu'ici.

2. Étudier l'application itérée  $x_{n+1} = \cos x_n$ . Quelle est la stabilité du point fixe  $x^* = 0$ .

*Solution*

Le point fixe est  $x^* = \cos x^* = 0.739\dots$ . La valeur de la dérivée en ce point,  $f'(x^*) = -\sin x^* < 0$  et inférieure à 1 en valeur absolue. L'application itérée va donc converger après des oscillations de chaque côté, caractéristiques des cas pour lesquels  $\lambda < 0$ . Lorsque  $\lambda > 0$ , la convergence est en revanche monotone.

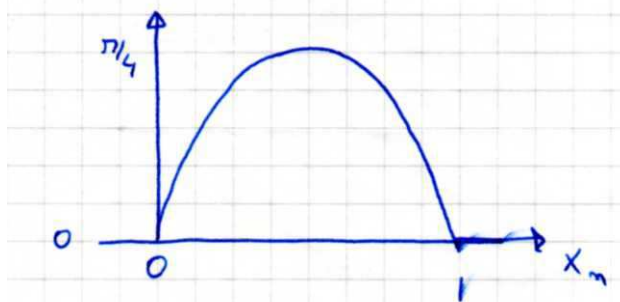


**FIGURE 10.2** – Les représentations graphiques des applications itérées  $x_{n+1} = \sin(x_n)$  et  $x_{n+1} = \cos(x_n)$  mettent en évidence que le point fixe  $x^* = 0$  pour la première et le point fixe  $x^* = \cos x^*$  sont tous les deux stables.

## 10.2 L’application logistique

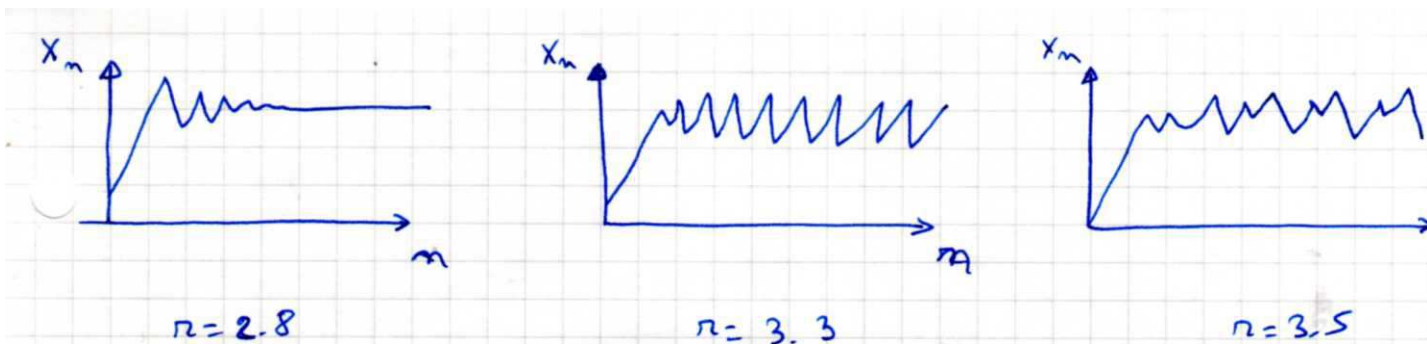
Cette application  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$  très simple a pourtant une dynamique compliquée. Elle a été étudiée par May en 1976 dans le contexte de la biologie des populations et cela a eu un retentissement très important.

C’est bien évidemment l’analogie pour une dynamique discrète de ce que nous avons discuté au niveau de la dynamique de populations à une dimension.



**FIGURE 10.3** – Pour  $r < 4$ , l’intervalle  $[0, 1]$  reste bien dans lui-même.

Nous allons représenter l’application itérée  $x_n$  par des courbes mais bien évidemment seuls les changements de direction sont importants.



**FIGURE 10.4** – Pour  $0 < r < 3$ , la population croît pour atteindre un état d’équilibre. Pour  $r = 3.3$ , la population oscille avec une période 2. Pour  $r = 3.5$ , la population oscille avec une période 4.

Programme Matlab logistic.m pour étudier la dynamique de l’application logistique  
`r=1.5 %3.8282% Parameter value 1.5/2/2.8/3.3/3.5`

```

x0=0.1 % Initial condition (0.1) ou (0.25 pour 3.8282)
N=40 % Number of iterations (N=40) ou (N=200, pour 3.8282)
x(1) = x0; % Matrices in matlab cannot have zero index
% compute the orbit and print out results
fprintf(1,'Year Density\n'); for ic=1:N
x(ic+1) = r*x(ic)*(1-x(ic));
fprintf(1,'%d %f\n',ic,x(ic+1));
end
% graph the orbit
figure(1);
hold off;
plot(x,'r*');
hold on;
plot(x,'y');
axis([1 N 0 1]);
xlabel('n')
ylabel('x_n')
title(strcat('r=',num2str(r)));

```

### Programme Matlab cobweb.m pour tracer la toile d'araignée de l'application logistique

```

% compute trajectory
r=3.5644 % parameter 1.5/2/2.8/3.3/3.5/3.8282
x0=0.1 % Initial condition 0.1 ou 0.25
N=1000; % Number of iterations
x(1) = x0; for ic=1:N
x(ic+1) = r*x(ic)*(1-x(ic));
end
% graph the orbit
figure(2);
hold off;
% plot the map function and the line y=x
clf; t = 0:0.01:1; plot(t,r*(t.*(1-t))); hold on;
axis('square'); axis([0 1 0 1]);
set(gca,'XTick',(0:0.1:1),'YTick',(0:0.1:1))
grid on;
fplot('1*y',[0 1],'r');
% STEP 3: PLOT COBWEB
line([x(1) x(1)],[0 x(2)],'Color','g')
plot(x(1), x(1),'ko');
for ic=1:N-1
line([x(ic) x(ic+1)],[x(ic+1) x(ic+1)],'Color','g')
line([x(ic+1) x(ic+1)],[x(ic+1) x(ic+2)],'Color','g')
plot(x(ic+1), x(ic+1),'ko');
end
line([x(N) x(N+1)],[x(N+1) x(N+1)],'Color','g')
% STEP 4: SIGN THE PLOT
at=text(0.1,0.82,['r=',num2str(r)]); set(at,'FontSize',12);

```



Valeur critique	Début de la période
$r_1 = 3$	2
$r_2 = 3.449$	4
$r_3 = 3.54409$	8
$r_4 = 3.5644$	16
$r_5 = 3.568759$	32
...	...
$r_\infty = 3.569946\dots$	$\infty$

Les bifurcations sont de plus en plus rapprochées et les seuils de bifurcations convergent vers la valeur  $r_\infty = 3.569946\dots$

La distance entre les transitions successives se réduit à chaque fois d'un facteur  $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669\dots$

L'allure de la toile d'araignée pour une valeur de  $r = 3.9 > r_\infty$  est très complexe comme le met en évidence la figure 10.5.

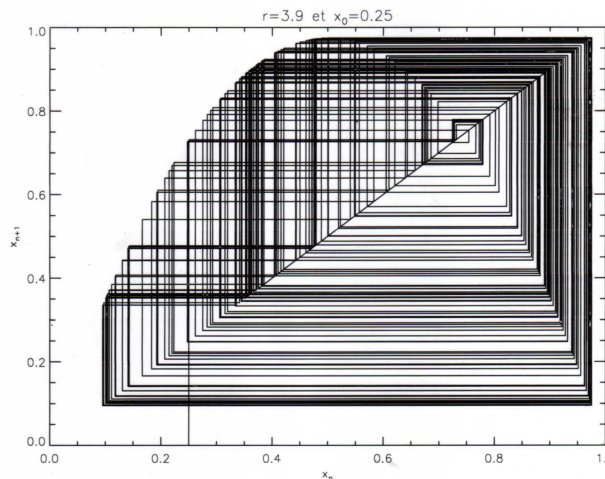
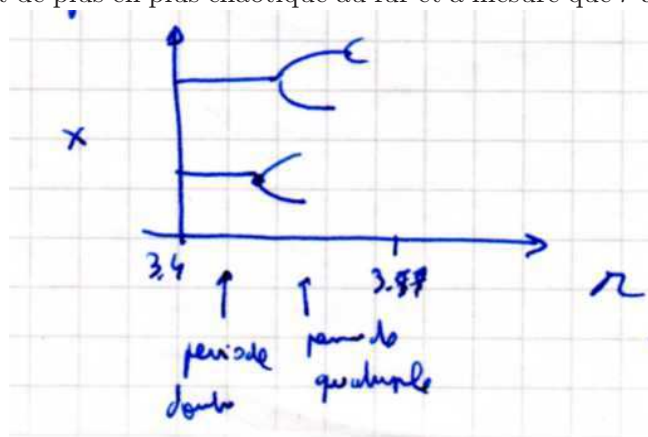


FIGURE 10.5 – Toile d'araignée dans le cas  $r = 3.9$ .

On peut penser que le système devient de plus en plus chaotique au fur et à mesure que  $r$  augmente,



mais c'est beaucoup plus subtil que cela.

Le diagramme des orbites en fonction du paramètre de contrôle  $r$  est l'une des images icônes de la dynamique nonlinéaire. Elle correspond à un mélange de parties chaotiques et de parties qui ne le sont pas.

### 10.3 Analyse de l'application logistique

L'analyse numérique précédente a soulevé beaucoup de questions : nous allons essayer de répondre aux plus simples.

**Points fixes.**  $x^* = f(x^*) = rx^*(1 - x^*) \Rightarrow x^* = 0$  et  $x^* = 1 - 1/r$ . Le premier est toujours un point fixe, alors que le second ne l'est que si  $r \geq 1$  puisque l'on se restreint à l'intervalle  $[0, 1]$ .

**Stabilité des points fixes.** Elle est donnée par  $\lambda = f'(x^*) = r(1 - 2x^*)$ .

- Comme  $f'(x^* = 0) = r$ , le point  $x^* = 0$  est stable pour  $r < 1$  et instable si  $r > 1$ .
- Comme  $f'(x^* = 1 - 1/r) = r(1 - 2 + 2/r) = 2 - r$ , le point  $x^* = 1 - 1/r$  est stable pour  $1 < r < 3$  et instable si  $r > 3$ .

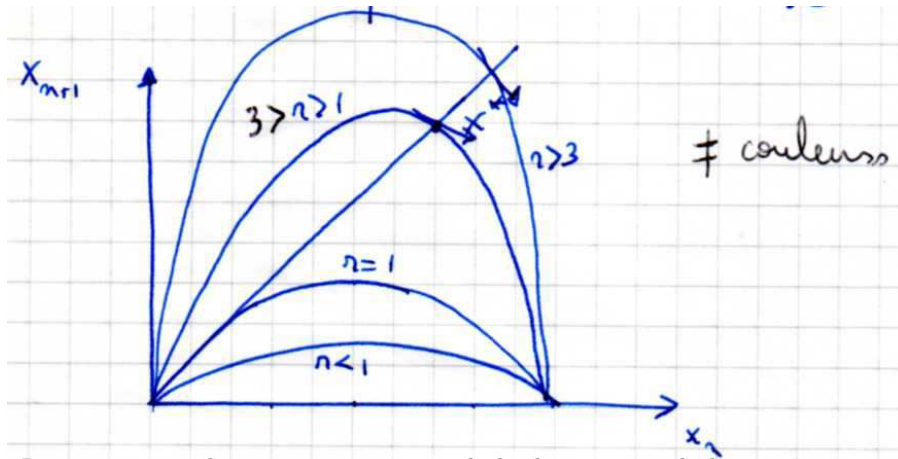


FIGURE 10.6 – Représentation des intersections entre la loi logistique et la bissectrice pour différentes valeurs de  $r$ .

- Pour  $r < 1$ , il y a une seule intersection avec la bissectrice et donc un seul point fixe.
- Pour  $r = 1$ , la parabole inversée devient tangente à la bissectrice.
- Pour  $r > 1$ , l'origine devient instable mais une seconde intersection apparaît. Il y a donc eu une **bifurcation transcritique pour  $r = 1$** .
- Pour  $r > 3$ , la pente au niveau de la seconde intersection devient supérieure à 1 en valeur absolue puisque  $f'(x^*) < -1$ . Ce point fixe perd à son tour sa stabilité.

20h en 2019

**Montrons que l'application logistique est de période double pour  $r > 3$ .** Si l'application itérée est de période 2, cela signifie qu'il existe 2 points  $p$  et  $q$  tel que  $f(p) = q$  et  $f(q) = p$ . On a par conséquent  $f(f(p)) = p$  et  $f(f(q)) = q$ .

Les deux valeurs  $p$  et  $q$  sont donc deux points fixes de l'application  $f^2$  qui est un polynôme d'ordre 4.

Les deux points fixes  $0$  et  $x^*$  sont bien sûr toujours points fixes de l'application  $f^2$ . En mettant ces deux solutions en facteur, on peut singulièrement simplifier le polynôme d'ordre 4 en une équation du second degré...! Cela permet d'identifier analytiquement les expressions des deux dernières solutions

$$p, q = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \text{ qui conduit à des solutions réelles pour } r > 3.$$

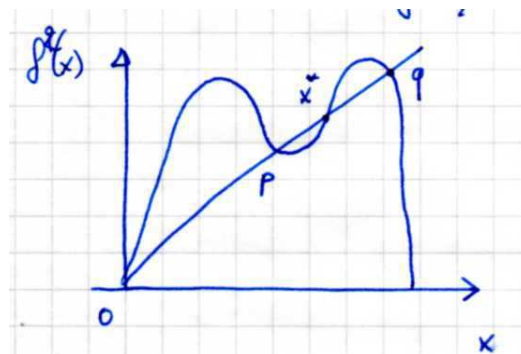


FIGURE 10.7 – Représentation de l'application  $f^2(x)$ .

**Montrons que le cycle d'ordre 2 est stable pour  $3 < r < 1 + \sqrt{6} = 3.449\dots$**  La méthode est simple et à retenir. Les deux valeurs  $p$  et  $q$  étant solutions de l'équation  $f^2(x) = x$ , le cycle d'ordre 2 sera stable si  $p$  et  $q$  sont des points fixes stables de  $f^2$ .

Le multiplicateur  $\lambda$  s'écrit ici

$$\lambda = \frac{df^2(x)}{dx} \Big|_p = \frac{df(f(x))}{dx} \Big|_p = f'(p)f'(f(p)) = f'(p)f'(q). \tag{10.2}$$

On a évidemment le même résultat pour le point fixe  $q$ . Par conséquent,  $p$  et  $q$  perdent simultanément leur stabilité.

En allant jusqu'au bout, on aboutit à  $\lambda = r(1 - 2p)r(1 - 2q) = 4 + 2r - r^2$ . Le cycle d'ordre 2 sera donc stable pour  $4 + 2r - r^2 < 1$  qui conduit à  $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ .

Ce résultat permet de poursuivre le dessin du diagramme de bifurcation tel que montré sur la figure 10.8. Cette méthode peut être poursuivie mais les calculs deviennent de plus en plus difficile.

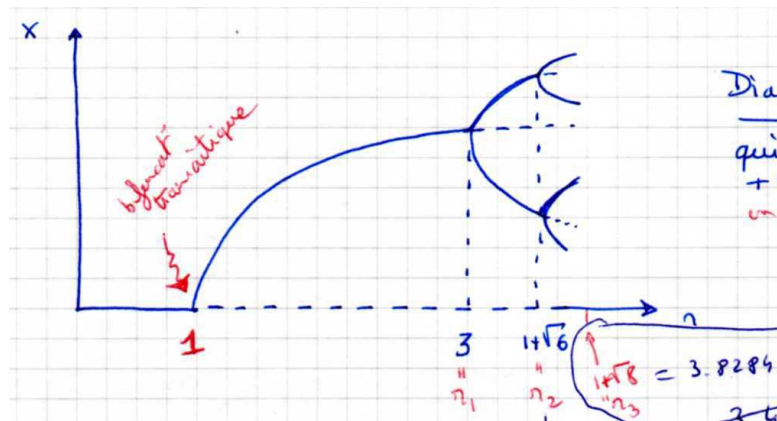


FIGURE 10.8 – Diagramme de bifurcation de l'application logistique. Les points fixes instables sont indiqués en pointillés.

### 10.4 Fenêtre périodique de période 3

À partir de  $r_3 = 1 + \sqrt{8} = 3.8284\dots$  la dynamique correspond à une dynamique de période 3. La formule semble très proche de celle que l'on vient d'établir, mais c'est trompeur, car celle-ci est beaucoup difficile à obtenir.

**Intermittence** Juste en dessous de la valeur  $r_3$ , par exemple pour  $r = 3.8282$ , on obtient la dynamique indiquée sur la figure 10.9.

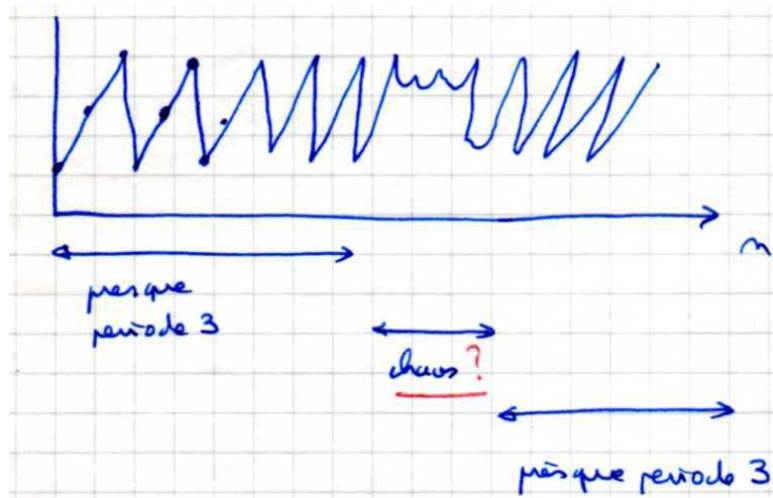


FIGURE 10.9 – Évolution de l’application logistique pour  $r = 3.8282 < r_3$ .

Une partie de l’orbite ressemble à un cycle stable d’ordre 3. Mais ce n’est qu’un fantôme. Tout s’explique lorsque l’on étudie les intersections de l’application  $f^3(x)$  avec la bissectrice comme indiqué sur la figure 10.12.

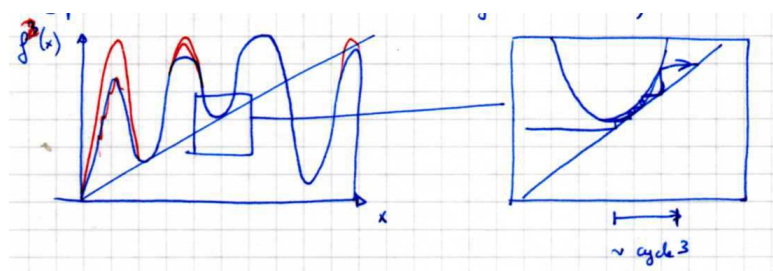


FIGURE 10.10 – Représentation de l’application  $f^3(x)$ .

Dans le petit canal, on a presque égalité entre  $f^3(x)$  et la bissectrice, qui conduit à l’impression d’un cycle 3 pendant plusieurs itérations. Mais, au bout d’un moment on en sort, et cela devient chaotique par intermittence.

### 10.5 Exposant de Lyapunov

Ayant mis en évidence des comportements apériodiques, comment être sûr que l’on a bien à faire à du chaos? Il faudrait pour cela mettre en évidence la sensibilité aux conditions initiales, dans le sens où des trajectoires proches vont diverger exponentiellement.

Étudions pour cela l’évolution de la trajectoire issue du point  $x_0 + \delta_0$  par rapport à celle issue de  $x_0$ . L’écart est caractérisé par la quantité

$$\delta_n = x_n + \delta_n - x_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0). \tag{10.3}$$

Si l’écart augmente de façon exponentielle, on s’attend à avoir  $|\delta_n| \sim |\delta_0|e^{n\lambda}$  par analogie avec la définition de l’exposant de Lyapunov  $\lambda$ .

On a donc

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \tag{10.4}$$

$$= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_{n_1}} \frac{\delta_{n_1}}{\delta_{n_2}} \dots \frac{\delta_1}{\delta_0} \right| \tag{10.5}$$

$$= \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\delta_{i_1}} \right| \tag{10.6}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{\delta_i}{\delta_{i_1}} \right| \tag{10.7}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{f(x_{i-1} + \delta_{i-1}) - f(x_{i-1})}{x_{i-1} + \delta_{i-1} - x_{i-1}} \right| \tag{10.8}$$

$$\simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_{i-1})| \tag{10.9}$$

où l'on utilise dans la dernière expression que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 0$ .

Si l'expression (10.9) a une limite quand  $n$  tend vers l'infini, on l'appelle exposant Lyapunov.

On retiendra donc la définition suivante de l'exposant de Lyapunov

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|. \tag{10.10}$$

Comme on l'avait annoncé lors de l'introduction de ce contexte, on note que  $\lambda$  est a priori une fonction de la trajectoire donc de la condition initiale  $x_0$ .

**Exemple**

**Exposant de Lyapunov de l'application tente ou application circonflexe**

$$f = \begin{cases} rx & 0 \leq x \leq 1/2 \\ r(1-x) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{10.11}$$

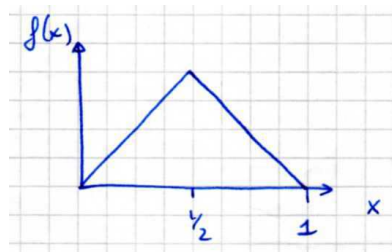


FIGURE 10.11 – Application tente ou application circonflexe.

On a dans tous les cas,  $f'(x) = \pm r$ , i.e.  $|f'(x)| = r$  qui permet de simplifier grandement la formule (10.10) : on obtient finalement  $\lambda = \ln r$ .

Ce résultat suggère que l'on aura un comportement chaotique pour  $r > 1$  puisque l'exposant de Lyapunov sera strictement positif.

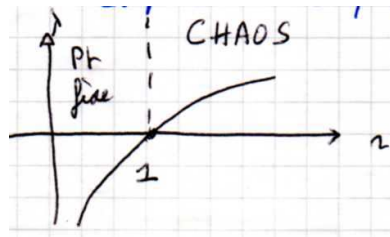


FIGURE 10.12 – Exposant de Lyapunov de l’application circonflexe en fonction du paramètre  $r$ .

Pour faire l’analogie avec les phénomènes critiques, on observe que  $\lambda = \ln r$  se comporte comme une loi de puissance près du point critique  $r_c = 1$ . Notons en effet  $r = r_c + \varepsilon$ . L’expression de Lyapunov s’écrit donc

$$\lambda = \ln r = \ln(r_c + \varepsilon) \tag{10.12}$$

$$\simeq \underbrace{\ln r_c}_{=0} + \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{10.13}$$

$$= r - r_c + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{10.14}$$

On réalise donc que cette transition simple vers le chaos de l’application circonflexe présente des similitudes fortes avec les transitions de phases à l’équilibre.

**Méthode pour calculer numériquement l’exposant de Lyapunov de l’application logistique**

Partons de la définition de l’exposant de Lyapunov qui pour l’application logistique s’écrit

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)| = \ln |r(1 - 2x_i)|. \tag{10.15}$$

lorsque la valeur de  $r$  donnée.

À partir de la condition initiale  $x_0$ , on effectue 300 itérations sans sauvegarder le résultat. Au début, comme on l’a vu, il y a un transitoire, inutile, mais qui peut ralentir de façon importante la convergence de la formule (10.10).

On intègre ensuite typiquement  $n = 10^4$  fois, tout en calculant pour chaque itération la quantité  $f'(x_i)$  et on l’ajoute  $\ln |f'(x_i)| = \ln |r(1 - 2x_i)|$ .

En divisant ensuite le nombre obtenu par le même nombre  $n = 10^4$ , on aboutit à la valeur de l’exposant de Lyapunov pour cette valeur de  $r$ .

Il suffit ensuite de changer de valeur de  $r$  et de recommencer pour aboutir à la figure 10.13.

On observe que l’exposant de Lyapunov est négatif pour  $r < r_\infty = 3.57\dots$

Les pics négatifs correspondent aux cycles  $2^n$ . Ce n’est que le problème de résolution qui les empêchent d’aller vers  $-\infty$ .

On voit que  $\lambda$  croît avec  $r$  sauf dans les fenêtres périodiques.

Notez le creux autour de la valeur  $r = 3.83$  qui correspondent au cycle 3.

**10.6 Universalité**

Si l’on prend l’application  $x_{n+1} = r \sin(\pi x_n)$ , on retrouve le même diagramme d’orbites.

Metropolis *et al.* (1973) ont montré que pour une fonction  $f$  vérifiant simplement  $x_{n+1} = rf(x_n)$  avec  $f(0) = f(1) = 0$ , les attracteurs périodiques apparaissent toujours dans le même ordre appelé séquence U.

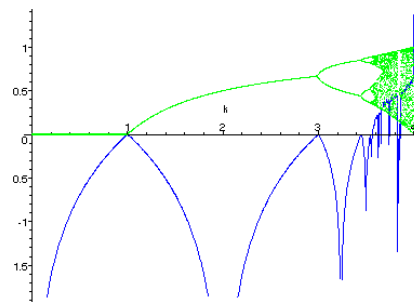


FIGURE 10.13 – Exposant de Lyapunov de l'application logistique en fonction du paramètre  $r$ .

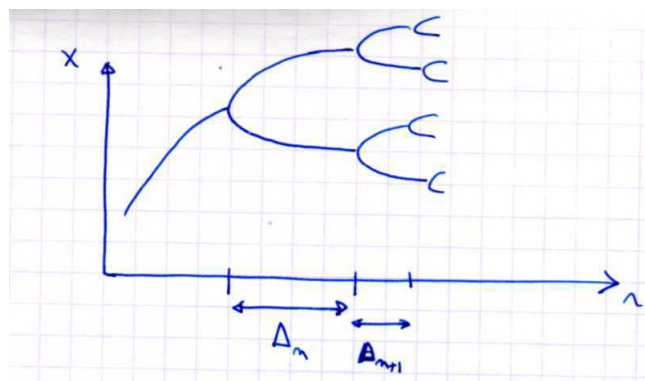


FIGURE 10.14 – Représentation schématique du diagramme des orbites pour lequel on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \delta = 4.669\dots$

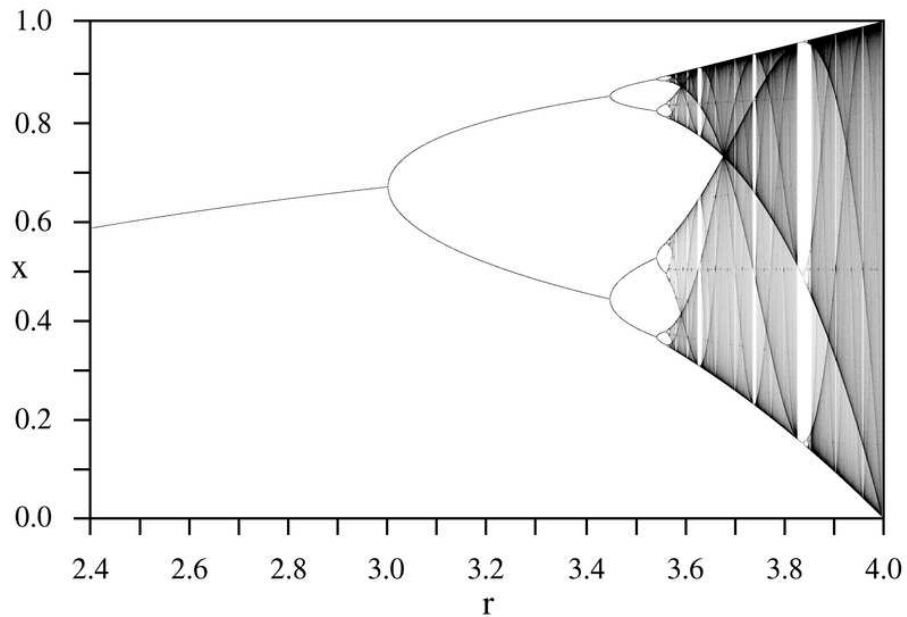


FIGURE 10.15 – Diagramme de bifurcation de l'application logistique

C'est aussi le cas de l'expérience de Belousov-Zhabotinskyi. Cette universalité est même quantitative puisque l'on a

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669... \tag{10.16}$$

de manière universelle. La quantité  $\delta$  est appelée constante de Feigenbaum. C'est une constante mathématique fondamentale, presque autant que  $\pi$  l'est pour le cercle !

**Test expérimental** La constante de Feigenbaum a même été mesurée expérimentalement dans la convection du Mercure : la valeur obtenue est  $4.4 \pm 0.1$ . C'est une prouesse car on comprend que comme  $\delta$  est proche de 5, cela signifie que l'écart entre les bifurcations se réduit très très vite.

Cela explique qu'expérimentalement, seuls 5 doublements de périodes ont été détectés.

Expériences	Nombre de doublements de période	Valeur de $\delta$ mesurée	Auteurs
Eau	4	4.3(8)	Giglio et al. (81)
Mercure	4	4.4(1)	Libchaber et al. (82)
Diode	4	4.5(6)	Lindsay (81)
Diode	5	4.3(1)	Testa et al. (82)
Transistor	4	4.7(3)	Arechi et al. (82)
Josephson	3	4.5(3)	Yeh (82)



## 10.7 Systèmes dynamiques et Entropie

L'apparence complexe des différentes représentations graphiques des comportements chaotiques conduit naturellement à la question du lien entre mécanique statistique et chaos.

Essayons d'appliquer le concept d'entropie à un système chaotique. Considérons donc un système physique hypothétique pour lequel le résultat d'une certaine mesure doit se trouver dans l'intervalle unité. Si l'intervalle est divisé en  $N$  petits intervalles, on peut associer la probabilité  $p_i$  au  $i$ ème sous-intervalle.

L'entropie de ce système est alors définie comme

$$S = - \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i \quad (10.17)$$

le signe négatif devant la somme venant du fait que les  $p_i$  étant positifs mais inférieurs à l'unité, leur logarithme est négatif.

Cette quantité  $S$  peut être interprétée comme la mesure de la quantité de désordre du système, ou bien comme l'information nécessaire pour déterminer l'état du système.

En effet, si tous les intervalles sont équiprobables, i.e.  $p_i = 1/N, \forall i$ , alors  $S = \ln N$  est la valeur maximale comme vous pouvez essayer de le montrer.

Au contraire, si toutes les mesures donnent un résultat dans le même intervalle ( $p_i = 0, \forall i \neq j$  and  $p_j = 1$ ), on aura  $S = 0$ , la valeur minimale.

Lorsque  $S = \ln N$ , la quantité d'information supplémentaire nécessaire pour spécifier le résultat d'une mesure est maximale. Au contraire, lorsque  $S = 0$ , aucune information n'est nécessaire.

Appliquons ce type d'approche au cas de l'application logistique. Dans le cas non chaotique, les valeurs successives de  $x_n$  tomberont dans très peu d'intervalles. Si l'on oublie le transitoire, et que l'on est dans la zone où il y a un seul point fixe par exemple, toutes les valeurs seront dans le même intervalle.

Dans le cas chaotique, l'entropie est en revanche plus élevée et si les fréquences d'apparition sont approximativement égales,  $S$  s'approche de  $\ln N$ .

Comme attendu, l'entropie  $S$  augmente de façon générale quand  $r$  augmente, à part dans les régions où le comportement est périodique.

L'entropie n'atteint donc la valeur maximale  $\ln N$  que pour la valeur  $r = 4$ , puisqu'avant les valeurs de  $x_n$  ne sont pas réparties sur tout l'intervalle.

Il y a également un lien entre la valeur de l'entropie et la valeur de l'exposant de Lyapunov, mais cela sera à approfondir ultérieurement.



# Chapitre 11

## Les Fractales

Nous avons entraperçu que l'attracteur de Lorenz avait une structure particulière et nous avons parlé d'attracteur étrange. Nous allons décrire dans ce chapitre, les idées principales pour décrire cette forme géométrique.

De manière approchée, les fractales sont des formes géométriques avec des structures fines à toutes les échelles. En général, il y a un degré d'**auto-similarité**, i.e. que si l'on grossit une partie d'une fractale, on retrouve une forme qui rappelle la fractale dans son ensemble. La ressemblance est parfois exacte, parfois approchée, parfois statistique.

Les fractales rappellent des objets naturels : Nuages, Montagnes, Côtes Marines, Réseaux de vaisseaux sanguins, Broccoli...

### 11.1 Ensemble de Cantor

La figure 11.1 indique les étapes successives pour construire l'ensemble de Cantor, noté C.

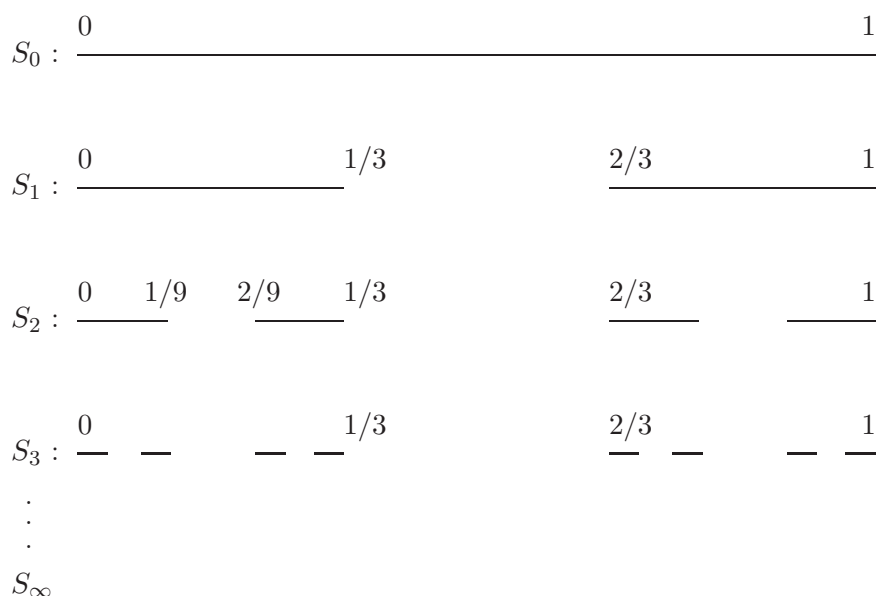


FIGURE 11.1 – Construction de l'ensemble de Cantor de manière itérative.

La figure 11.1 suggère que C est constitué d'un nombre infini de morceaux tailles infiniment faibles, séparés par des trous de taille variable.

C a des propriétés caractéristiques des fractales.

1. **C a des structures à toutes les échelles.** Si l'on grossit une partie de C, on retrouve la même structure avec des trous de taille variable. Ce n'est pas la même chose que si l'on regarde une courbe douce. Après grossissement, on voit de moins en moins de structures.
2. **C est autosimilaire.** C contient des copies de lui-même à toutes les échelles. Si l'on prend la partie gauche de C et que l'on zoome avec un facteur 3, on retombe bien sur C.
3. **La dimension de C n'est pas un entier.** Comme nous le verrons plus tard, sa dimension est  $\ln 2 / \ln 3 = 0.63\dots$ . Une dimension non entière est choquant la première fois, mais naturelle a posteriori.

L'ensemble de Cantor a une autre propriété intéressante qui n'est pas liée à son caractère fractale : C est de mesure nulle.

**Démonstration** La construction met clairement en évidence que  $S_n$  couvre toutes les structures  $S_m$  avec  $m \geq n$ . Par conséquent, C est couvert par tous les  $S_n$ . La longueur totale de C est donc inférieure à  $L_n$ , la longueur de  $S_n$ , et cela  $\forall n$ .

On a

- $L_0 = 1$
- $L_1 = 2/3$
- $L_2 = (2/3)(2/3) = (2/3)^2$
- ...
- $L_n = (2/3)^n$ .

Par conséquent,  $L_n \rightarrow 0$ , démontrant bien que C est de mesure nulle.

## 11.2 Dimension des fractales auto-similaires

Quelle est la dimension d'un ensemble de points ?

- Lignes ou courbes douces  $\rightarrow d = 1$ .
- Plans ou surfaces douces  $\rightarrow d = 2$ .
- Solides  $\rightarrow d = 3$ .

Une définition possible serait le nombre de coordonnées nécessaires pour décrire tout point de l'ensemble considéré. Une courbe correspond à  $d = 1$ , puisque chaque point sera décrit par la longueur de l'arc. Mais cette définition n'est pas correcte, lorsque l'on considère les fractales.

Considérons en effet la courbe de Von Koch présentée dans la figure 11.2. On part d'un segment dans lequel on remplace le tiers du milieu par les deux autres côté du triangle équilatéral correspondant.

Quelle est la dimension de K ?

Comme c'est une courbe, on a envie de répondre 1 ! Mais il s'avère que sa longueur est infinie. Montrons le !

Notons  $L_0$  la longueur de  $S_0$ .

La longueur de  $S_1$  est alors  $4 \times (L_0/3) = (4/3)L_0 = L_1$ .

La longueur de  $S_n$  sera de manière itérative  $L_n = (4/3)^n L_0$  qui tend bien vers l'infini lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Par ailleurs, par un raisonnement analogue, la distance entre deux points quelconques de K sera aussi infinie. Par conséquent, les points de K ne sont pas déterminés par la longueur de l'arc correspondant, puisqu'elle serait toujours infinie. Cela suggère que K est plus qu'unidimensionnel.

Cependant, l'intuition ne suggère pas de dire que l'objet est à deux dimensions, puisqu'il ne semble pas avoir d'aire. La dimension est donc probablement entre 1 et 2.

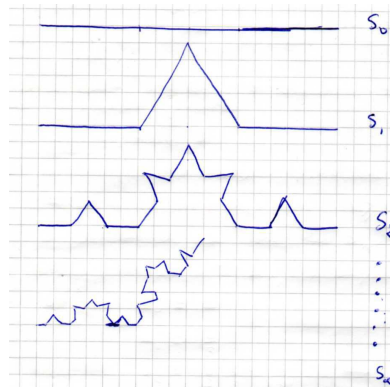


FIGURE 11.2 – Construction de la courbe de von Koch de manière itérative.

Les fractales les plus simples sont auto-similaires, c'est-à-dire qu'elles sont constituées de  $m$  copies plus petites d'un facteur  $r$ . La dimension de ces fractales peut alors être définie simplement en étendant la définition valable pour des ensembles auto-similaire plus classiques comme des lignes, carrés, cubes.

En partant d'un **carré**, la figure 11.3, permet d'obtenir  $4 = 2^2$  petits carrés lorsque  $m = 4$  et  $r = 2$  ou bien  $9 = 3^2$  petits carrés lorsque  $m = 9$  et  $r = 3$ . De manière générale, si l'on réduit la dimension linéaire d'un facteur  $r$ , il faut  $r^2$  petits carrés pour reconstituer le carré original.

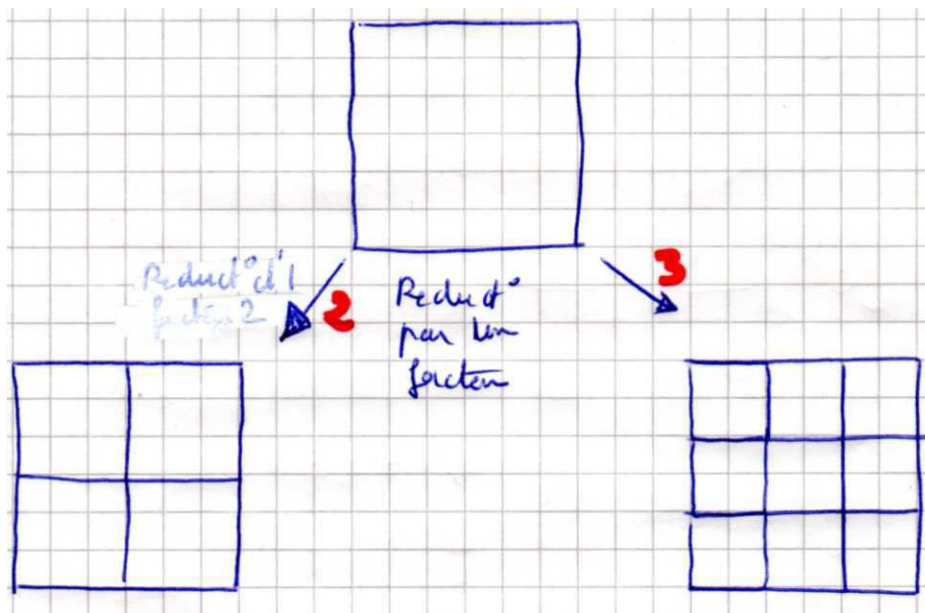


FIGURE 11.3 – Construction de fractales auto-similaires à partir d'un carré en faisant  $m$  copies obtenues après réduction d'un facteur  $r$ . La courbe de gauche correspond à  $m = 4$  et  $r = 2$  alors que celle de droite à  $m = 9$  et  $r = 3$ .

En partant d'un **cube**, si l'on suit la même procédure en divisant par 2 chaque côté, il faudra 8 petits cubes. De manière générale, on aboutit à  $r^3$ .

Les deux exposants 2 pour le carré et 3 pour le cube ne sont évidemment pas des coïncidences, mais reflètent la bidimensionnalité du carré et la tridimensionnalité du cube.

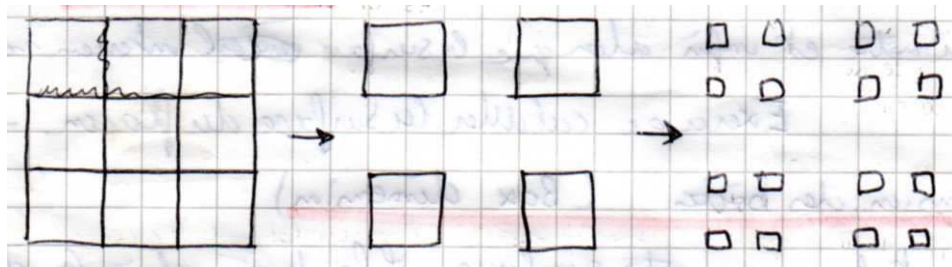
Le lien entre dimension et exposant suggère la définition suivante. Supposons qu'un ensemble auto-

similaire soit composé de  $m$  copies de lui-même réduites d'un facteur  $r$ , la dimension auto-similaire  $d$  sera l'exposant défini par  $m = r^d$  qui se réécrit sous la forme  $d = \ln m / \ln r$ .

**Exemple de l'ensemble Cantor** :  $C$  est constitué de 2 copies de lui-même  $\rightarrow m = 2$ . Le facteur de réduction conduit à  $r = 3$ . On aboutit à

$$d = \frac{\ln m}{\ln r} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \simeq 0.63. \tag{11.1}$$

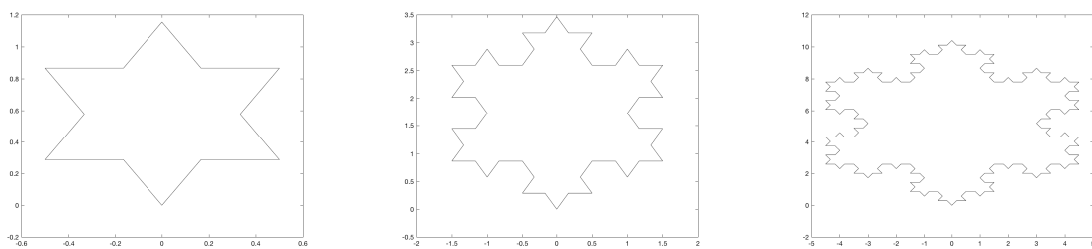
**Exercice** : Quelle est la dimension de l'objet obtenu après les itérations successives décrites à la figure 11.4 ?



**FIGURE 11.4** – Construction d'une fractale auto-similaire à partir d'un carré en faisant  $m = 4$  copies après réduction d'un facteur  $r = 3$ .

On aboutit à la dimension  $d = \ln m / \ln r = \ln 4 / \ln 3 = 1.26\dots$  qui est bien supérieur à 1 et inférieur à 2 comme attendu.

**Flocon de von Koch** : Helge von Koch (1870-1924) fut le premier à exhiber en 1904 une courbe fermée, continue mais dérivable en aucun point, de périmètre infini pour une aire intérieur finie! On prend un triangle équilatéral et on transforme chaque côté comme indiqué pour la courbe de von Koch discutée juste avant. Utiliser les programmes vonkoch.m ou vonkochbis.m.



**FIGURE 11.5** – Construction du Flocon de von Koch à partir d'un triangle équilatéral après 1, 2 et 3 itérations.

$K$  est constitué de 4 copie de lui-même :  $m = 4$  après réduction d'un facteur  $r = 3$ . On aboutit à  $d = \ln m / \ln r = \ln 4 / \ln 3 = 1.26\dots$

En exercice, calculez la surface du flocon et montrer que l'on obtient  $S = 2\sqrt{3}/5$ .

### 11.3 Dimension par la méthode des boîtes ou Box dimension

Pour les fractales non auto-similaires, il faut généraliser la définition. Une méthode consiste à couvrir l'ensemble des boîtes de taille  $\varepsilon$  comme schématisé sur la figure 11.6.

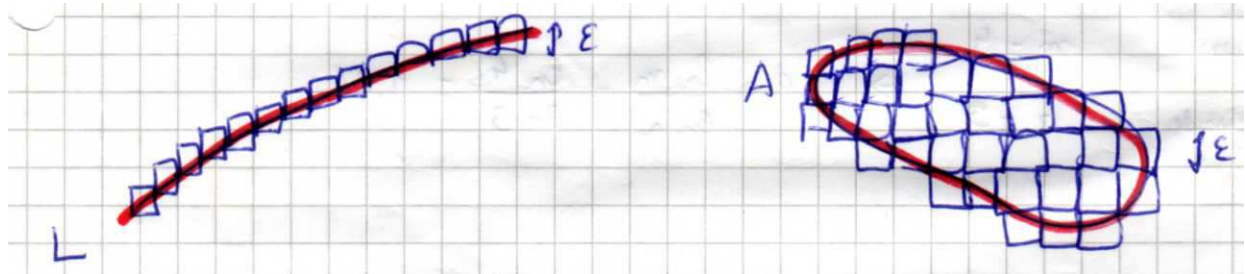


FIGURE 11.6 – Définition intuitive de la dimension des boîtes.

Soit  $N(\varepsilon)$  le nombre minimum de boîtes de côté  $\varepsilon$  nécessaire pour couvrir l'ensemble  $S$ .

- Pour une courbe douce, on aura  $N(\varepsilon) \simeq L/\varepsilon$ .
- Pour une surface plane, on aura  $N(\varepsilon) \simeq A/\varepsilon^2$ .

On note donc que la dimension  $d$  correspond tout simplement à l'exposant dans la loi  $N(\varepsilon) = 1/\varepsilon^d$ .

Cette loi est aussi valable pour la plupart des fractales mais la dimension ne sera plus entière. Par analogie, on parle donc de Box-dimension (ou dimension par la méthode des boîtes) avec, si elle existe, la formule

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \tag{11.2}$$

**Exemple de l'ensemble de Cantor.**  $C$  étant couvert par tous les ensembles intermédiaires  $S_n$ . Chaque  $S_n$  est constitué de  $2^n$  intervalles de longueur  $(1/3)^n$ . En prenant  $\varepsilon = (1/3)^n$ , il faut  $2^n$  intervalles pour couvrir  $C$ . Cela conduit à  $N(\varepsilon) = 2^n$  lorsque  $\varepsilon = (1/3)^n$ .

Comme  $\varepsilon \rightarrow 0$ , quand  $n \rightarrow \infty$ , on a

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2}{n \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \tag{11.3}$$

On retrouve un résultat en accord avec la valeur déterminée précédemment.

Remarquons que si  $\varepsilon \neq (1/3)^n$ , la couverture ne sera pas parfaite puisqu'il y aura du surplus inutile : le résultat final  $d$  sera pourtant le même.

**Fractale non auto-similaire** Prenons un carré, que l'on divise par 9, et à chaque fois, on élimine l'un des carrés sur les 9 mais au hasard. On répète cette procédure pour les 8 restants. Que vaut la box dimension ?

On note que :

$S_1$  est couvert (de manière optimale) par  $N = 8$  carrés de côté  $1/3$ .

$S_2$  est couvert (de manière optimale) par  $N = 8^2$  carrés de côté  $(1/3)^2$ .

On aboutit donc à

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \simeq 1.89. \tag{11.4}$$

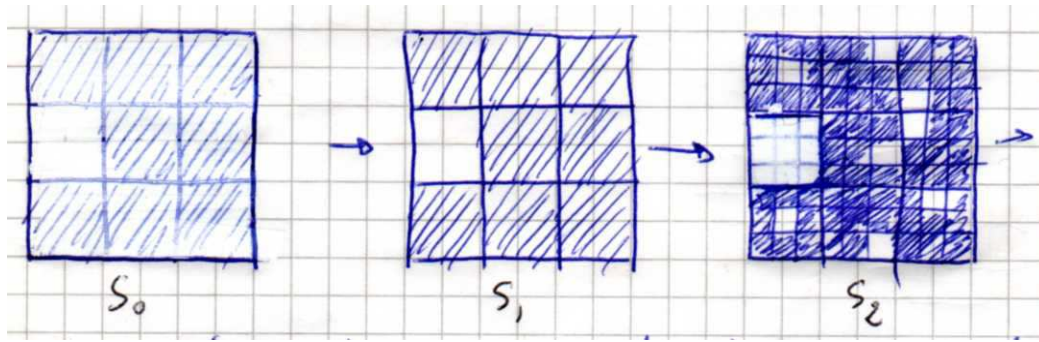


FIGURE 11.7 – Construction d’une fractale Non auto-similaire à partir d’un carré.

### 11.4 Dimension de corrélation

Revenons à la dynamique et supposons que l’étudie un système chaotique ayant un attracteur étrange à la structure fractale. Supposons qu’après avoir effacé le transitoire, l’on génère une succession de points  $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$  sur l’attracteur en laissant évoluer le système sur un temps long.

Pour améliorer la statistique, on peut répéter cette procédure pour différentes trajectoires, mais en général toutes les trajectoires ont la même statistique, et il suffit de suivre une trajectoire suffisamment longtemps (notion d’ergodicité sous-jacente qu’il faudrait discuter).

Une fois l’attracteur construit, on peut calculer la dimension par la méthode des boîtes (box dimension) mais cette approche ne s’avère pas pratique.

Peter Grassberger et Itamar Procaccia ont proposé en 1983 une méthode plus efficace qui est désormais standard. Fixons un point  $x$  sur l’attracteur  $A$ . Soit  $N_x(\varepsilon)$ , le nombre de points de  $A$  dans la boule de rayon  $\varepsilon$  centrée sur  $x$ .

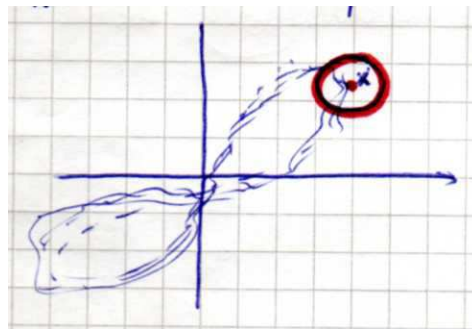


FIGURE 11.8 – L’attracteur étrange de Lorenz avec une boule de rayon  $\varepsilon$  en  $x$ .

La plupart des points situés dans la boule ne sont pas proches temporellement dans la trajectoire, mais correspondent à des passages différents dans la boule.  $N_x(\varepsilon)$  mesure la fréquence d’une trajectoire typique dans un voisinage  $\varepsilon$  de  $x$ .

Si l’on augmente  $\varepsilon$ , le nombre de points dans la boule varie comme une loi de puissance  $N_x(\varepsilon) \simeq \varepsilon^d$  qui peut dépendre de  $x$  de manière significative. Pour avoir une dimension de  $A$ , on moyenne  $N_x(\varepsilon)$  sur de grandes valeurs de  $x$  et le résultat  $C(\varepsilon) = \langle N_x(\varepsilon) \rangle_x$  conduit à  $C(\varepsilon) \simeq \varepsilon^d$  où  $d$  est la box dimension.

La dimension de corrélation tient compte de la densité de points sur l’attracteur, ce qui est a priori différent de la dimension des boîtes qui traite toutes les boîtes de manière équitable, quelque soit le



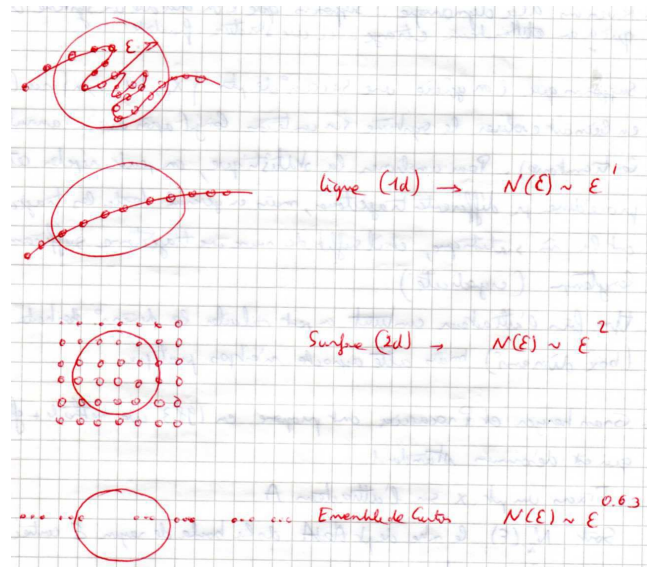


FIGURE 11.9 – Comportement de la quantité  $N_x(\epsilon)$  dans différents cas.

nombre de points qu’elles contiennent. On a en général

$$d_{\text{correlation}} \leq d_{\text{box}} \tag{11.5}$$

mais ces deux quantités sont en général très proches.

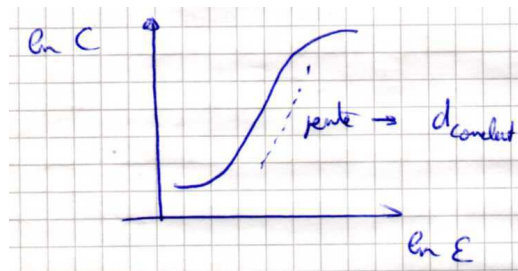


FIGURE 11.10 – Pour estimer  $d_{\text{correlation}}$ , on trace  $\ln C(\epsilon)$  en fonction de  $\ln \epsilon$ . Dans cette représentation, la pente indique  $d_{\text{correlation}}$ .

La courbe sature aux grandes valeurs de  $\epsilon$  car la boule couvre tout l’attracteur et la quantité  $N_x(\epsilon)$  ne peut plus croître.

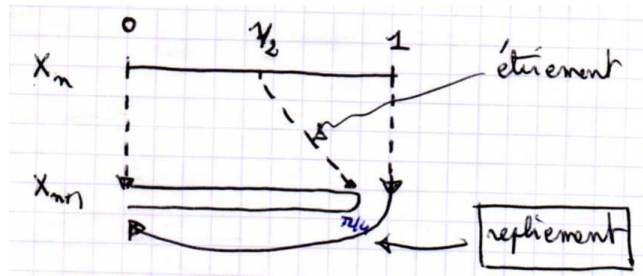
Au contraire, pour les très faibles valeurs rayons  $\epsilon$ , la boule ne contient que  $x$ , son centre. La loi de puissance n’est donc valable que dans une région de scaling.

Grassberger et Procacia ont fait le calcul sur le modèle de Lorenz, sur l’attracteur d’Hénon, sur l’application logistique, et plusieurs autres exemples.

## 11.5 Etirement et Repliement

### 11.5.1 À une dimension : l'application logistique

L'application logistique  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$  illustre lorsque  $r > 2$  les notions d'étirement et de repliement nécessaires pour maintenir les trajectoires chaotiques dans un volume de l'espace fini. Ce sont les deux ingrédients de base du chaos déterministe.



**FIGURE 11.11** – Illustration schématique de la transformation du segment unité par l'application logistique. On distingue un étirement du segment  $[0, 1/2]$  dû au caractère croissant de l'application logistique sur cet intervalle lorsque  $x_n(1/2) = r/4 > 1/2$  lorsque  $r > 2$ . Cet étirement est associé au repliement de la partie  $[1/2, 1]$  à cause de la décroissance de l'application.

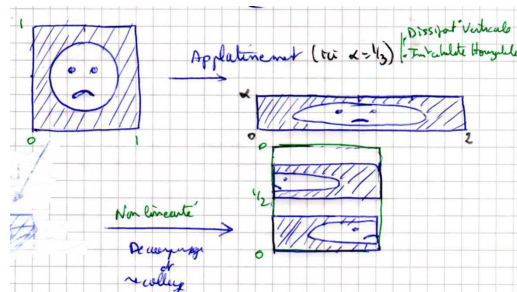
L'étirement de l'application produit la sensibilité aux conditions initiales en faisant diverger deux points voisins l'un de l'autre. Le repliement est nécessaire pour restreindre les intervalles à un intervalle fini, mélangeant les images et rendant le chaos possible.

Ces deux éléments rencontrés dans le cas de l'application logistique se retrouvent dans le cas général des systèmes chaotiques.

### 11.5.2 À deux dimensions : l'application du boulanger

Considérons l'application du boulanger ou Baker's map défini ainsi

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} 2x_n, \alpha y_n & 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ 2x_n - 1, \alpha y_n + 1/2 & 1/2 \leq x_n \leq 1. \end{cases} \tag{11.6}$$



**FIGURE 11.12** – Illustration schématique de la transformation du boulanger. La transformation peut être considérée comme la juxtaposition de deux transformations simples. Le carré est aplati en un rectangle de surface  $2 \times \alpha$ . Le rectangle résultant est ensuite découpé en deux parties donnant deux rectangles de surface  $1 \times \alpha$  chacun. On place enfin l'un sur des deux sur l'autre.

Cette transformation est sensible aux conditions initiales à cause de l'étirement dans la direction  $x$  et a de nombreuses orbites chaotiques.

Montrons que cette transformation a un attracteur étrange qui ressemble à l'attracteur de Cantor.

Nous allons plus précisément montrer qu'il existe un ensemble  $A$  tel que pour toute condition initiale  $(x_0, y_0)$ , la distance  $B^n(x_0, y_0)$  à  $A$  converge vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Construisons d'abord l'attracteur à partir du carré  $C$  de côté 1 comme indiqué sur la figure 11.13.

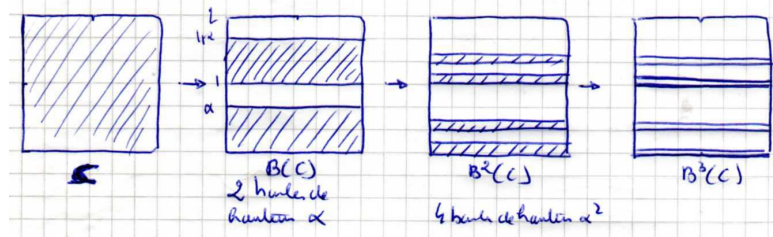


FIGURE 11.13 – Application du Boulanger sur un carré de côté unité.

On voit que  $B^n(C)$  correspond à  $2^n$  bandes horizontales de hauteur  $\alpha^n$  et l'ensemble limite  $A = B^\infty(C)$  est fractale. Il est équivalent à une succession de segments qui correspondent à un Cantor.

Calculons la dimension fractale de cet application du boulanger pour  $\alpha < 1/2$ .

L'attracteur  $A$  sera approximé par  $B^n(C)$  qui consiste en  $2^n$  bandes de hauteur  $\alpha^n$  et de longueur 1.

On peut donc couvrir  $B^n(C)$  par des boîtes carrées de côté  $\varepsilon = \alpha^n$ .

Comme la longueur des bandes est 1, il faut  $1/\alpha^n$  boîtes pour couvrir chaque bande.

Comme il y a  $2^n$  bandes, il faut donc  $N = 1/\alpha^n \times 2^n = (\alpha/2)^{-n}$  qui conduit à la box dimension

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\alpha/2)^{-n}}{\ln(\alpha)^{-n}} = 1 + \frac{\ln 1/2}{\ln \alpha}. \tag{11.7}$$

Il est rassurant de constater que lorsque  $\alpha \rightarrow 1/2$  qui correspond à la limite où le carré est inchangé, on retrouve bien  $d = 2$ .

Par ailleurs, on note que pour  $\alpha = 1/3$ , on retrouve une unité de plus que la dimension du Cantor  $\ln 2 / \ln 3$  à cause de la dimension horizontale. C'est aussi cohérent ;.

Pour  $\alpha < 1/2$ , l'application du boulanger diminue les surfaces dans l'espace des phases.

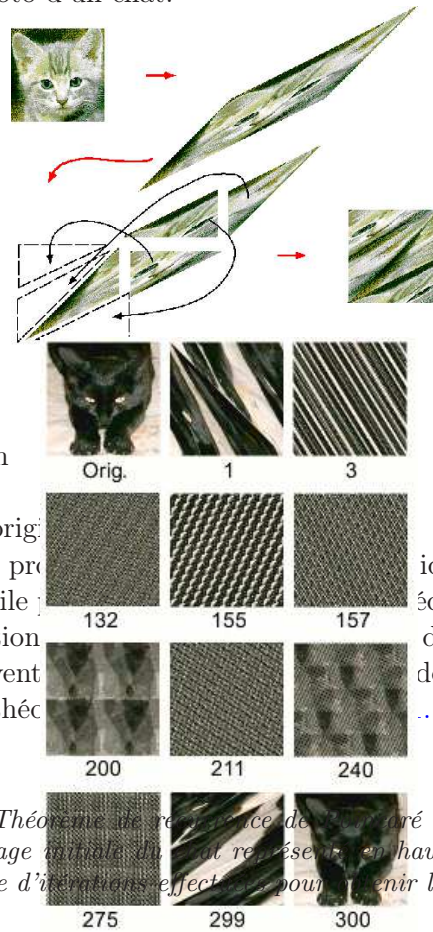
Soit  $R$  le domaine de départ. Après l'application du boulanger, on a

$$\text{Aire}(B(R)) = 2 \times \alpha \times \text{Aire}(R) < \text{Aire}(R) \tag{11.8}$$

puisque l'application allonge le domaine de départ d'un facteur 2 et l'aplatit d'un facteur  $\alpha < 1/2$ . La partie découpage ne change, quant à elle, pas la surface.

### 11.5.3 L'application du chat d'Arnold

Considérons l'application qui au couple  $(x, y)$  associe  $(2x + y, x + y) \pmod 1$ . Elle est illustrée à la figure 11.5.3 en partant de la photo d'un chat.



- On note que cette application
- est invertible.
- a un unique point fixe, l'origine.
- mais surtout elle mélange progressivement les pixels.

Cette application enfin est utile pour illustrer un théorème qui affirme que certaines applications peuvent être périodiques en temps, qui peut être (et est souvent) réversible, et qui se trouvent aux systèmes Hamiltoniens. Ce théorème est le théorème de récurrence de Poincaré.

idée d'ergodicité. récurrence de Poincaré, une propriété de l'état initial au bout d'un certain temps, qui peut être (et est souvent) réversible, et qui se trouvent aux systèmes Hamiltoniens. Ce théorème est le théorème de récurrence de Poincaré. de noter que ce théorème s'applique à un grand nombre de systèmes dynamiques.

**FIGURE 11.15** – Illustration du Théorème de récurrence de Poincaré à l'aide des itérations successives par la transformation d'Arnold de l'image initiale du chat représentée en haut à gauche. Le nombre au dessous de chaque image correspond au nombre d'itérations effectuées pour obtenir la nouvelle image.

# Chapitre 12

## Conclusion

### 12.1 La difficulté des systèmes dynamiques

Aidons nous de la splendide vidéo préparée de main de maître par Etienne Ghys. Elle peut être consultée à l'adresse : <http://www.chaos-math.org/fr.html>. C'est souvent simple mais c'est une excellente révision qui vous fera réfléchir.

**Chapitre 1 (6'35")** : Prenons une table de billard mais déposons 50 billes. Imaginons un billard parfait sur lequel les billes roulent sans frottement. Quand la queue de billard frappe la boule blanche, le mouvement est compliqué.

Peut-on prévoir ce mouvement ? Bien sûr que oui, puisque l'ordinateur qui a calculé ces images a pu le faire. Mais il a fait beaucoup de calculs. On le voit, les billes suivent des trajectoires rectilignes et rebondissent les unes sur les autres. Ces chocs sont fréquents mais si on prend son temps, ou si on calcule très vite. On peut prévoir la trajectoire pas à pas, choc après choc. L'ordinateur pourrait facilement calculer la position de la boule blanche dans une 1h par exemple.

Mais le calcul que cela représenterait dépasse de loin celles d'un être humain.

Les prévisions, en principe peut être, mais en pratique ?

Déplaçons l'une des billes de quelques cm. Regardez les deux tables de billard sont presque identiques. Seule une bille a été légèrement déplacée.

Lorsque l'on lance la boule blanche le mouvement des deux cotes commence de la même manière. Mais après un certain temps, pas très long, les deux trajectoires deviennent complètement différentes.

Si je veux prévoir la trajectoire future de la bille blanche, je peux le faire mais il me faudra connaître, en détail, la position de toutes les boules sur la table et il y en a beaucoup. Une petite incertitude sur une boule brisera tout espoir de déterminer le futur.

Fin : Chapitre 1 (9')

**Le physicien va souhaiter étudier des problèmes plus sérieux, plus difficiles, plus utiles (quoique!) que le billard.**

**Chapitre 1 (10'11")**

Comment comprendre les mouvements des corps célestes ? Regardez une simulation par ordinateur d'un système solaire fictif avec deux soleils et une planète. C'est un peu comme notre billard. L'ordinateur peut calculer pas à pas le mouvement mais peut-il prédire la destinée du système ? La petite planète risque-t-elle un jour d'entrer en collision avec un soleil ?

Peut-on prévoir les collisions entre les planètes ? La gravitation pourrait-elle éjecter certaines planètes à l'infini ? Ou, au contraire, faut-il s'attendre à une stabilité du mouvement du système solaire ? Voilà des questions bien délicates.

Voilà, nous pourrions prévoir l'avenir si... nous avions une intelligence infinie. Mais ce n'est pas le cas. Malheureusement... ou peut-être... heureusement.

Fin : Chapitre 1 (11'30")

**Hélas, ce n'est qu'une moitié du message de Lorenz qui est passée dans le public. La théorie du chaos peut-elle se limiter à l'affirmation qu'il est impossible de prévoir le futur en pratique ? Comment un scientifique pourrait-il se contenter d'un tel constat d'échec ? Le message de Lorenz est bien plus riche.**

**Chapitre 7 (6'08") :**

Voici deux trajectoires du système de Lorenz : une bleue et une jaune qui ne partent pas nécessairement de conditions initiales proches.

Effaçons... disons les dix premières secondes du mouvement et observons la suite. Que constate-t-on ?

Que les trajectoires sont en effet très différentes, elles semblent un peu folles et bien peu prévisibles.

Mais elles s'accumulent sur le même objet en forme de papillon qui semble ne pas dépendre de la position initiale. Elles semblent attirées par ce papillon. C'est pour cette raison qu'on parle de l'attracteur de Lorenz : un attracteur bien étrange.

Voilà un phénomène scientifique positif, qui n'est malheureusement pas aussi célèbre que l'effet papillon. Au lieu d'observer deux trajectoires, observons-en beaucoup plus.

Regardez toutes ces boules qui sont autant d'atmosphères idéalisées. Après un certain temps, elles se sont toutes accumulées sur le même papillon. Un bien bel objet qu'on ne se lasse pas de regarder.

Voilà de vrais problèmes pour les mathématiciens et les scientifiques en général. Au lieu de décrire le futur d'une condition initiale donnée, nous savons que c'est illusoire, nous allons essayer de décrire l'attracteur. À quoi ressemble-il ? Comment se comporte la dynamique interne ?

Fin : Chapitre 7. 8'34'

## 12.2 Le Chaos est il une idée négative ou positive ?

**Aucune théorie scientifique ne peut être fondée sur un axiome négatif :** Lorsque l'on dit le futur ne peut pas être déterminé à partir du passé, on comprend immédiatement que l'on ne pourra pas faire beaucoup de Sciences à partir de cet axiome.

Que peut-on faire par conséquent maintenant que nous avons compris que l'effet papillon empêche de déterminer le futur ?

**L'idée fondamentale de Lorenz, passée souvent sous silence dans le grand public, est que l'on peut transformer le chaos en une idée positive.** C'est un sujet de recherche aussi bien en physique qu'en mathématiques.

Voici une citation de Lorenz qui résume bien la situation :

**Première phrase :** *Si le simple battement d'un papillon peut engendrer un ouragan, il ne faut pas oublier que les battements d'un papillon qui précèdent ou qui suivent, ou bien les battements d'ailes des autres papillons, sans parler des activités des innombrables créatures plus puissantes comme l'Homme, peuvent également engendrer des ouragans.* C'est la première idée.

Quand on dit qu'une petite chose peut avoir des conséquences, il faut toujours garder à l'idée que d'autres petites choses, et elles sont extrêmement nombreuses, peuvent aussi avoir des conséquences importantes.

C'est peut être **l'une des raisons pour lesquelles ce concept de Chaos, l'effet papillon, a eu tant de succès dans le grand public.** Tout à coup, chacun d'entre nous, si petit soit-il, nous avons une puissance sur le monde : **Moi petit papillon, je peux changer le monde.** C'est extraordinaire comme idée !

Mais malheureusement moi je peux changer le monde, mais vous aussi et tout le monde peut le faire, et peut être que je peux aussi ... ne pas le changer ! C'est la première phrase qui réduit l'idée négative du non déterminisme du chaos, qui la module un peu.

**Deuxième phrase :** *Si le simple battement des ailes d'un papillon peut engendrer un ouragan, il peut tout aussi bien l'empêcher.*

**Troisième phrase :** *Plus généralement, je propose l'idée selon laquelle tout au long des années, les petites perturbations n'augmentent ni ne diminuent la fréquence des événements climatiques tels que les ouragans, la seule chose qu'elle peut faire est d'en modifier l'ordre d'apparition.*

Essayons de mieux comprendre ce qu'explique Lorenz de manière un peu maladroite dans cette phrase.

### Chapitre 8 (1'13") :

Pour cela revenons au modèle de Lorenz. Rappelez-vous que chaque point de l'espace représente un état de l'atmosphère. Dans certaines zones, il fait beau et dans d'autres, c'est l'ouragan. Supposons que la zone qui correspond à un ouragan soit cette petite boule. Prenons une condition climatique initiale et observons la trajectoire. De temps en temps, un ouragan se produit, quand la trajectoire pénètre dans la boule. Comptabilisons la proportion du temps entre 0 et  $t$  pendant lequel un ouragan sévit.

Voyez, il semble difficile de deviner à quels moments précis la trajectoire rentre dans la boule. Mais on constate que le temps moyen de passage dans la boule converge vers une limite, quand  $t$  tend vers l'infini. Ici, environ 5,1%.

Maintenant, prenons une autre condition initiale et faisons le même calcul. Eh bien, là encore, on voit que le temps de passage tend en moyenne vers une limite. Mais, oh surprise! On constate que cette limite est la même que précédemment, environ 5,1%. Essayons avec une autre trajectoire.

Ça marche! On obtient la même limite. Et pourtant, les trajectoires sont très différentes, elles sont sensibles aux conditions initiales, aux ailes de papillons.

Prenons une autre boule, rose peut-être et une troisième, verte. Peut-être les périodes de canicule ou de neige? Lorsqu'une trajectoire se développe, elle traverse les boules dans un certain ordre. Pour voir ce qui se passe, considérons trois trajectoires partant de trois conditions initiales différentes. Regardez! Sur les trajectoires, les situations ouragan-neige-canicule alternent de manière incompréhensible, différente d'une trajectoire à l'autre. Impossible à comprendre. Mais les proportions de jaune, vert et rose convergent rapidement vers les mêmes limites : ici, 5,1, 14,03 et 7,4%. Tout se passe comme si on tirait au hasard des boules jaune, verte ou rose avec des probabilités bien précises.

Fin : Chapitre 8 (4'50")

**Relisons à nouveau Lorenz.** « Les petites modifications n'augmentent ni ne diminuent la fréquence des événements climatiques comme les ouragans. La seule chose qu'elles peuvent faire est de modifier l'ordre dans lequel ces événements se produisent. » Voilà un énoncé scientifique! Le but de la prévision a changé. Il s'agit maintenant d'essayer de prévoir des moyennes, des statistiques, des probabilités. L'idée est que ces statistiques sont peut-être insensibles aux conditions initiales : les papillons brésiliens n'y peuvent rien! Cette hypothèse, non démontrée, la possible coexistence d'un chaos météorologique pour lequel les mouvements futurs sont sensibles aux conditions initiales, et d'une stabilité statistique, insensible aux conditions initiales, mettra longtemps avant d'être formulée mathématiquement

Certes un petit événement, comme les battements d'un papillon, peut engendrer un grand événement, comme un ouragan au Texas. Mais ce que le papillon fait ne changera pas le nombre total d'ouragan qu'il y aura au Texas au 21ème siècle. La seule chose qu'il pourra faire est que **les ouragans n'auront pas lieu aux mêmes dates, mais en moyenne les ouragans sont insensibles aux papillons.**

C'est une idée théorique avancée par Lorenz en 1963 sans fondement mathématique : **Le futur, bien que sensible aux conditions initiales du présent pourrait, peut-être, y être insensible statistiquement.**

Tout cela doit être précisé, défini et démontré. Cette idée de Lorenz a mis longtemps à être comprise. Le mathématicien Smale a développé toute une théorie des systèmes dynamiques dans l'ignorance des

travaux de Lorenz. Smale travaillé à Berkeley, Lorenz au MIT mais ne se connaissaient pas. Pourquoi ? Les mathématiciens disent que c'est la faute de Lorenz qui publiait dans des journaux obscurs... Ce qui est faux, ce sont simplement des journaux de physiciens.

## 12.3 Une vision statistique du Chaos.

### 12.3.1 Un modèle plus physique : la grande roue de Bellecour

#### Chapitre 8 (5'58")

Lorenz était probablement un peu gêné par le côté théorique et pour le moins simpliste de son atmosphère de dimension 3. Avec l'aide de deux physiciens, Howard et Markus, il a mis au point un vrai système physique, même s'il est encore un peu simpliste et bien loin du vrai phénomène météorologique.

Voici un moulin. Il est constitué d'une roue autour de laquelle sont suspendus des seaux d'eau. Les seaux sont percés au fond et l'eau s'écoule, d'autant plus vite que le niveau est élevé.

Tout en haut, on ouvre un robinet et on observe le mouvement. Le moulin tourne tantôt à droite, tantôt à gauche, et nous semblons totalement incapables de prévoir dans quel sens il tournera dans quelques secondes.

Le mouvement semble totalement erratique, imprévisible... chaotique. Y a-t-il un rapport entre le moulin et l'attracteur de Lorenz ? Choisissons trois nombres pour décrire le moulin, par exemple la vitesse angulaire et les deux coordonnées de son centre de gravité. L'évolution de ces nombres dessine une courbe jaune dans l'espace. Incroyable, non ? Notre moulin évolue comme un papillon !

Changeons imperceptiblement la position initiale. Au départ, tous les seaux sont vides et la roue de gauche est tournée de 2 degrés, alors que la roue de droite n'est tournée que de 1,9996 degrés. Il faudrait un fameux microscope pour noter la différence. Oui... on observe bien la dépendance sensible aux conditions initiales. Après un certain temps, les deux moulins ont des comportements complètement différents.

Voyons si le moulin vérifie l'affirmation statistique de Lorenz. Nos deux moulins partent presque dans la même position. Observons leurs vitesses, par exemple 25 fois par seconde, pendant 5 000 secondes, donc 125 000 observations. À chaque observation, notons la vitesse de rotation de la roue. Une idée très simple est de faire ce que font les statisticiens : un diagramme en bâtons pour illustrer la distribution. Nous avons découpé 35 intervalles, de même longueur, décrivant la vitesse. Et nous avons compté le nombre de fois où la mesure de la vitesse était dans chacun de ces intervalles.

Voici le résultat : certains intervalles semblent plus visités que d'autres. Nos moulins se comportent de manières bien différentes : il y a dépendance sensible aux conditions initiales. Mais l'observation est que les deux suites de données, bien que différentes, sont statistiquement identiques. Les histogrammes tendent à devenir identiques.

Ça marche ! Lorenz semble avoir raison.

Lorsque la statistique du futur d'une trajectoire est insensible aux conditions initiales, on dit que la dynamique possède une mesure de Sinai-Ruelle-Bowen : une mesure SRB.

Fin : Chapitre 8 (11'05")

### 12.3.2 Retour sur le modèle de Lorenz

#### Chapitre 8 (11'05")

Le but du prévisionniste consiste alors à déterminer ces statistiques. Par exemple, observons l'évolution de la température au cours du temps, l'une des coordonnées dans l'équation de Lorenz. On dessinera encore un histogramme, comme nous l'avons fait avec le moulin.



Pour chaque intervalle de température, on note la proportion d'observations qui tombent dans cet intervalle. Si on considère quatre trajectoires, assez différentes les unes des autres, les diagrammes ont tendance à devenir identiques après une longue période.

L'attracteur de Lorenz possède une mesure SRB. Tout se passe comme si la température évoluait au hasard... mais avec des probabilités bien précises.

Mais il reste beaucoup à faire sur le plan mathématique et physique. Ces probabilités, ces distributions, il faut bien les trouver si l'on veut dire quelque chose d'utile!

Fin Chapitre 8 (12'13")

C'est là où l'on rentre dans la théorie ergodique qui consiste à mettre en place des arguments probabilistes pour décrire des phénomènes déterministes. On revient à Laplace à cette idée que la description du futur est tellement compliquée qu'il faut une intelligence infinie. Ce sont peut être les probabilités qui vont nous aider.

Les mathématiciens Sinaiï, Ruelle et Bowen ont mis en place une méthode qui consiste à comprendre ce qui se passe à l'intérieur de l'attracteur. Imaginons que la trajectoire s'accumule sur cet objet, le papillon et considérons dans l'espace de dimension de 3, une petite boule. La trajectoire va se déplacer dans l'espace et de temps en temps passe dans la boule.

Le but du spécialiste de théorie ergodique consiste à comprendre combien de temps la trajectoire passe en moyenne dans la boule. Si cette moyenne existe, et si elle est indépendante de la CI, on dit qu'on dispose d'une mesure SRB (Sinaiï-Ruelle-Bowen).

### 12.3.3 Existence de mesure SRB

#### Chapitre 9 (4'30")

Observez ce champ de vecteurs dans le plan. Vous y voyez trois positions d'équilibre. Une trajectoire démarre. Après un certain temps, elle s'approche d'une position d'équilibre, puis d'une autre. Quand on s'approche d'un équilibre, on ralentit et on reste un certain temps dans son voisinage.

Ensuite, on repart vers l'autre équilibre. Et on y reste encore plus longtemps. Puis, on revient encore, encore plus près du premier équilibre, et on y reste encore plus longtemps, etc.

Alors, voici un petit disque vert et observons le temps de passage dans ce disque. Eh bien, pendant de très longues périodes, on y reste, si bien que la proportion du temps passé à l'intérieur est proche de 100%. Puis on le quitte très, très longtemps et la proportion chute à une valeur proche de 0. Puis elle remonte près de 100%, puis elle rechute, etc. Vous voyez, il n'y a aucune convergence. Il n'a pas de mesure de Sinaiï-Ruelle-Bowen.

Alors que faire? Abandonner cette idée? Dire que Lorenz s'est trompé? Eh bien non! Il faut comprendre que l'exemple que nous venons de voir est très particulier.

Si l'on modifie un tout petit peu le champ de vecteurs comme ceci, le nouveau champ ne pose plus de problème. Les nouvelles trajectoires voyagent dans le plan et finissent par s'approcher d'une trajectoire périodique, si bien que statistiquement, tout se comporte périodiquement. On a bien une mesure de Sinaiï-Ruelle-Bowen.

Alors il faut plutôt se demander si ces mesures ne se présentent pas, non pas pour toutes les dynamiques, mais pour presque toutes?

Chapitre 9 (7'28")

FIN de la Vidéo

### 12.3.4 Bilan

Tout d'abord espérons avoir rendu justice à Lorenz qui ne s'est pas contenté de dire que le futur dépend fortement du présent. Beaucoup l'avaient dit avant lui. Mais sa contribution est aussi, et

peut-être surtout, de montrer qu'en recentrant ses ambitions autour de questions statistiques, on peut préserver un caractère prédictif à la Science.

Le prévisionniste ne pourra plus dire dans 150 ans, la trajectoire sera là, mais il pourra dire pendant les 150 ans qui viennent, je ne peux pas vous dire où sera la trajectoire, mais je peux vous dire qu'elle sera passée tant de temps dans telle boule.

Ce qui est tout aussi puissant, tout aussi intéressant, qu'une vraie prédiction.

Si nous voulons prévoir le climat dans les 100 ans à venir, nous n'avons aucun espoir de savoir la température à Gerland dans 100 ans, 3 mois, 12 jours et 7h. Et d'ailleurs on s'en moque.

En revanche, je m'intéresse à la température moyenne au mois de juillet dans 100 ans.

Autrement dit ce qui m'intéresse vraiment est de savoir **s'il existe une mesure SRB pour le climat**. Est ce qu'il est possible d'évaluer les temps de passage dans les petites boules ?

Pour donner un exemple plus précis, la petite boule pourrait très bien correspondre à un ouragan. Si on sait répondre combien de temps je passe dans cette boule, cela signifie combien d'ouragans se produiront dans les 100 ans à venir.

**L'existence d'une mesure SRB, est un moyen quantitatif qui permet de restaurer une vision positive sur le futur. On a transformé la vision négative qu'il est impossible de prévoir le futur, en une vision positive.** Oui je peux prévoir le futur mais au lieu de donner la température exacte à telle date, je peux répondre à la température moyenne tel mois.

La conjecture consiste à énoncer le fait que la trajectoire vient s'accumuler sur cet attracteur et que par ailleurs cet attracteur possède une mesure SRB, le paradis pour le prévisionniste.

#### **Quelle est la situation actuellement ?**

Nous avons :

- un exemple, celui de Lorenz, dans lequel on constate de grandes perturbations conséquences de petites perturbations.
- **la phrase de Lorenz**, un peu énigmatique, *peut être, la statistique du futur serait insensible aux conditions initiales.*

Le premier travail a été de démontrer que Lorenz avait raison sur son exemple qui n'a que trois degrés de libertés. Ce travail a été difficile, mais c'est désormais un théorème démontré à la fin du 20<sup>è</sup>, début du 21<sup>ème</sup> siècle. La statistique du futur est en effet insensible aux perturbations du système.

Mais on ne le sait que pour le petit *modèle* de Lorenz, pas pour le vrai **système**, l'atmosphère et Lorenz avait bien conscience qu'il n'est pas complètement clair que son modèle décrive la réalité qu'il souhaite décrire.

La question fait actuellement débat.

- Est ce que les phénomènes qui nous entourent dans la vie de tous les jours relèvent de la théorie de Lorenz ?
- Doit-on parler d'insensibilité statistique ?
- Ces phénomènes sont sensibles au niveau individuel mais, le sont-ils aussi au niveau statistique ?

Toute ces questions font l'objet d'un vaste programme de recherche qui se développe : **Comprendre la nature dynamique en général.**

Au lieu de prendre un exemple particulier, on essaie de prendre un système dynamique le plus quelconque possible pour répondre aux plus grand nombre de questions possibles (Programme de Jacob Palis, mathématicien brésilien). J. Palis pense qu'en général **un système évolue pour aller s'accumuler vers un attracteur qui sera insensible aux conditions initiales dans le sens statistique et non pas insensible dans le sens précis dont on parlait tout à l'heure des ouragans,...**

Par conséquent, Lorenz a compris qu'**une trajectoire individuelle est instable mais que dans sa globalité, il y a stabilité.**

Il est désormais proposé que cette propriété du modèle très particulier de Lorenz représente le cas général : la conjecture est la suivante. Si on prend un système à peu près quelconque, si on prend une trajectoire à peu près quelconque, elle devrait s'accumuler sur un objet, sur un attracteur étrange qui devrait être insensible à la CI.

Le rôle du scientifique ne consiste plus à déterminer la trajectoire future à partir d'une condition initiale comme le disait Newton mais consiste à décrire l'attracteur sur lequel nous allons quoiqu'il arrive, c'est un attracteur robuste et insensible aux CI.

**Le rôle du scientifique est de décrire ces attracteurs et la manière dont ils sont visités.**

## 12.4 Morale

**C'est une vision finalement très optimiste qui permet de concilier l'idée de déterminisme à la Laplace et l'idée probabiliste.**

**D'après la vision du monde de Lorenz, le but du scientifique n'est pas de comprendre l'élément individuel mais de comprendre tout dans sa globalité :** les mesures SRB n'expliquent pas l'individu mais le tout.

La vision contemporaine du déterminisme est celle d'un monde où tout est en relation avec tout, où la trajectoire individuelle est sensible aux conditions initiales et probablement impossible à déterminer dans un avenir lointain mais pour laquelle il est possible d'avoir **une vision déterministe, statistique, raisonnable.**

**On ne peut pas comprendre le mouvement d'un individu, mais on peut probablement comprendre le mouvement global.**

### Prenons un peu de recul

**19ème siècle :** Jadis, on avait l'espoir fou que l'on pourrait **prévoir le futur** de n'importe quoi en faisant suffisamment de calculs.

**Début du 20ème siècle :** On a appris ensuite à être plus modeste. Dans un premier temps, on a été d'abord effrayé en constatant que le futur dépend de façon tellement sensible du présent que **tout espoir semblait perdu de le prévoir.**

**Depuis Lorenz :** on a repensé à la façon d'exprimer le futur et au lieu de chercher des conclusions précises, on cherche des conclusions statistiques. L'espoir n'est pas perdu que l'on fasse des prévisions.

Nous avons désormais une vision différente du futur, plus sensible, plus intelligente que celle de Newton dans laquelle rejaillit un peu de liberté individuelle. Les trajectoires du système dynamique ont leur liberté propre, elles ont leur chemin mais elles ont en commun une statistique identique pour tous.

**Pourquoi l'effet papillon a-t-il un tel succès ?** Peut-être parce qu'il restaure justement notre liberté individuelle.

Le déterminisme froid légué par Newton pouvait mener à une espèce de fatalisme. Le papillon de Lorenz affirme que, si petits que nous soyons, nous pouvons avoir une influence sur le monde. Bonne nouvelle pour nous !

Je terminerai sur ces mots qui me conviennent bien.

## 12.5 Epilogue

J'espère vous avoir convaincu que les idées traitées dans ce cours sont

- Largement interdisciplinaire
- Qu'elles ont été possible grâce à la liberté intellectuelle et la vivacité imaginative de certaines personnes.
- L'importance des idées qualitatives
- La force de la représentation de dessins, qui sont tout à fait complémentaire des équations.

Vous devez avoir compris que dans de nombreuses expériences où le nombre de degrés de liberté est petit, on peut avoir du chaos. La grande question qui se pose est désormais, peut on aller plus loin lorsque le nombre de degré de libertés sera très élevé, comme en turbulence.

L'introduction du concept de sensibilité aux conditions initiales a permis de reconsidérer l'analyse de nombreux phénomènes météorologique, en biologie, en turbulence, en économie.

Mais si les concepts remontent à Poincaré, la pénétration pratique de ces idées dans la communauté scientifique est récente et toujours lente. Vous êtes donc chargé d'une mission. Notre intuition, de par la formation scientifique que nous avons reçue, est intrinsèquement linéaire, mais ce n'est qu'une approximation.

Enfin, c'est un domaine qui a fortement progressé grâce aux interactions entre théoricien/expérimentateur, Physicien/mathématicien et cela a conduit à un triomphe de la physique légère où l'importance de **l'intuition, de l'imagination et l'aptitude au dessin** sont primordiaux.