

Examen du cours “des Systèmes Dynamiques au Chaos”

Jeudi 20 avril 2006

Notes de cours manuscrites autorisées.

1 Question de cours autour de l'application de Bernoulli

On considère l'application de Bernoulli, parfois appelée “decimal shift map”,

$$x_{n+1} = 10 x_n \pmod{1}. \quad (1)$$

On rappelle que la fonction modulo 1 signifie que l'on ne s'intéresse qu'à la partie non entière. Par exemple $2.67 \pmod{1} = 0.67$.

- 1(a) Représenter l'application $f(x)$. Quel est l'image de l'intervalle de départ $I = [0, 1]$?
- 1(b) Représenter sur le dessin les 3 premiers itérés issus de $x_0 = 0.2515$.
- 1(c) Déterminer les 5 itérés issus de $x_0 = 0.123456789$. Commenter.
- 1(d) Trouver les points fixes de cette application.
- 1(e) Montrer que cette application a au moins une orbite périodique de chaque période. Il suffira de donner un exemple de période p pour chaque tout entier $p > 1$.
- 1(f) Montrer que cette application a une infinité d'orbites apériodiques.
- 1(g) En considérant le taux de séparation d'orbites initialement proches, déterminer si cette application met en évidence une sensibilité aux conditions initiales.
- 1(h) Calculer l'exposant de Lyapunov de cette application.
- 1(i) Est ce que cette application est chaotique ?
- 1(j) Quelles propriétés caractéristiques retrouve-t-on dans cette application permettent de justifier votre réponse à la question précédente ?

2 Jonction Josephson supraconductrice

Les jonctions Josephson supraconductrices peuvent créer des tensions oscillant à des fréquences extraordinaires. De nombreux espoirs sont fondés sur cette technologie et notamment pour les commutations rapides dans les circuits électroniques. Bien que la mécanique quantique soit absolument nécessaire pour comprendre l'origine de l'effet Josephson, on peut néanmoins décrire la dynamique de ces jonctions classiquement.

Une jonction tunnel Josephson est constituée de deux électrodes supraconductrices, de taille caractéristique de l'ordre du micromètre, séparées par une mince couche d'isolant électrique en oxyde d'Aluminium, de dix à cinquante angströms d'épaisseur, pouvant être traversée par un courant tunnel, non dissipatif, d'origine quantique. En définissant ϕ la différence de phase entre les deux supraconducteurs, la dynamique d'une telle jonction est déterminée par les deux équations fondamentales obtenues par Josephson pendant sa thèse et connues respectivement sous le nom d'effet Josephson continu ($I = I_c \sin \phi$) et alternatif ($d\phi/dt = 2eV/\hbar$) où \hbar est la constante de Planck divisée par 2π , e la charge élémentaire, enfin le courant critique I_c sera pris égal à $1\mu\text{A}$.

La courant total qui traverse les jonctions Josephson *réelles* correspond en réalité à la somme de trois contributions différentes : le supercourant tunnel de paires dû à l'effet Josephson, une contribution de courant normal résistif correspondant à l'effet tunnel des porteurs de charge habituels et un courant capacitif.

- 2(a) On note R la résistance de l'isolant et C la capacité géométrique de la jonction. Donner l'expression des courants résistif et capacitif.
- 2(b) Dessiner le circuit équivalent à la jonction Josephson réelle.
- 2(c) On branche la jonction aux bornes d'un générateur de courant délivrant une intensité constante I . Donner l'équation électrique régissant la dynamique du circuit ainsi formé.
- 2(d) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la différence de phase ϕ .
- 2(e) Donner un problème physique analogue en tout point mathématiquement. On précisera les analogies des différents termes.
- 2(f) Donner l'ordre de grandeur du temps caractéristique d'oscillation de cette jonction.
- 2(g) En introduisant des variables sans dimensions que l'on précisera, montrer que l'on aboutit à l'équation différentielle

$$I_0 = \sin \phi + \frac{d\phi}{d\tau} + \beta \frac{d^2\phi}{d\tau^2}. \quad (2)$$

- 2(h) Réécrire cette équation sous la forme d'un système dynamique. Quel est son ordre ? Est-il linéaire ou non linéaire ?
- 2(i) On se place désormais (questions i, j, et k) dans la limite suramortie $\beta \ll 1$. Déterminer l'évolution de la différence de phase (on pourra s'intéresser aux points fixes).
- 2(j) Déterminer la caractéristique courant-tension une fois les phénomènes transitoires disparus, i.e. la courbe donnant la tension moyenne $\langle V \rangle$ en fonction du courant appliqué I .
- 2(k) Tracer la caractéristique. Commenter le comportement à fort courant.
- 2(l) Le paramètre β n'étant plus négligeable, déterminer les points fixes et leur type. S'il y a une bifurcation, donner son nom et la valeur critique du paramètre de contrôle.
- 2(m) Déterminer et tracer la nouvelle caractéristique tension-courant.
- 2(n) En pratique, on observe que la tension saute à zéro de manière discontinue. Pourquoi ?
- 2(o) En s'aidant de l'analogie de la question 2(e), expliquer cette nouvelle caractéristique.