

Physique Nonlinéaire

Thierry Dauxois

*Laboratoire de Physique, École Normale Supérieure de Lyon,
Université de Lyon, CNRS, 46 Allée d'Italie, F-69364 Lyon cedex 07, France.*

(Dated: 13 février 2021)

Résumé

Cours d'agrégation pour apporter les éléments de base pour la leçon et les montages suivants :

MP28. Instabilités et Phénomènes non linéaires.

MP32. Couplage des oscillateurs.

LP49. Oscillateur ; portraits de phase et non-linéarités qui était le titre en 2018 et qui est réapparue en 2020 sous la forme (Oscillateurs ; Systèmes couplés ; Non linéarités - applications).

Bibliographie :

- P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal, *L'ordre dans le chaos* (1998).
- S. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (1994).
- M. Peyrard, T. Dauxois, *Physique des solitons* (2004).
- A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths (2001) : *Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, Cambridge.*
- M. Krob, *Exemples d'oscillateurs non linéaires*, BUP 90, 131 (1996).
- B.Z. Shakhshiri, *Cerium catalyzed Bromate-Malonic Acid reaction Chemical Demonstration* 2, 257-261 (1985)
- Vidéo d'un cours sur le pendule par un professeur de 75 ans.
<http://www.youtube.com/watch?v=SRh75B5iotI>
- Vidéo des métronomes : http://www.thp.uni-duisburg.de/~sven/_bilder/

CONTENTS

I. Oscillations libres	3
A. Introduction : oscillateur harmonique	3
B. Oscillations du pendule	5
1. Remarques introductives	5
2. Calcul de la période d'oscillations	8
3. Portrait de phase	9
4. Formalisme analytique	11
5. Notion de Bifurcation	13
II. Oscillations auto-entretenues	16
A. Equation de Van der Pol	16
B. Réalisation expérimentale	18
C. Oscillations de relaxation	19
1. Analyse du plan de phase lorsque $\mu \gg 1$.	19
2. Calcul de l'ordre de grandeur de la période dans le régime $\mu \gg 1$.	20
D. Méthode des échelles multiples	21
E. Analyse énergétique	22
F. Bifurcation de Hopf	24
1. Introduction	24
2. Un exemple fameux : la réaction de Belousov-Zhabotinskii	25
III. Oscillations couplées : La chaîne de pendules comme introduction aux solitons	27
A. Introduction	27
B. Topologie du paysage énergétique	29
C. Les solutions de faible amplitude : la limite linéaire	30
D. Solutions soliton	31
E. Énergie du soliton	34
IV. Synchronisation d'oscillateurs	35

I. OSCILLATIONS LIBRES

A. Introduction : oscillateur harmonique

► Nous allons essayer de décrire de manière significativement différente l'oscillateur harmonique de manière à pouvoir étendre cette **description à des systèmes plus compliqués** et plus génériques **dont on ne connaît pas la solution explicite**.

► L'équation du mouvement s'écrit sous la forme suivante

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1)$$

La solution générale peut s'obtenir facilement et l'on obtient : $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$. La solution est périodique avec une période qui est indépendante de la condition initiale x_0 .

Cependant dans le cas général, et c'est justement le cas habituel, on n'est pas capable de trouver la solution explicite. Il est donc utile de pouvoir **caractériser la dynamique autrement**.

► On peut réécrire l'équation (1) sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires qui est ici d'ordre deux :

$$v = \dot{x} \quad (2)$$

$$\dot{v} = \ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (3)$$

Il est possible d'intégrer l'équation (1) en multipliant par $v = \dot{x}$ en

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = \text{cste} \quad (4)$$

ce qui suggère d'introduire l'énergie potentielle $V(x) = \omega^2 x^2/2$. On comprend la dynamique à partir du tracé de cette énergie potentielle en considérant plusieurs conditions initiales, qui correspondent à plusieurs hauteurs de départ sans vitesse initiale. Comme l'énergie est conservée, considérer un départ avec une vitesse initiale ne pose pas de problèmes.

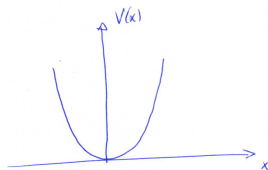


FIGURE 1. Evolution de l'énergie potentielle $V(x)$.

► **Notion de Portrait de phase** : L'état du système est donné à l'instant t par la position de la masse et de sa vitesse : il est donc représenté dans un plan (x, v) par un seul point, que l'on appelle espace des phases ou plan de phase car on est à deux dimensions. Cette égalité correspond dans le plan (x, v) à des ellipses caractérisées par la valeur de la constante.

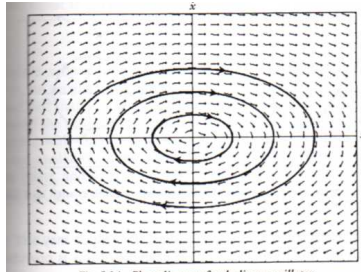


FIGURE 2. Portrait de phase de l'oscillateur harmonique

Les flèches sont rajoutées sur les trajectoires en remarquant que l'expression $v = \dot{x}$ implique que la coordonnée x augmente dans le demi-plan $v > 0$.

Chaque courbe correspond par conséquent dans cet espace des phases à un **mouvement périodique** du système que l'on étudie, puisque la séquence des états successifs se répète de manière infinie.

Il n'y a pas de surprises : on reconnaît la solution de l'équation $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$. Et l'on a bien des ellipses puisque $v(t) = \dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$.

Définition de la linéarité : L'effet est proportionnel à la cause.

Un système dynamique sera dit linéaire si les équations différentielles qui décrivent l'évolution des variables dynamiques x_i ne contiennent que des termes linéaires dans ces variables. C'est bien le cas des équations (2) et (3).

Principe de superposition : On dit qu'un système est linéaire ou relève du principe de superposition si :

- à la somme de 2 entrées quelconques correspond la somme des 2 sorties correspondantes,
- à un multiple d'une entrée quelconque correspond le même multiple de la sortie correspondante.

Plus précisément (ou mathématiquement), si l'on note les excitations e (par référence à entrée) et les réponses s (par référence à sortie) : lorsque l'on sollicite le système par une entrée (excitation) e_i , la réponse est s_i ; Le système est alors dit linéaire si et seulement si

pour λ_1 et λ_2 deux nombres quelconques, la réponse à l'excitation $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ est $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$.

Isochronisme des oscillations : Le cas présent du potentiel quadratique est tout à fait exceptionnel puisque la période de l'oscillation est indépendante de l'amplitude.

- ▶ L'enseignement dans les petites classes fait la part belle aux phénomènes linéaires
 - en mécanique : oscillateur harmonique,
 - en électricité : Loi d'Ohm.
 - en optique géométrique : description matricielle.

C'est en réalité l'exception plutôt que la règle. Il existe deux raisons à cela. Premièrement et avant tout, c'est évidemment plus simple à expliquer et présenter. Par ailleurs, il faut reconnaître qu'une linéarisation des phénomènes non linéaires permet souvent de décrire les propriétés du système de manière assez fidèle. Néanmoins, et c'est le but de ce cours, on va voir ou revoir que la nonlinéarité peut apporter des changements qualitatifs tout à fait importants, inexplicables, ne serait-ce qu'approximativement par des théories linéaires.

B. Oscillations du pendule

1. Remarques introductives

Considérons une **masse ponctuelle** m reliée par un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable à un point fixe 0. L'équation du pendule

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (5)$$

est un excellent exemple pour comprendre la richesse de cette approche. On introduit pour simplifier les notations $g/\ell = \omega_0^2$ qui a la dimension d'une pulsation au carré.

▶ J'ai l'habitude de dire qu'un bon physicien est un physicien fainéant ! Un physicien sait résoudre un nombre limité de problèmes mathématiques, en revanche il sait habilement transformer un problème difficile en un problème déjà résolu dans certaines limites. Quand on réfléchit et que l'on force le trait, on peut affirmer que le physicien résout un nombre incalculable de problèmes à partir de la résolution de très peu d'équations modèles qui ont un comportement générique. L'oscillateur harmonique, l'équation de Schrödinger à une dimension d'une particule dans un puits, ... L'équation du pendule fait indiscutablement partie de cette caste très réduite.

► C'est une équation nonlinéaire qui se réduit à l'équation précédente si l'on fait l'approximation usuelle mais très restrictive que les oscillations sont suffisamment faibles pour que l'on remplace $\sin \theta$ par son premier terme θ .

Mais dans le cas général, cette approximation est trop contraignante et cache toute la richesse de cette équation. D'où l'idée d'essayer de tracer la dynamique de cette équation dans le plan de phase comme précédemment. De manière traditionnelle, on a l'habitude de réécrire cette équation sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre chacune.

► En notant $y = \dot{\theta}$, on peut réécrire l'équation sous la forme

$$\dot{y} = \ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta \tag{6}$$

► Analysons les différentes solutions possibles

- Pour de petites valeurs de θ , on a $\sin \theta \simeq \theta$, on doit retrouver un schéma tout à fait analogue à celui de l'oscillateur harmonique avec des ellipses. *Le montrer sur la pendule en même temps.*
- En revanche si la condition initiale est proche de la verticale, on trouve des oscillations légèrement différentes comme le montre la figure suivante.

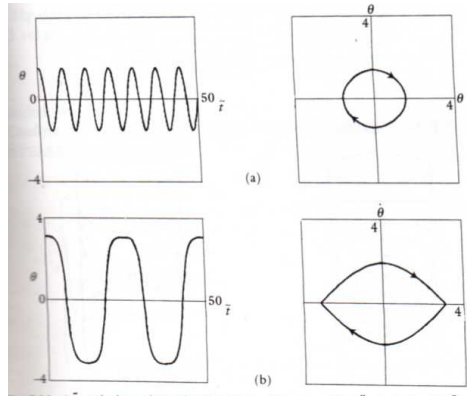


FIGURE 3. Evolution de l'angle θ en fonction du temps et allure dans le plan de phase. Les figures du haut correspondent à un angle de départ faible, alors que celles du bas correspondent à un angle de départ proche de la verticale.

On note notamment que la période d'oscillations peut être arbitrairement grande puisqu'elle diverge au fur et à mesure que l'on tend vers une condition initiale verticale. Il n'y a manifestement plus d'*isochronisme*.

— Supposons ensuite qu'à l'instant initial, le pendule ait une vitesse angulaire non nulle en partant d'une position verticale. On comprend immédiatement qu'en l'absence de dissipation, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ augmente et diminue de manière périodique mais sans changer de signe. Cela correspond aux mouvements de rotation autour du pivot.

► Essayons de caractériser avec précision ces différentes possibilités, et pour cela utilisons les méthodes graphiques présentées pour l'oscillateur harmonique. En multipliant par $\dot{\theta}$ l'équation du pendule (6) puis en intégrant par rapport au temps comme dans le cas harmonique, on aboutit à l'équation énergétique

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega_0^2(1 - \cos \theta) = \text{cste} = E \quad (7)$$

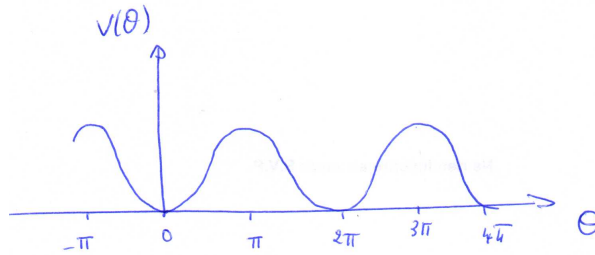


FIGURE 4. Evolution de l'énergie potentielle $V(\theta)$.

Si l'on trace l'expression de l'énergie potentielle $V(\theta) = \omega_0^2(1 - \cos \theta)$ en fonction de l'angle θ , on découvre immédiatement que l'on a plusieurs types de mouvements.

- Si l'énergie E est inférieure à $2\omega_0^2$, on va avoir des mouvements d'oscillations dans l'un des puits.
- Au contraire, pour $E > 2\omega_0^2$, le pendule tourne sans s'arrêter en gardant son sens de rotation. $\dot{\theta}$ reste toujours positif ou bien toujours négatif.
- Le cas intermédiaire $E = 2\omega_0^2$ est un cas limite qui sépare des mouvements qualitativement différents.

On note déjà une différence qualitative avec l'oscillateur harmonique : toutes les solutions ne correspondent pas à des oscillations.

2. Calcul de la période d'oscillations

$$\frac{T}{2} = \int_0^{T/2} d\tau = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} d\theta \frac{d\tau}{d\theta} = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)}} \quad (8)$$

1ère méthode : Cette expression se calcule analytiquement à l'aide de fonctions spéciales que l'on appelle des fonctions elliptiques. En notant θ_0 la condition initiale, on a l'égalité

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \int_0^{+\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} = T_0 \frac{2}{\pi} K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (9)$$

où K est l'intégrale elliptique de première espèce.

On peut aussi obtenir assez simplement une expression approchée en développant le cosinus au quatrième ordre ce qui permet d'aboutir à

$$T = \int_{-\theta_m}^{+\theta_m} \frac{2d\theta}{\sqrt{2(E - \omega_0^2 (1 - \cos \theta))}} \simeq \int_{-\theta_m}^{+\theta_m} \frac{2d\theta}{\sqrt{2E - \omega_0^2(\theta^2 - \theta^4/12)}} \quad (10)$$

2ème méthode : L'équation dynamique au même ordre d'approximation est

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0. \quad (11)$$

La relation trigonométrique $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin(3x)$, suggère de chercher sous la forme perturbative

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t) + \varepsilon \theta_0 \sin(3\omega t) + \dots \quad (12)$$

où $\varepsilon \ll 1$. On obtient rapidement

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta_0 \sin(\omega t) - 9\omega^2 \varepsilon \theta_0 \sin(3\omega t) \quad (13)$$

$$\omega_0^2 \theta = \omega_0^2 \theta_0 \sin(\omega t) + \omega_0^2 \varepsilon \theta_0 \sin(3\omega t) \quad (14)$$

$$-\frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 = -\frac{\omega_0^2}{6} [\theta_0^3 \sin^3(\omega t) + 3\varepsilon \theta_0^3 \sin^2(\omega t) \sin(3\omega t) + \dots] \quad (15)$$

$$= -\frac{\omega_0^2}{8} \theta_0^3 \sin(\omega t) + \frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 \left(\frac{1}{4} - \underbrace{3\varepsilon \sin^2(\omega t)}_{\text{négligeable}} \right) \sin(3\omega t) + \dots \quad (16)$$

En sommant ces trois égalités, on obtient à l'ordre le plus bas

$$0 = \sin(\omega t) \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{8} \right) + \sin(3\omega t) \left(\varepsilon \omega_0^2 - 9\varepsilon \omega^2 + \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{24} \right) + \dots \quad (17)$$

Comme cette expression doit être vérifiée à tout instant t , on aboutit à $\omega^2 = \omega_0^2 - \omega_0^2\theta_0^2/8$, c'est-à-dire $\omega = \omega_0(1 - \theta_0^2/8)^{1/2}$ ou

$$T = T_0(1 - \theta_0^2/8)^{-1/2} \quad (18)$$

$$= T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) + \dots \quad (19)$$

Ce résultat est connu sous le nom de formule de Borda.

Cette méthode permet de mettre en évidence que la nonlinéarité a permis

- l'apparition d'harmoniques
- la perte de l'isochronisme. La période dépend de l'amplitude des oscillations contrairement au cas de l'oscillateur harmonique. Conséquences importantes pour la synchronisation d'oscillateurs.

On note au passage que l'annulation de la seconde parenthèse, conduit à la relation $\varepsilon\omega_0^2 - 9\varepsilon\omega^2 + \omega_0^2\theta_0^2/24 = 0$ qui se simplifie en $\varepsilon - 9\varepsilon(1 - \theta_0^2/8) + \theta_0^2/24 = 0$, c'est-à-dire

$$\varepsilon = \frac{\theta_0^2}{192 - 27\theta_0^2} \simeq \frac{\theta_0^2}{192}. \quad (20)$$

3. Portrait de phase

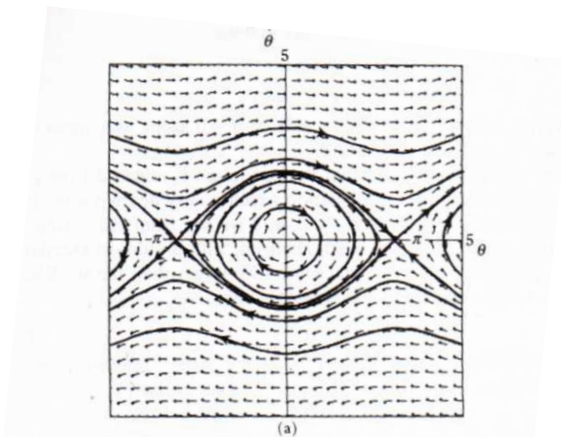


FIGURE 5. Portrait de phase du pendule

► Comme on l'a fait pour l'oscillateur harmonique, il est très utile de tracer le portrait de phase.

On obtient pour les oscillations d'énergie faible des trajectoires fermées dans l'espace des phases : elles correspondent aux trajectoires périodiques du système physique réel. Les utiliser est très utile.

Vocabulaire.

— Les petites oscillations autour de la position d'équilibre stable $\theta = 0$ sont appelées **librations**. Cette dénomination vient de l'astronomie et signifie "petites oscillations", la plus connue venant de la lune.

— On appelle **séparatrice** la ligne permettant de faire la différence entre les solutions bornées.

Ce comportement est différent de la physique linéaire dont l'exemple principal est l'oscillateur harmonique vu précédemment et dont le comportement est toujours qualitativement du même type. Les solutions étaient identiques à une homothétie près.

— Les points d'équilibre avec le pendule vertical, vers le haut ou vers le bas, sont appelés **points fixes**.

— Comme les points d'équilibre, un point fixe peut être **stable ou instable**.

— La trajectoire liant le point fixe instable $\theta = \pi$ au point d'équilibre instable $\theta = -\pi$ est appelé **trajectoire hétérocline**. Elle lie en effet un point fixe à un point fixe différent (on triche...). À distinguer d'une trajectoire **homocline** dans le cas où les deux points sont identiques.

Le temps pour parcourir la trajectoire hétérocline est infini.

► Comme $\theta = \pi$ et $\theta = -\pi$ correspondent à une position identique dans l'espace réel, il est plus naturel de boucler le plan de phase sur lui-même comme le montre la figure (6). L'espace des phases se réduit par conséquent à un cylindre.

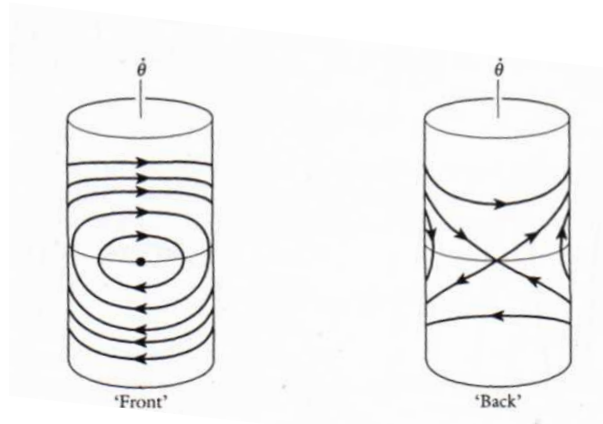


FIGURE 6. Trajectoires du pendule simple dans le plan de phase cylindrique.

On note que le comportement topologique des trajectoires autour des points fixes stables et instables est différent. Les trajectoires tournent autour du point $\theta^* = 0$ alors que 2

trajectoires tendent vers $\theta^* = \pi$ et deux s'en éloignent. On dit que le premier point fixe est un **centre** alors que le second est un **col**.

4. Formalisme analytique

De manière analytique, le type de points fixes est déterminé à partir des valeurs propres de la matrice qui caractérisent le système dynamique, et que l'on appelle matrice jacobienne.

Pour introduire cela, linéarisons le système dynamique autour du point fixe (x^*, y^*) du système dynamique.

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (21)$$

$$\dot{y} = g(x, y). \quad (22)$$

Soit $u = x - x^*$ et $v = y - y^*$. On peut réécrire

$$\dot{u} = \dot{x} = f(x^* + u, y^* + v) = \underbrace{f(x^*, y^*)}_{=0} + u \frac{\partial f}{\partial x_{x^*, y^*}} + v \frac{\partial f}{\partial y_{x^*, y^*}} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv) \quad (23)$$

de même

$$\dot{v} = \dot{y} = g(x^* + u, y^* + v) = \underbrace{g(x^*, y^*)}_{=0} + u \frac{\partial g}{\partial x_{x^*, y^*}} + v \frac{\partial g}{\partial y_{x^*, y^*}} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv). \quad (24)$$

On peut tout réécrire sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

en négligeant les termes quadratiques et supérieurs.

On ramène donc un système dynamique nonlinéaire autour d'un point fixe à l'analyse d'un système dynamique linéaire. On montre que cette approximation est justifiée si le point fixe est un col, un foyer ou un noeud, l'immense majorité des cas. En revanche, les cas limites (étoiles, centres, noeuds dégénérés, points fixes non isolés) sont plus subtils.

L'étude linéaire (cf. Strogatz) dit qu'il suffit d'étudier les valeurs propres de cette matrice pour connaître le type de points fixes.

En notant Δ le déterminant de la matrice et τ la trace, le polynôme caractéristique étant $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$, on a plusieurs cas.

- $\Delta < 0$. On a $\tau^2 - 4\Delta > 0 \Rightarrow$ les 2 valeurs propres sont réelles et leur produit $\Delta < 0$.
On a un col.
- $\Delta > 0$.
 - $\tau^2 - 4\Delta > 0, \exists 2$ solutions réelles \rightarrow Noeuds.
 - $\tau^2 - 4\Delta < 0, \exists 2$ solutions complexes \rightarrow Spirales ou centres dont la stabilité est déterminée par le signe de τ .

La Figure 7 résume ce que l'on vient de dire

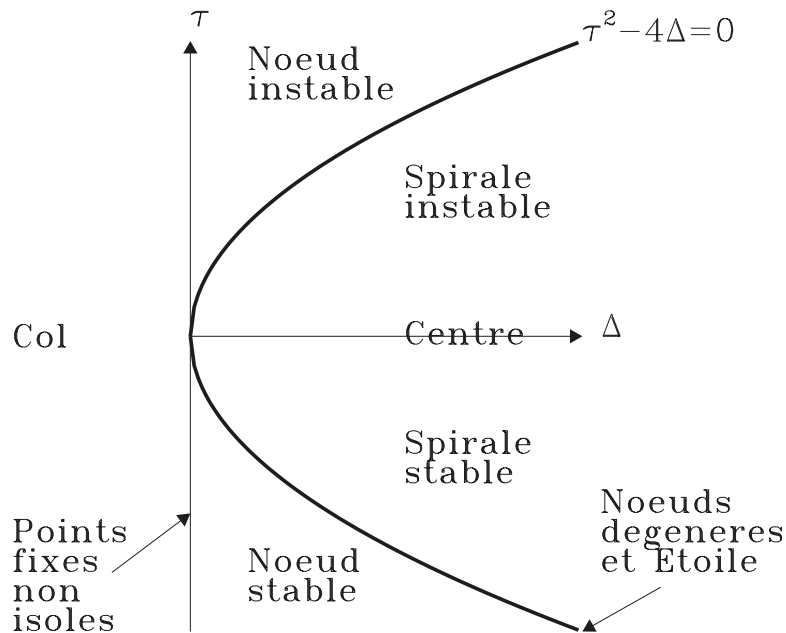


FIGURE 7. Classification des points fixes en fonction de la trace et du déterminant.

Revenons au cas du pendule pour fixer les idées et retrouver ce qui a été déterminé qualitativement auparavant. Cette matrice, notée A , est déterminée au point fixe par la matrice des dérivées partielles. Soyons plus explicite. Notons $p = \dot{\theta}$. Le système dynamique correspondant au pendule simple s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sin[\cdot] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ p \end{bmatrix}$$

qui conduit à la matrice des dérivées partielles calculée au point fixe $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \theta^* & 0 \end{bmatrix}$.

Pour le point fixe $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, on a $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dont les valeurs propres $\pm i$ sont imaginaires pures.

Le point fixe $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$, conduit lui en revanche à $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dont les valeurs propres, ± 1 , correspondent à deux valeurs propres réelles de signes opposés. Ces deux valeurs propres sont associées à deux vecteurs propres, qui correspondent à $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, en accord avec le portrait de phase.

Bilan : le comportement d'un système générique dépend fortement de l'amplitude initiale

- perte du théorème de superposition,
- apparition de solutions qualitativement différentes puisque certaines correspondent à des trajectoires fermées et d'autres non,
- perte de l'isochronisme ce qui aura des conséquences importantes sur les phénomènes de synchronisation lorsque plusieurs oscillateurs seront couplés.

Fin du 1er cours

5. Notion de Bifurcation

L'étude des systèmes dynamiques est encore plus intéressante si l'on considère les changements qualitatifs qui interviennent si l'on modifie un paramètre.

► On peut pour cela étudier un pendule pesant dans lequel on place au préalable de part et d'autre du point le plus bas, deux aimants identiques, n'entravant pas le mouvement du pendule et permettant de bloquer le pendule sur des positions d'équilibre à $\theta \neq 0$.

► Montrer qualitativement l'existence de deux positions d'équilibre stables, alors que la position verticale n'est plus stable. L'idée de ce paragraphe est d'étudier les changements qualitatifs qui interviennent lorsque l'on écarte petit à petit les aimants du point le plus bas, tout en préservant la symétrie.

► En supposant une symétrie parfaite du système, il est naturel de considérer l'énergie potentielle comme une quantité paire en la variable angulaire θ . Comme nous avons vu, qu'il existe une position instable et deux stables, on peut raisonnablement admettre que cette

énergie potentielle possède 1 maximum local en l'origine et deux minima en θ_{eq} .

On pourrait être tenté de modéliser cette énergie potentielle sous une forme analytique du type $V(\theta) = -a_2\theta^2 + a_4\theta^4$ avec a_2 et a_4 deux constantes positives, mais nous allons nous restreindre à une analyse qualitative et non pas quantitative.

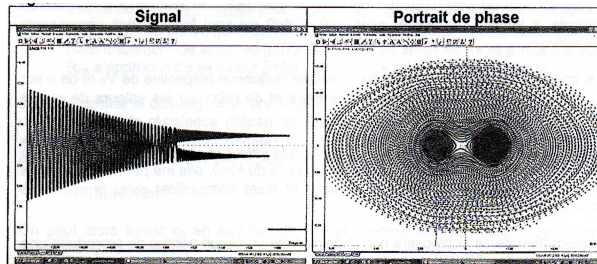


FIGURE 8. Evolution à partir de deux conditions initiales différentes. Signal à gauche et portrait de phase à droite.

► On tire deux conclusions différentes

- Le portrait de phases permet de retrouver deux attracteurs, ici deux points fixes dont on peut donner les coordonnées dans l'espace des phases. Du point de vue de la théorie des systèmes dynamiques, la connaissance de ces deux points fixes est suffisante puisqu'aux temps longs, le système sera forcément dans l'un ou dans l'autre puits de potentiel.

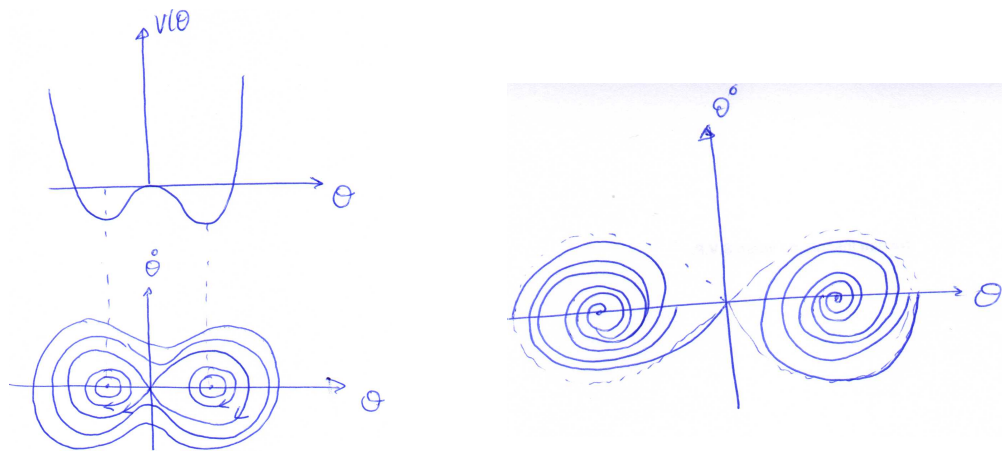


FIGURE 9. Allure du potentiel double puits. En bas, portrait de phase en l'absence de dissipation à gauche et en présence à droite.

- L'évolution initiale est sensible aux conditions initiales au sens où selon la condition initiale on atterrit dans le puits de droite ou bien celui de gauche. Le nom d'attracteur

prend alors tout son sens. Chaque puits à un bassin d'attraction que l'on peut colorier sur le portrait de phase.

► On s'aperçoit donc que la présence des aimants a modifié de manière qualitative la position aux temps longs du pendule.

- Si les deux aimants sont en $\theta = 0$, la verticale est une position d'équilibre stable ou bien un point fixe stable.
- En revanche, s'ils sont déplacés symétriquement par rapport à $\theta = 0$, la verticale est instable et on a désormais deux points fixes qui sont apparus, et qui sont placés de manière symétrique au point fixe à la verticale. On parle de **bifurcation**.

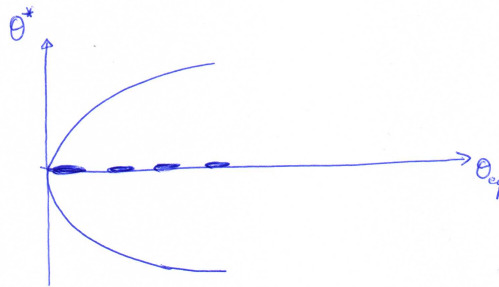


FIGURE 10. Diagramme de bifurcation présentant la position des points fixes stables (ligne continue) ou instable (ligne pointillée) lorsque l'on éloigne la position des deux aimants en θ_{eq} .

► La nonlinéarité était présente dans le terme sans dérivée temporelle, le terme source autrement dit. Elle peut cependant apparaître aussi dans le terme dissipatif et c'est ce que l'on va voir dans le chapitre suivant.

Remarque : Notons qu'il existe toujours des solutions qui tournent dans le cas du pendule avec aimants. Nous n'avons donc pas considéré jusqu'ici toutes les solutions selon l'axe θ . Il faudrait considérer que le potentiel double puits se répète de manière périodique selon l'axe θ .

II. OSCILLATIONS AUTO-ENTRETENUES

A. Equation de Van der Pol

► Un oscillateur auto-entretenu est un oscillateur qui oscille durablement sans excitation extérieure (sans forçage donc). On dit que la trajectoire tend vers un **cycle limite**.

Pour cela, l'oscillateur harmonique (unique oscillateur linéaire avec deux degrés de liberté) ne peut convenir puisque c'est un modèle théorique qui néglige les frottements qui sont pourtant inévitables. Sans nonlinéarités, on ne peut compenser ces frottements.

Un oscillateur auto-entretenu est donc forcément non linéaire.

► Balthazar Van der Pol a introduit un circuit électronique qui conduit à une équation avec un terme nonlinéaire au niveau de la dissipation de façon à apporter de l'énergie pour compenser la dissipation

On passe alors d'une spirale stable à une spirale instable.

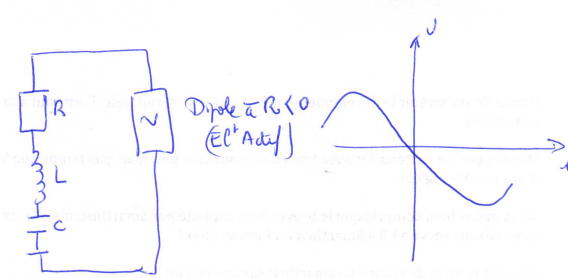


FIGURE 11. Les deux valeurs propres sont soit réelles, soit complexes conjuguées.

$U = U_A - U_G = \frac{Q}{C} + L\ddot{Q} + R\dot{Q}$ et $U_{G'} - U_{A'} = -R_0I + bI^3$ avec b et R_0 deux constantes positives.

On a donc

$$\frac{Q}{C} + L\ddot{Q} + R\dot{Q} + (-R_0I + bI^3) = 0 \quad (25)$$

En dérivant par rapport au temps et en utilisant l'égalité $I = \dot{Q}$, on a donc

$$\frac{I}{C} + L\ddot{I} + R\dot{I} - R_0\dot{I} + 3bI^2\dot{I} = 0 \quad (26)$$

qui se réécrit sous la forme

$$L\ddot{I} + (R - R_0 + 3bI^2)\dot{I} + \frac{I}{C} = 0 \quad (27)$$

que l'on peut réécrire après un changement de variable sous la forme

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (28)$$

$\tau = t\sqrt{LC}$, $x = I/I_0$ avec $R_0 - R = 3bI^2$ et $\mu = (R_0 - R)\sqrt{C/L}$.

► Cette équation de Van der Pol a eu beaucoup d'impact sur la théorie des systèmes dynamiques. Son origine vient des premiers circuits électroniques, ceux rencontrés dans les radars.

Elle ressemble à l'équation d'un oscillateur harmonique avec une friction qui dépend de l'amplitude x . La friction est positive (comme à l'ordinaire) si $|x| > 1$ mais négative si $|x| < 1$. On comprend assez simplement que cette équation va tout naturellement inciter les petites oscillations à croître en amplitude alors que les grandes oscillations vont être réduites.

► On peut réécrire ce système sous la forme

$$\dot{x} = y \quad (29)$$

$$\dot{y} = -x - \mu(x^2 - 1)y \quad (30)$$

On découvre immédiatement que ce système a un seul point fixe, $x^* = y^* = 0$, c'est-à-dire l'origine. Calculons la matrice Jacobienne (c'est-à-dire la matrice des dérivées partielles) au niveau de ce point fixe. On a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\mu y^* x^* & -\mu(x^{*2} - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique correspond à $\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0$ qui a pour discriminant $\Delta = \mu^2 - 4$.

- Pour $0 < \mu < 2$, le discriminant est négatif et les valeurs propres sont $\lambda_{\pm} = (\mu \pm i\sqrt{4 - \mu^2})/2$ qui définit un **foyer instable** puisque l'on a deux valeurs propres complexes avec des parties réelles positives.
- Pour $\mu = 2$, on a une valeur propre double $\mu = 1$ qui définit un **noeud instable** puisque les valeurs propres sont réelles positives.
- Enfin, pour $\mu > 2$, le discriminant est positif et les valeurs propres sont $\lambda_{\pm} = (\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4})/2$ qui définit un **noeud instable** puisque l'on a deux valeurs propres réelles positives.

En conclusion, quelque soit la valeur du paramètre μ , on a bien un **point fixe instable**.

B. Réalisation expérimentale

Montrer le comportement de l'élément non linéaire, puis donner l'équation de Van der Pol.

Plaquette toute faite préparée selon le BUP 785.

Nonlinéarité approximativement cubique dans l'article de Krob du BUP Vol 490 (1996) :

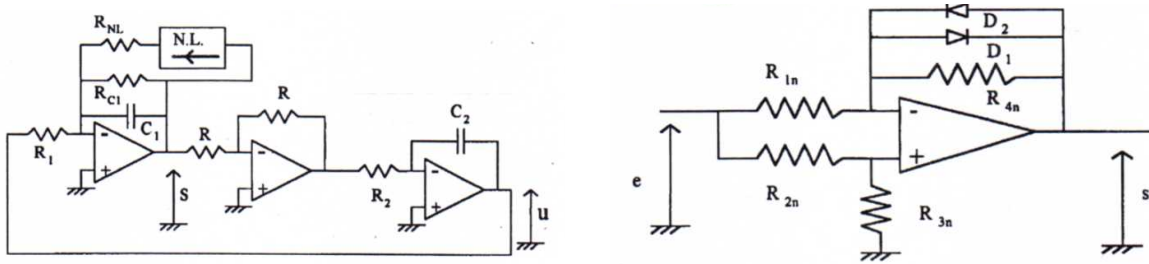


FIGURE 12. Réalisation expérimentale de l'oscillateur de Van der Pol dans lequel le composant non linéaire est décrit comme sur le panel de droite.

En première approximation, on a bien $u = \alpha e + \beta e^3$ avec un paramètre $\alpha < 0$.

Expliquer qualitativement la naissance des oscillations à partir de l'équation, montrer à l'oscilloscope. Si on augmente le « poids » du terme non linéaire, les oscillations sont de moins en moins sinusoïdales. Portrait de phase : montrer à l'oscilloscope. Cycle limite plus ou moins déformé selon les cas.

C. Oscillations de relaxation

1. Analyse du plan de phase lorsque $\mu \gg 1$.

► L'équation (28) conduit à

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} = -x \quad (31)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\dot{x} + \mu \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \right] \quad (32)$$

$$= \frac{d}{dt} [\dot{x} + \mu F(x)] \quad (33)$$

où l'on a introduit $F(x) = x^3/3 - x$. En posant par conséquent $w = \dot{x} + \mu F(x)$, on aboutit à $\dot{w} = -x$.

Les choses sont encore plus explicites en introduisant la variable $y = w/\mu$, puisque l'on aboutit au système

$$\dot{x} = \mu(y - F(x)) \quad (34)$$

$$\dot{y} = -x/\mu \quad (35)$$

► Supposons que l'on considère une condition initiale située hors de la courbe $F(x)$. On aura

$y - F(x)$ d'ordre 1 $\Rightarrow \dot{x} = \mathcal{O}(\mu) \gg 1$ d'après (34) et $\dot{y} = \mathcal{O}(1/\mu) \ll 1$ d'après (35).

La vitesse est donc gigantesque horizontalement et négligeable verticalement. Si le point est au dessus de la courbe $y = F(x)$, on aura $\dot{x} > 0$ qui rabattra le système sur la courbe et plus particulièrement sur la partie droite. En revanche, si le point de départ est en dessous, il rejoindra très rapidement et toujours selon une droite quasi horizontale, la partie gauche.

Une fois que le point a rejoint la courbe $y = F(x)$, il reste dans un voisinage tel que $y - F(x) = \mathcal{O}(1/\mu^2)$. Les deux composantes de la vitesse sont alors du même ordre de grandeur et le point se déplace à la vitesse $1/\mu$ le long de la courbe. Le point descend (resp. remonte) le long de la partie droite (resp. gauche) puisque la composante verticale est négative (resp. positive).

► Les choses changent de manière qualitative lorsque l'on atteint le bas de la branche de droite ou bien le haut de celle de gauche.

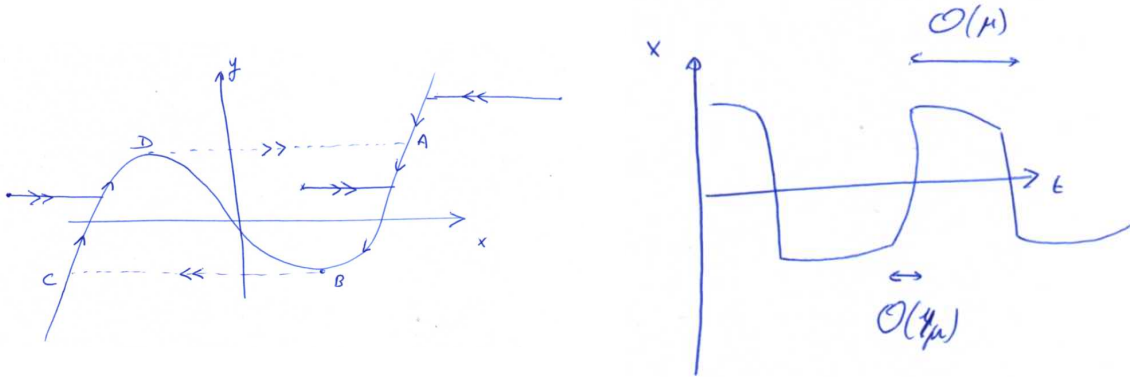


FIGURE 13. Représentation de la dynamique de l'oscillateur de VanderPol

2. Calcul de l'ordre de grandeur de la période dans le régime $\mu \gg 1$.

Il est clair que la période est essentiellement dominée par le temps passé sur les branches lentes, puisque les durées des deux sauts peuvent être négligées. Par symétrie, on a immédiatement

$$T \simeq 2 \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{x_A}^{x_B} \frac{dt}{dx} dx \quad (36)$$

On a ensuite

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \simeq F'(x) \frac{dx}{dt} = (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} \quad (37)$$

$$= -x/\mu \quad (38)$$

qui se simplifie en

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\mu(x^2 - 1)} \quad (39)$$

que l'on peut introduire dans la formule (36) pour obtenir finalement

$$T \simeq 2 \int_{x_A}^{x_B} dx \mu \left(x - \frac{1}{x} \right) \quad (40)$$

$$= -2\mu \left[\left(\frac{x_B^2}{2} - \frac{x_A^2}{2} \right) - \ln x_B + \ln x_A \right] \quad (41)$$

$$= -2\mu \left[\frac{1}{2} - 2 + \ln 2 \right] = \mu [3 - 2 \ln 2] \quad (42)$$

qui est bien d'ordre μ .

Il y a bien deux échelles de temps qui interviennent de manière successive.

Lorsque le paramètre μ n'est plus très grand, les deux échelles de temps ne sont plus vraiment très différentes ce qui nécessite un traitement plus subtil.

D. Méthode des échelles multiples

Par tradition, lorsque μ est petit, on préfère noter le paramètre de contrôle ε .

Utilisons la méthode des échelles multiples pour montrer que l'oscillateur de Van der Pol possède un cycle limite presque circulaire dont le rayon est $2 + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

► On cherche par conséquent la solution de l'équation

$$\ddot{x} + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0, \quad (43)$$

en introduisant une série d'échelles de temps différents $\tau_i = \varepsilon^i t$, sous la forme

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i x_i(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots). \quad (44)$$

► Les dérivées temporelles devront par conséquent être remplacées sous la forme suivante

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow \partial_{\tau_0} + \varepsilon \partial_{\tau_1} + \varepsilon^2 \partial_{\tau_2} + \dots \quad (45)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \longrightarrow (\partial_{\tau_0} + \varepsilon \partial_{\tau_1} + \varepsilon^2 \partial_{\tau_2} + \dots)^2 = \partial_{\tau_0 \tau_0} + 2\varepsilon \partial_{\tau_0 \tau_1} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (46)$$

L'équation (43) se réécrit par conséquent sous la forme

$$\begin{aligned} & (\partial_{\tau_0 \tau_0} + 2\varepsilon \partial_{\tau_0 \tau_1} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \dots) (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) + (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) \\ & + \varepsilon ((x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^2 - 1) (\partial_{\tau_0} + \varepsilon \partial_{\tau_1} + \varepsilon^2 \partial_{\tau_2} + \dots) (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

► **À l'ordre** ε^0 , on retrouve $\partial_{\tau_0 \tau_0} x_0 + x_0 = 0$ qui correspond à l'équation d'un oscillateur harmonique. La solution générale est

$$x_0 = r(\tau_1, \tau_2, \dots) \cos[\tau_0 + \phi(\tau_1, \tau_2, \dots)] \quad (48)$$

où l'amplitude r et la phase ϕ sont deux **fonctions** lentement variables.

► **À l'ordre** ε^1 , on a

$$\partial_{\tau_0 \tau_0} x_1 + x_1 = -2\partial_{\tau_0 \tau_1} x_0 - (x_0^2 - 1)\partial_{\tau_0} x_0 \quad (49)$$

Il est essentiel d'annuler les termes résonants du terme de droite pour éviter toute divergence de x_1 qui retirerait tout sens à l'expression sous la forme d'une série perturbative.

On obtient pas conséquent en notant les dérivées par rapport à τ_1 par des primes

$$\text{r.h.s} = -2(-r' \sin(\tau_0 + \phi) - r\phi' \cos(\tau_0 + \phi)) + [r^2 \cos^2(\tau_0 + \phi) - 1] r \sin(\tau_0 + \phi) \quad (50)$$

$$= \left[2r' - r + \frac{r^3}{4} \right] \sin(\tau_0 + \phi) - 2r\phi' \cos(\tau_0 + \phi) + \frac{r^3}{4} \sin 3(\tau_0 + \phi) \quad (51)$$

Les deux premiers termes étant résonants, ils doivent s'annuler et l'on obtient tout d'abord

$$2r\phi' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{d\tau_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi(\tau_2, \tau_3, \dots) \quad (52)$$

et ensuite le système dynamique du premier ordre

$$2r' - r + \frac{r^3}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad r' = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4} \right) \quad (53)$$

qui a un point fixe instable en 0 et un point fixe stable en $r^* = 2$. On aura donc $\lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} r(\tau_1) = 2$

► On aboutit par conséquent à

$$x_0 = r(\tau_1, \tau_2, \dots) \cos [\tau_0 + \phi(\tau_1, \tau_2, \dots)] \rightarrow 2 \cos [\tau_0 + \phi(\tau_2, \dots)] \quad (54)$$

qui correspond donc à un cycle limite d'amplitude 2 et circulaire. On note également que le cercle est parcouru avec une pulsation unité.

Les oscillateurs auto-entretenus sont des modèles de systèmes naturels oscillants : ce sont des modèles intrinsèquement nonlinéaires.

Mathématiquement, un tel oscillateur est décrit par un système dynamique autonome (sans dépendance explicite du temps). Il diffère des oscillateurs linéaires (en cas de dissipation, les systèmes linéaires ne peuvent osciller qu'en présence d'un forçage extérieur) et des systèmes non dissipatifs et nonlinéaires, dont la dynamique dépend surtout de la position initiale.

E. Analyse énergétique

► En introduisant $y = x\sqrt{\varepsilon}$, l'équation de l'oscillateur de Van der Pol (28) peut être réécrite sous la forme

$$\ddot{y} - (\varepsilon - y^2) \dot{y} + y = 0 \quad (55)$$

qui est bien une généralisation de la première équation du cours, l'équation (1). Déterminer vous-même le changement de variable.

L'énergie de l'oscillateur harmonique

$$E(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} (\dot{y}^2 + y^2) \quad (56)$$

varie au cours du temps suivant la loi

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} (2\ddot{y}\dot{y} + 2\dot{y}y) = \dot{y} (\ddot{y} + y) = (\varepsilon - y^2) \dot{y}^2. \quad (57)$$

L'énergie moyenne d'un oscillateur entretenu est constante et, de ce fait,

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{dE}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{[E(t_0 + \tau) - E(t_0)]}{\tau} = 0 \quad (58)$$

ce qui implique

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \overline{(\varepsilon - y^2) \dot{y}^2} = (\varepsilon \overline{\dot{y}^2} - \overline{\dot{y}^2 y^2}) = 0. \quad (59)$$

Ainsi la production d'énergie $\varepsilon \overline{\dot{y}^2}$ résultant de l'instabilité se trouve en moyenne exactement compensée par la dissipation $\overline{\dot{y}^2 y^2}$ due à la nonlinéarité.

► Un calcul approché permet de déterminer l'amplitude du cycle limite pour $\varepsilon = 0^+$. Dans ce cas, en effet, on peut admettre que $y(t) = \rho \sin t$. Il s'ensuit que

$$\overline{\dot{y}^2} = \frac{1}{2} \rho^2 \quad \text{et} \quad \overline{\dot{y}^2 y^2} = \frac{1}{8} \rho^4. \quad (60)$$

Le bilan moyen d'énergie dressé ci-dessus montre que, dans ce domaine, $\rho \simeq 2\sqrt{\varepsilon}$. Cela conduit à $y = 2\sqrt{\varepsilon} \sin t \Rightarrow x = 2 \sin t$ comme on l'avait déterminé.

La taille ρ du cycle limite, à peu de chose près, un cercle, varie donc comme la racine carré du paramètre ε .

► Ce résultat, établi dans le cas particulier de l'équation de Van der Pol, est en fait de portée beaucoup plus générale. Le terme en y^2 peut, en effet, être regardé comme représentatif de toute non-linéarité, quelle qu'elle soit, tant que celle-ci reste faible ; c'est, en somme, la forme standard du premier ordre non linéaire du développement en série de Taylor d'une fonction quelconque.

Si le développement commençait par un terme linéaire, i.e. pour une dissipation $\gamma(y) = -\gamma_0 (1 + \alpha y - (y/y_0)^2)$, le terme linéaire n'aurait pas d'effet direct sur l'évolution de l'énergie, au moins près de la bifurcation. En effet sa contribution moyenne à $\overline{\frac{dE}{dt}}$ sera de la forme $\overline{\alpha y \dot{y}^2}$, qui s'annule pour $y = \rho \sin t$.

Fin du 2nd cours

F. Bifurcation de Hopf

1. Introduction

Quelles sont les possibilités pour qu'un système 2D avec 1 point fixe perde sa stabilité lorsque l'on modifie un paramètre ? La réponse se trouve évidemment dans les valeurs propres du jacobien. Nous avons vu jusqu'ici essentiellement des valeurs propres réelles (positives ou négatives).

Comme les deux sont solutions du polynôme caractéristique, elles sont solutions d'une équation du second degré à coefficients réels. On a donc soit deux valeurs propres réelles négatives, soit deux valeurs propres complexes conjuguées.

Le point se déstabilisera lorsque l'une des deux passe ou bien lorsque les deux passent simultanément dans le demi-plan de droite.

On passe alors d'une spirale stable à une spirale instable.

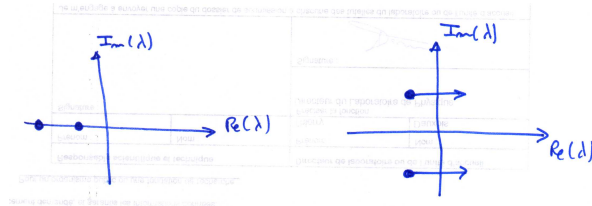


FIGURE 14. Soit les deux valeurs propres sont réelles, soit elles sont complexes conjuguées.

Lorsque à l'instar de l'exemple précédent un point donne naissance à un cycle limite par franchissement d'une valeur critique, c'est une bifurcation de Hopf.

Cette notion est très importante car indépendante à la fois du nombre de degré de libertés et de la forme détaillée des équations ou applications mises en jeu.

On pourra notamment citer deux propriétés cardinales du cycle limite dans le voisinage du point où se produit une telle bifurcation.

- L'amplitude du cycle est proportionnelle à la racine carrée de l'écart au seuil : $A \sim \sqrt{|\varepsilon - \varepsilon_c|}$.
- Il est possible de montrer que la période des oscillations est en revanche indépendante de cet écart du moins au second ordre près : $dT/d\varepsilon \simeq 0$.

Ce sont naturellement deux caractéristiques tout à fait typiques, d'un très grand intérêt pratique pour identifier une bifurcation de Hopf.

2. *Un exemple fameux : la réaction de Belousov-Zhabotinskii*

L'oxydation de l'acide malonique par l'ion bromate présente des oscillations dans les concentrations de certaines espèces.

► En 1958, le biochimiste russe Boris Pavlovitch Belousov découvrit par hasard une réaction aux propriétés surprenantes : contrairement à ce qui s'était toujours vu, cette réaction présentait des oscillations de concentrations de certaines espèces. À cause de la guerre froide, il ne parvint pas à faire partager sa découverte au monde scientifique si ce n'est pas une courte publication dans une revue méconnue (*Sbornik Referatov po Radiacni Medecine*).

► En 1961, Anatol Zhabotinsky, étudiant en biophysique, consacra sa thèse à l'étude de la réaction de Belousov. Ce fut le commencement d'un intérêt grandissant pour l'étude des systèmes chimiques oscillants et son extension aux phénomènes non linéaires.

► Dans le **montage**, il ne faut pas que la présentation soit purement qualitative ou descriptive. Il faudra choisir une étude **quantitative** selon vos goûts :

1. La réaction faisant intervenir des couples d'oxydo-réduction, un **suivi potentiométrique** peut être une bonne solution. (électrode de platine et électrode au sulfate mercurieux).
2. Un **enregistrement des oscillations à l'aide d'un spectrophotomètre** est une autre bonne solution. BUP 96 page 571 : Variations chromatiques sur la réaction de Belousov-Zhabotinsky par V. Pimienta et al.

3. **Idée supplémentaire :**

- Effectuer un test lors de la préparation à température ambiante et garder l'enregistrement. Mesurer la période.
- Refaire l'expérience devant le jury en ayant préalablement trempé le bocal dans un bain mari. La vitesse de la réaction est fortement dépendante de la température. La période doit être significativement plus faible.

Conclusion : Cette réaction chimique est un exemple de choix pour l'enseignement de la dynamique des systèmes non linéaires. Cette réaction est peu présentée malgré

- son grand intérêt scientifique dans le développement de nouvelles idées de Physique non linéaire.
- son étude très importante dans la physique française, notamment à Bordeaux.
- le mélange physique-chimie qui est bienvenu pour un professeur de sciences physiques.

— voire la biochimie puisque la motivation initiale était la recherche d'un modèle du cycle de Krebs (cycle de l'acide citrique) qui correspond à une série de réactions biochimiques dont la finalité est de produire des intermédiaires énergétiques qui serviront à la production d'ATP dans la chaîne respiratoire

Shakhashiri B.Z. (1985) Cerium catalyzed Bromate-Malonic Acid reaction Chemical Demonstration vol 2 pp.257-261

Pour la présentation, prendre trois éprouvettes :

1. Verser dans le bécher qui contient un barreau magnétique 31 mL de solution A et 18 mL de solution B
2. Agiter 1 min.
3. Verser ensuite 57 mL de solution C et puis 10 gouttes de ferroïne.
4. Maintenir l'agitation.
5. Le passage au vert est rapide, le reste de l'évolution est lente.

A 33°C, la période est de 30 s. On a facilement plus de 40 oscillations. A 25°C, c'est beaucoup plus lent et pour un cours je ne le recommande pas

L'idéal est d'avoir des solutions tièdes (en fait, la solution C à 50°C suffit puisqu'elle réchauffe les autres).

III. OSCILLATIONS COUPLÉES : LA CHAÎNE DE PENDULES COMME INTRODUCTION AUX SOLITONS

A. Introduction

► Considérons une chaîne de pendules couplés.

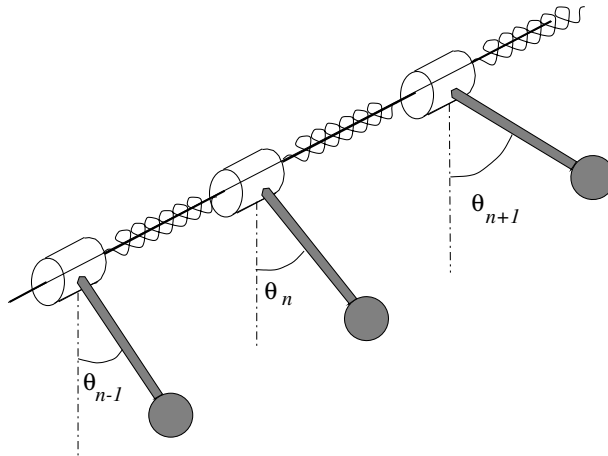


FIGURE 15. Chaîne de pendules d'axe commun, couplés par des ressorts de torsion, dont les équations du mouvement dans l'approximation des milieux continus conduisent au modèle de sine-Gordon.

Les pendules sont mobiles autour d'un axe commun et deux pendules consécutifs sont reliés par un ressort de torsion. On note θ_n l'écart angulaire du pendule n par rapport à sa position d'équilibre.

► L'hamiltonien du système est la somme, sur toutes les mailles de la chaîne, de trois contributions :

$$H = \sum_n \frac{I}{2} \left(\frac{d\theta_n}{dt} \right)^2 + \frac{C}{2} (\theta_n - \theta_{n-1})^2 + mgl(1 - \cos \theta_n) \quad . \quad (61)$$

- La première correspond à l'énergie cinétique de rotation des pendules, où I est le moment d'inertie d'un pendule par rapport à l'axe.
- Le second terme représente l'énergie du couplage élastique entre deux pendules voisins assuré par les ressorts de torsion de constante de raideur C ,
- Le dernier terme décrit l'énergie potentielle de pesanteur d'un pendule, en notant ℓ la distance à l'axe de son centre de gravité, m sa masse et g l'accélération de la pesanteur.

► Si l'on introduit le moment conjugué de θ_n , $p_n = I\dot{\theta}_n$, les équations du mouvement de la chaîne de pendules se déduisent de cet hamiltonien à l'aide des équations de Hamilton

$$\frac{d\theta_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n} \quad \text{et} \quad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_n} . \quad (62)$$

Elles conduisent aux équations différentielles non linéaires couplées suivantes

$$I \frac{d^2\theta_n}{dt^2} - C(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n) + mg\ell \sin \theta_n = 0 \quad , \quad (63)$$

► La solution exacte n'est pas connue, mais on peut obtenir une solution approchée grâce à l'approximation des milieux continus. Cette dernière sera valable si le couplage entre les pendules est suffisamment fort pour que la variable θ varie peu d'un pendule à l'autre.

Notons a la distance entre les pendules. On remplace les variables discrètes $\theta_n(t)$ par la fonction $\theta(x, t)$ où $\theta_n = \theta(x = na, t)$. Le développement de Taylor de $\theta_{n\pm 1} = \theta(x = na, t) \pm a \frac{\partial \theta}{\partial x}|_{x=na} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \dots$ conduit à

$$\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n \simeq a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left(a^4 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4}\right) \quad (64)$$

en tenant compte de la décroissance rapide de ses termes successifs qui contiennent les dérivées d'ordre croissant d'une fonction qui varie lentement avec l'espace.

En introduisant les deux quantités suivantes,

$$\omega_0^2 = \frac{mg\ell}{I} \quad \text{et} \quad c_0^2 = \frac{Ca^2}{I} \quad , \quad (65)$$

homogènes respectivement au carré d'une pulsation et d'une vitesse, on aboutit finalement à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad , \quad (66)$$

qui est connue sous le nom d'équation de sine-Gordon (ou plus brièvement "SG").

► La chaîne de pendules n'est bien sûr qu'une réalisation approximative de l'équation SG puisqu'elle n'est pas décrite exactement par l'équation continue (les effets de la discrétisation n'étant pas totalement négligeables) mais surtout parce qu'elle est faiblement dissipative en raison des frottements au niveau de l'axe de rotation des pendules. Elle constitue néanmoins un modèle intéressant qui permet d'observer les propriétés remarquables des solitons. En étudiant l'équation de sine-Gordon, nous verrons comment ce système mécanique permet de montrer avec une expérience simple des phénomènes typiques de la théorie de la relativité et de la mécanique quantique !

B. Topologie du paysage énergétique

► Pour analyser l'ensemble des solutions de l'équation de sine-Gordon, il est utile de considérer la représentation de la figure 16 de l'énergie potentielle de pesanteur des pendules en fonction de θ et de la coordonnée d'espace x le long de la chaîne. Quelle que soit sa position x , un pendule est soumis au même potentiel $V(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$ de sorte que la surface d'énergie potentielle de pesanteur apparaît comme une tôle ondulée.

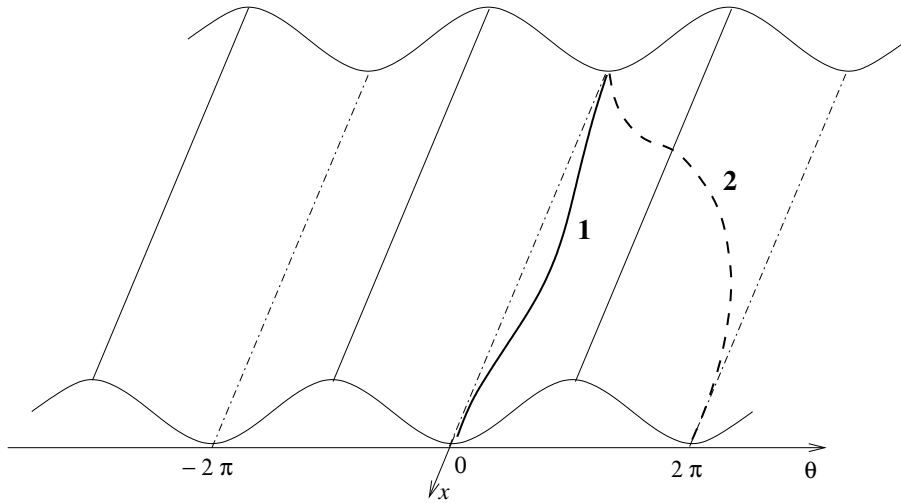


FIGURE 16. Topologie du paysage d'énergie potentielle du modèle sine-Gordon. Les lignes en trait fort ou interrompu représentent la position d'une ligne élastique massive imaginaire qui aurait la même équation de mouvement que la chaîne de pendules dans l'approximation des milieux continus.

► Pour se représenter complètement l'énergie potentielle du système, il faut tenir compte de l'énergie de couplage harmonique provenant des ressorts de torsion. Dans la limite des milieux continus, on voit la chaîne de pendules couplés comme une ligne élastique (si θ varie en un point x_0 , cela tend à entraîner une variation similaire aux points voisins), massive, placée sur les ondulations du potentiel $V(\theta)$. Cette représentation fait immédiatement apparaître quelques caractéristiques fondamentales qui distinguent le modèle sine-Gordon du modèle KdV étudié précédemment.

On constate que le système possède *plusieurs états fondamentaux dégénérés énergétiquement*. On peut en effet mettre le système dans son état fondamental en plaçant toute la chaîne en $\theta = 0$ ou en $\theta = 2p\pi$ (p étant un entier).

► Cette caractéristique du modèle *SG* permet d'envisager *plusieurs familles de solutions* :

- des solutions dans lesquelles toute la chaîne reste à l'intérieur d'une même vallée de potentiel (cas **1** de la figure 16).
- des solutions dans lesquelles la chaîne passe d'une vallée à l'autre (cas **2** de la figure 16, qui correspond à une solution soliton).

► Plus quantitativement, on peut distinguer les solutions par leur comportement aux limites $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta - \lim_{x \rightarrow -\infty} \theta = 0 \quad \text{dans le cas } \mathbf{1} \quad (67)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta - \lim_{x \rightarrow -\infty} \theta = 2p\pi \quad (p \neq 0) \quad \text{dans le cas } \mathbf{2} \quad . \quad (68)$$

Ces deux solutions sont dites *topologiquement différentes* car leur différence est une propriété globale de la solution. En effet, si l'on se place pour $|x| \rightarrow \infty$, un examen local des deux solutions ne permet pas de faire de distinction puisque l'on voit des pendules dans leur état d'énergie minimale. C'est seulement en regardant globalement la chaîne de pendules que l'on peut réaliser que l'on a fait un tour complet en passant d'une extrémité à l'autre.

C. Les solutions de faible amplitude : la limite linéaire

Considérons d'abord la situation $\theta \ll 2\pi$, correspondant à un cas particulier des solutions de type **1**. En prenant la limite linéaire du terme sinusoïdal, l'équation SG (66) se réduit à

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad , \quad (69)$$

qui admet les solutions en ondes planes

$$\theta = \theta_0 e^{i(qx - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (70)$$

dans lesquelles la pulsation ω et q , vecteur d'onde à une dimension, sont reliés par la relation de dispersion $\omega^2 = \omega_0^2 + c_0^2 q^2$, représentée sur la figure 17. Dans la limite des grands vecteurs d'ondes q , la vitesse de phase des ondes linéaires tend vers la constante c_0 .

► On constate cependant que ω n'est pas proportionnel à q , c'est-à-dire que l'équation de sine-Gordon décrit des ondes *dispersives* en raison de la présence du terme $\omega_0 \sin \theta$. Comme l'équation KdV, l'équation SG contient par conséquent, simultanément, *dispersion et non linéarité*, mais pour SG ces deux aspects sont introduits par le même terme de l'équation.

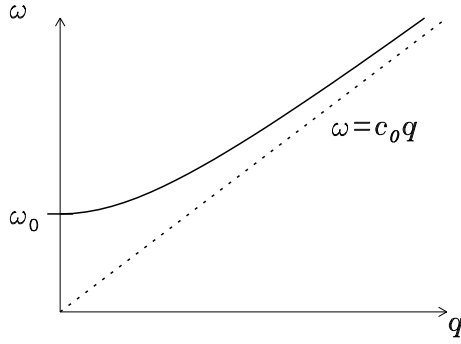


FIGURE 17. Relation de dispersion des ondes de faible amplitude dans le modèle SG.

D. Solutions soliton

► Pour déterminer les solutions de l'équation SG, on peut remarquer qu'elle est invariante par une transformation de Lorentz relative à la vitesse c_0 ($\xi = (x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c_0^2}$ et $\tau = (t - vx/c_0^2)/\sqrt{1 - v^2/c_0^2}$). Cela permet de chercher des solutions statiques et de déduire ensuite les solutions mobiles à la vitesse v par une transformation de Lorentz.

► Cependant, pour obtenir les solutions solitons, on peut aussi, chercher des solutions à profil constant mobiles à la vitesse v , c'est-à-dire ne dépendant que de la variable $z = x - vt$. On retrouvera alors l'invariance des solutions par la transformation de Lorentz.

Pour les solutions à profil constant, en utilisant $\partial_t \rightarrow -v\partial_z$ et $\partial_x \rightarrow \partial_z$, l'équation SG devient

$$v^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} - c_0^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad , \quad (71)$$

ou bien

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} \sin \theta \quad . \quad (72)$$

En multipliant par $d\theta/dz$ et en intégrant par rapport à z on obtient

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 = - \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} \cos \theta + C \quad . \quad (73)$$

► La constante d'intégration C est déterminée par les conditions aux limites imposées à la solution. Comme on cherche une solution soliton, c'est-à-dire localisée spatialement, on doit avoir $\theta(z) \rightarrow 0 \pmod{2\pi}$ pour $|z| \rightarrow \infty$ puisqu'on veut qu'à l'infini les pendules soient dans leur état fondamental. Pour la même raison on impose $d\theta/dz \rightarrow 0$ si $|z| \rightarrow \infty$, ce qui donne

$C = \omega_0^2/(c_0^2 - v^2)$ et, par conséquent :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} (1 - \cos \theta) = 0 \quad . \quad (74)$$

► On peut raisonner en considérant que cette expression représente la somme de l'énergie cinétique (vis-à-vis du “pseudo-temps” z) et de l'énergie potentielle d'une particule fictive. La solution cherchée $\theta(z)$ décrit donc le mouvement à **énergie totale nulle** de cette particule dans le potentiel

$$V_{\text{eff}}(\theta) = - \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} (1 - \cos \theta) \quad . \quad (75)$$

► La figure 18 montre que, pour $c_0^2 - v^2 > 0$, il existe un mouvement possible pour une

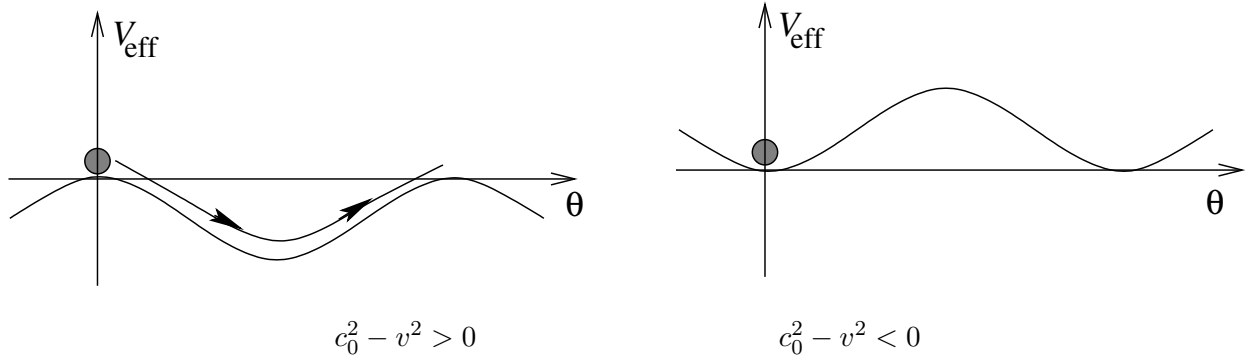


FIGURE 18. Recherche des solutions possibles dans le modèle SG en considérant une particule fictive mobile dans le pseudo-potential $V_{\text{eff}}(\theta)$.

particule fictive partant du repos en $\theta = 0$. Elle peut rejoindre $\theta = 2\pi$ (ou $\theta = -2\pi$) qu'elle atteindra avec une “vitesse” $d\theta/dz$ nulle au bout d'un “temps fictif” z infini. On contraire, pour $c_0^2 - v^2 < 0$, si la particule est initialement au repos, il n'y a pas de mouvement possible. Ce raisonnement montre déjà que les solitons ne peuvent se propager qu'à des vitesses *inférieures* à c_0 (**subsoniques**). Il montre également qu'il n'existe **pas de solution à profil constant, connectant la même vallée**.

► Dans le cas $v^2 < c_0^2$, il y a en revanche une solution soliton qui après intégration de l'équation (74), conduit à

$$\theta = 4 \arctan \exp \left[\pm \frac{\omega_0}{c_0} \frac{z - z_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \right] \quad \text{avec} \quad z = x - vt \quad . \quad (76)$$

La constante d'intégration arbitraire z_0 détermine la position du soliton à l'instant initial.

► La solution permet non seulement de retrouver la forme caractéristique liée à **l’invariance de Lorentz relative à la vitesse** c_0 , mais aussi la **condition** $v^2 < c_0^2$ que nous avons trouvée par le raisonnement sur une particule fictive (également en accord avec l’invariance de l’équation par transformation de Lorentz).

Les solutions “soliton”, signe + dans l’expression (76), et “antisoliton”, signe – dans l’expression (76), sont représentées sur la figure 19. Comme elles sont associées à des variations rapides d’une grandeur elles sont souvent désignées par le terme anglais “kink” (ou “anti-kink” pour l’antisoliton). Le soliton correspond à une torsion de 2π de la chaîne, localisée

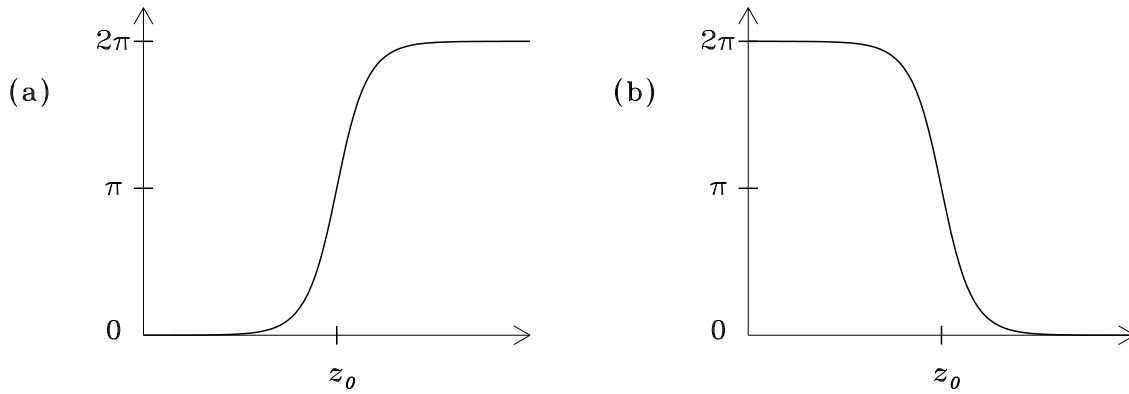


FIGURE 19. Solutions soliton (a) et antisoliton (b) de l’équation sine-Gordon.

spatialement qui interpole donc deux états différents du système ayant la même énergie.

► Soliton et antisoliton diffèrent par leur *charge topologique* définie par

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x, t) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \theta(x, t) \right] \quad (77)$$

qui vaut +1 pour le soliton et –1 pour l’antisoliton. La charge topologique est un invariant (même dans le cas des solutions multisolitons bien qu’elles ne soient plus à profil constant). Il est facile de comprendre qualitativement cette propriété en considérant le paysage d’énergie du modèle sine-Gordon représenté sur la figure 16. Pour annuler la charge topologique d’un soliton dans un tel système, il faudrait passer une longueur infinie de chaîne au-dessus de la barrière de potentiel. La conservation de la charge topologique est associée à la stabilité exceptionnelle des solitons topologiques, beaucoup plus grande que celle des solitons non-topologiques de l’équation de KdV. Dans un milieu infini comportant un seul soliton, on peut changer sa vitesse, ou même le stopper complètement, par des perturbations mais pas le faire disparaître puisque cela entraînerait un changement de charge topologique.

► Comme la description de la chaîne de pendules par l'équation de sine-Gordon a été obtenue en faisant l'approximation des milieux continus, les solutions de l'équation SG ne sont pas des solutions exactes pour la chaîne. Il faut tester la validité de la solution soliton dans ce cadre. On peut réécrire la solution (76) sous la forme

$$\theta(x, t) = 4 \arctan \exp \left(\pm \frac{x - vt}{L} \right) \quad \text{avec} \quad L = \frac{c_0}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} \quad , \quad (78)$$

dans laquelle L mesure l'extension spatiale de la solution.

Cette expression met en évidence plusieurs propriétés de la solution :

- (i) **La contraction de Lorentz du soliton** qui correspond à la racine dans l'expression de L : la largeur du soliton tend vers 0 lorsque sa vitesse v tend vers la vitesse du son c_0 . C'est ainsi que le chaîne de pendules permet de faire une "expérience de relativité".
- (ii) L'importance du poids relatif du terme de couplage c_0 par rapport au terme de potentiel de site ω_0 . **La largeur au repos du soliton** est $L_0 = c_0/\omega_0 = a\sqrt{C/(mg\ell)}$.

► L'approximation des milieux continus n'étant valable que si $L_0/a \gg 1$, elle sera vérifiée lorsque $C \gg mg\ell$. Cela signifie que l'énergie de torsion des ressorts liant les pendules doit être grande par rapport à l'énergie de rappel de pesanteur sur chaque pendule. Une grande valeur de C assure naturellement que les angles $\theta_n(t)$ et $\theta_{n+1}(t)$ de deux pendules voisins restent proches l'un de l'autre. L'approximation correspond donc à une approximation de *couplage fort*.

E. Énergie du soliton

On peut la calculer à partir de l'hamiltonien (61). Dans l'approximation des milieux continus, le terme correspondant à une maille divisé par la valeur du paramètre de maille donne l'hamiltonien par unité de longueur, c'est-à-dire la densité hamiltonienne, \mathcal{H} ,

$$\mathcal{H}(x, t) = \frac{1}{a} \left[\frac{I}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{Ca^2}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + mg\ell(1 - \cos \theta) \right] \quad , \quad (79)$$

si l'on se limite à l'ordre le plus bas pour remplacer le terme $(\theta_{n+1} - \theta_n)^2$ comme lors de l'obtention de l'équation de SG.

Si l'on s'intéresse uniquement à l'expression de \mathcal{H} pour un soliton, il est judicieux d'utiliser

à nouveau la variable $z = x - vt$, telle que $\theta(x, t) = \theta(z)$, de manière à obtenir l'expression

$$\mathcal{H}(z, t) = \frac{1}{a} \left[\frac{Iv^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \frac{Ca^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + mg\ell(1 - \cos \theta) \right] . \quad (80)$$

Une intégration spatiale donne l'énergie du soliton

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(x, t) dx \quad (81)$$

$$= \frac{8I\omega_0 c_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} = \gamma m_0 c_0^2 \quad (82)$$

qui a la forme d'une **expression "relativiste"**, vis-à-vis de la vitesse c_0 , pour l'énergie d'une particule de masse $m_0 = 8I\omega_0/c_0$.

Le soliton de SG semble par conséquent correspondre vraiment à une quasi-particule.

- Ondes linéaires (en présence ou non de solitons).
- Propagation du soliton
- Mise en évidence qu'après réflexion un soliton se transforme en un anti-soliton : Réflexion.
- Collision d'un soliton mobile avec un statique : Carreau !
- Collision d'un soliton mobile avec un antisoliton. Annihilation.

IV. SYNCHRONISATION D'OSCILLATEURS

► De nombreux oscillateurs non linéaires, naturels ou fabriqués par l'homme, sont capables d'ajuster leurs rythmes en présence d'une interaction faible : évidemment, ce n'est possible que parce que ce sont des oscillateurs non-isochrones. Un oscillateur harmonique est incapable de modifier sa période d'oscillation.

► Exemples :

- deux lasers couplés commencent à résonner avec une fréquence commune
- les cellules d'un cœur artificiel (pacemaker) fonctionnent de manière synchronisée
- les violons d'un orchestre jouent à l'unisson

Cette coordination des rythmes est une manifestation d'un phénomène non linéaire fondamental – *La synchronisation*. Découvert au 17ème siècle par Christiaan Huygens, il a depuis été observé en physique, chimie, biologie et même dans les comportements sociaux, mais aussi dans des applications pratiques en médecine ou dans les sciences de l'ingénieurs. Cette

notion de synchronisation a été récemment étendue pour décrire les rythmes de systèmes chaotiques, de systèmes avec un très grand nombre d'oscillateurs, de systèmes continus...

► Vidéos des Métronomes :

- découplées,
- couplés en phase,
- couplés en opposition de phase,
- 5 métronomes.

► Nous comprenons cette synchronisation comme un ajustement des rythmes d'oscillateurs par l'intermédiaire d'une interaction faible. Il est essentiel de comprendre que **cette synchronisation est essentiellement un effet nonlinéaire.**

► Au contraire de la plupart des systèmes physiques pour lesquels la nonlinéarité introduit une correction à la théorie linéaire, le caractère nonlinéaire ici est déterminant : **le phénomène n'intervient que pour les systèmes auto-entretenus et loin de l'équilibre.**

► Il est important de mentionner que l'accrochage de phase n'implique absolument aucune restriction sur les amplitudes. Les deux oscillateurs peuvent très bien avoir des amplitudes différentes ou des formes différentes (les oscillations peuvent être des relaxations (pulse) ou quasi-harmonique).

► Toutes les horloges sont de ce type : Métronomes, Lasers, électrogénérateurs, Systèmes vivants (Neurones, cœur, rythmes biologiques,...)