

## Examen du cours “des Systèmes Dynamiques au Chaos”

Mardi 26 avril 2005

### 1 Questions de cours

- 1(a) Comment s'appelle le théorème qui permet de montrer qu'il existe un cycle limite ?
- 1(b) Dessiner succinctement le portrait de phase du pendule, dans le cas où l'on néglige les frottements.
- 1(c) On considère le système dynamique  $\dot{x} = r - x - e^{-x}$ . Déterminer graphiquement le nombre de points fixes. Montrer qu'il y a une bifurcation lorsque le paramètre  $r$  varie. Pour quelle valeur ? Quel est le nom de cette bifurcation ?
- 1(d) Tracer sur un graphe la succession des itérés de l'application  $x_{n+1} = \cos x_n$ .
- 1(e) Définir ce qu'est un exposant de Lyapunov par une phrase.

### Problème – Romance, poésie et systèmes dynamiques : un modèle de l'amour entre Laura et Pétrarque

Ce problème est consacré à l'analyse d'un modèle qui prétend décrire la dynamique amoureuse de deux personnes, en tenant compte de leur personnalité. Ce modèle fait référence de manière explicite à un cas très spécial et très connu d'amour **non réciproque** !

Le célèbre poète italien du 14ème siècle, *Francisco Petrarca* (1304-1374) rencontra à 23 ans en Avignon, *Laura de Noves*, une femme très belle ... mais mariée. Il ressentit immédiatement une grande passion, sublimée à la mort de la jeune femme, et écrivit plus de 200 poèmes pendant les 21 années qui suivirent la première rencontre. Ceux-ci sont aujourd'hui considérés comme à l'origine de la poésie d'Amour moderne, influençant même Shakespeare. Il y glorifie la beauté physique et spirituelle de Laura, évoquée au sein d'une nature harmonieuse. Objet de désir, la jeune femme devient après sa mort objet d'adoration et “aux sombres nuits d'angoisses” succèdent des souffrances plus complexes.

Malheureusement seuls quelques poèmes sont datés. La connaissance de l'ordre chronologique est pourtant essentielle pour étudier le développement logique, psychologique et stylistique du poète. Plusieurs tentatives ont donc été proposées à partir de la remarque cruciale que les émotions de Pétrarque étaient cycliques.

Dans le modèle que nous allons étudier, les émotions de Laura et de Pétrarque sont décrites par trois équations différentielles ordinaires. Laura est décrite par la variable  $L(t)$ , représentant son émotion à l'instant  $t$ . Les valeurs de  $L$  grandes et positives signifient une grande amitié, alors que les valeurs négatives sont à associer à de la froideur et de l'antagonisme. La personnalité de Pétrarque étant plus complexe, deux variables sont nécessaires pour la décrire.  $P(t)$  est l'amour pour Laura alors que  $Z(t)$  représente son inspiration poétique.

On supposera que ces trois quantités sont liées par les équations différentielles suivantes

$$\frac{dL}{dt} = -\alpha_1 L(t) + R_L(P(t)) + \beta_1 A_P \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\alpha_2 P(t) + R_P(L(t)) + \beta_2 \frac{A_L}{1 + Z(t)} \quad (2)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -\alpha_3 Z(t) + \beta_3 P(t) \quad , \quad (3)$$

où les fonctions  $R$  sont des fonctions de réaction.  $A_i$  est l'attrait (physique, social, intellectuel,...). Les constantes  $\alpha_i$  et  $\beta_j$  sont prises positives.

## 2 Modélisation

Dans un premier temps, nous allons discuter différents aspects qui permettent d'aboutir au modèle. C'est une étape bien évidemment cruciale dans toute modélisation d'un processus physique.

- 2(a) Décrire les trois termes de la partie droite de l'équation (1).
- 2(b) En l'absence d'amour de Pétrarque pour Laura qu'elle serait l'évolution de l'inspiration poétique ?
- 2(c) Justifier le choix  $R_P(L) = \beta_2 L$ . Le choix de la constante de proportionnalité est il une contrainte ?
- 2(d) Justifier le choix  $R_L(P) = \beta_1 P(1 - P^2)$ . Pour quelle(s) valeur(s) de  $P$  la réponse est elle maximale ?
- 2(e) Réécrire les 3 équations après ces différents choix.
- 2(f) Sachant que Pétrarque écrivait encore des poèmes plus de dix ans après la mort de Laura, proposer un classement des paramètres  $\alpha_i$  du plus petit au plus grand.
- 2(g) Les attirances  $A_L$  et  $A_P$  sont de signes opposés. Pourquoi ? Lequel est positif ?

## 3 Amour paisible ou Amour cyclique ?

Considérons le système d'équations

$$\frac{dL}{dt} = -\alpha_1 L(t) + \beta_1 [P(1 - P^2) + A_P] \quad (4)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\alpha_2 P(t) + \beta_2 \left[ L + \frac{A_L}{1 + Z(t)} \right] \quad (5)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \varepsilon [-Z(t) + \mu P(t)] \quad , \quad (6)$$

où l'on a introduit les deux nouveaux paramètres positifs  $\varepsilon$  et  $\mu$ , de manière à obtenir les conditions générales garantissant l'existence d'un cycle limite dans le processus amoureux.

### 3.1 Le poète amoureux marri

Nous allons étudier tout d'abord le cas où l'inspiration du poète et son amour sont totalement découplés. Cela correspond au cas  $\varepsilon = 0$ .

- 3.1(a) Montrer que Laura et Pétrarque ne peuvent pas alors connaître les affres d'un amour cyclique. Plus prosaïquement, on montrera que l'état  $(L(t), P(t))$  ne peut pas tendre vers un cycle limite si  $\varepsilon = 0$ . Comme étudié en cours, on pourra s'intéresser à  $\text{div } F$ .
- 3.1(b) Vers quel(s) état(s) évolue le système ? Quelle est l'évolution de l'inspiration poétique dans le temps ?
- 3.1(c) Montrer qu'en éliminant la variable  $L$  des équations (1) et (2), on obtient une équation  $\Phi(Z) = \Psi(P)$  où  $\Psi(P) = 3\Pi P - P^3$ . Donner l'expression de  $\Phi$  et de  $\Pi$ .
- 3.1(d) Dessiner la fonction  $\Psi(P)$  et donner l'expression des extrema locaux,  $\Psi^\pm$ , quand ils existent.
- 3.1(e) Quelle est la représentation de la courbe  $\Phi(Z)$  dans le diagramme  $\Psi = \Psi(P)$  ? A quelle condition n'existe-t-il qu'une seule solution à l'équation  $\Phi(Z) = \Psi(P)$ .
- 3.1(f) Déterminer et dessiner sur le dessin  $\Psi = \Psi(P)$  le point d'équilibre pour un poète sans inspiration. Même question dans le cas d'un poète ayant une inspiration très intense. En déduire que si les deux conditions  $A_P < -2\Pi^{3/2}$  et  $A_L > (\beta_1/\alpha_1)(2\Pi^{3/2} - A_P)$  sont respectées, il existe une unique solution à l'équation  $\Phi(Z) = \Psi(P)$ .
- 3.1(g) Déterminer les inspirations poétiques pour lesquelles il y a 1 solution, 2 solutions et 3 solutions pour la variable  $P$  représentant l'amour de Pétrarque envers Laura.
- 3.1(h) Étudier la stabilité de ces solutions. Tracer  $P$  en fonction de  $Z$ , en représentant par des lignes continues les parties stables et par des lignes tiretées les instables.
- 3.1(i) Puisque leur amour était cyclique, quelles conclusions en déduisez vous sur les attirances physiques entre Laura et Pétrarque ?

### 3.2 L'amoureux marri versificateur versatile

Considérons désormais le cas plus réaliste où l'inspiration est influencée par l'état amoureux. Plus spécifiquement, étudions le cas  $\varepsilon$  faible.

- 3.2(a) Calculer  $\text{div } F$ . Que peut on conclure ?
- 3.2(b) Justifier que l'inspiration du poète aura une dynamique lente vis-à-vis de celles de l'amour entre Laura et Petrarque. Préciser ce que l'on entend par "le paramètre  $\varepsilon$  est faible".
- 3.2(c) Il existe une méthode de perturbation singulière qui affirme alors que le système peut-être décomposé en une composante rapide  $(L(t), P(t))$  avec  $Z = \text{cste}$ , et une composante lente, décrite par l'équation (6). Quelle est la variété dans l'espace tri-dimensionnel  $(L, P, Z)$ , pour laquelle  $Z$  est constant ?
- 3.2(d) Dans la description du problème concernant Laura et Pétrarque, quelle est la condition initiale du système qu'il faut considérer ? On précisera toutes les composantes.
- 3.2(e) Décrire le tout début de l'évolution temporelle en supposant qu'elle est qualitativement identique pour toutes les valeurs de  $\mu$ . Est-ce un *coup de foudre* ? Justifier.

- 3.2(f) Quelle est l'évolution ultérieure? Montrer que la rencontre de Laura est initialement bénéfique à l'inspiration poétique de Pétrarque.
- 3.2(g) En traçant sur un même graphe, la variété déterminée au 3.2(c) ainsi que la courbe  $P$  en fonction de  $Z$  déterminée au 3.1(h), montrer que pour  $\mu$  inférieur à une valeur  $\mu_{crit}$  à déterminer, l'inspiration poétique s'annule à un certain point de leur histoire d'amour. Décrire de manière qualitative l'évolution en fonction du temps.
- 3.2(h) Même question dans le cas  $\mu > \mu_{crit}$ . Montrer que l'on obtient inévitablement un amour cyclique.
- 3.2(i) En s'inspirant d'une méthode développée en cours, déterminer une expression donnant de manière approximative la période de leur histoire d'amour.