

Examen du cours “des Systèmes Dynamiques au Chaos”

Jeudi 24 avril 2008

Notes de cours manuscrites autorisées.

1 Modèle des oscillations de l'anche d'une clarinette

Lord Rayleigh a proposé “l'équation de Rayleigh”

$$m\ddot{x} + kx = a\dot{x} - b\dot{x}^3 \quad (1)$$

comme modèle des oscillations de l'anche d'une clarinette (cf. Fig. 1), où k et m sont positifs.

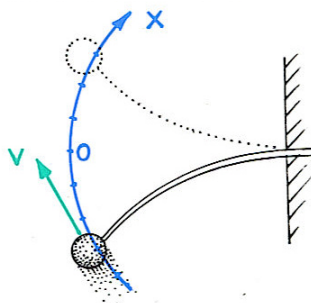


FIG. 1 – Modèle du mouvement de l'anche d'une clarinette.

- 1(a) Donner l'origine physique des différents termes de l'équation.
- 1(b) En l'absence de souffle, la baguette correspond à un pendule amorti linéairement. Déterminer les valeurs et les signes des paramètres a et b , pour que le point fixe soit une spirale stable.
- 1(c) Rayleigh a donc modifié le système amorti linéairement de manière à inclure l'effet du clarinettiste qui souffle le long de l'anche et fournit par conséquent de l'énergie. Expliquez par un raisonnement simple quels doivent être les signes respectifs des paramètres a et b de manière à changer la stabilité de l'origine par rapport à la question 1(a) et à éviter toute divergence.
- 1(d) Déterminer l'allure du portrait de phase lorsque $m = 2$ et $k = a = b = 1$.
- 1(e) Montrer que l'on peut réécrire l'équation de Rayleigh sous la forme

$$\ddot{x} - \mu(1 - \alpha\dot{x}^2)\dot{x} + x = 0. \quad (2)$$

Donner les expressions de μ et α en fonction de k , m , a et b .

- 1(f) En effectuant le changement de variable $y = \sqrt{3}\dot{x}$, montrer que l'équation en y est analogue à une équation déjà étudiée en cours.

1(g) Pour faciliter cette étude, le circuit électrique de la figure 2 a été proposé.

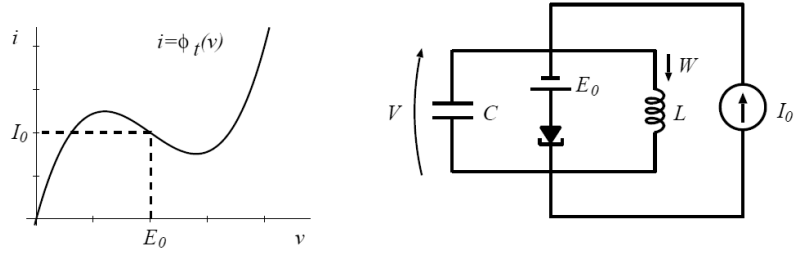


FIG. 2 – Circuit électrique avec une diode tunnel dont la caractéristique courant-tension est présentée à gauche.

On note la présence d'un générateur de courant I_0 , d'une bobine d'inductance L parcourue par un courant W , d'une capacité C avec une tension V à ses bornes, d'un générateur de tension E_0 en série avec une diode tunnel. La caractéristique courant-tension de cette dernière est donnée lorsqu'elle est parcourue par un courant i et soumise à une tension v par l'expression

$$i = \phi_t(v) = \phi(v - E_0) + I_0, \quad (3)$$

où $\phi(v) = \gamma v^3 - \delta v$.

Déterminer deux équations du circuit liant V et W .

Montrer qu'en les combinant et après introduction de variables appropriées, il est possible d'utiliser ce circuit électrique pour étudier les oscillations de l'anche. Donner notamment les valeurs de μ et de α .

2 La transformation de Hénon

En tentant de poursuivre encore plus loin la modélisation de la convection thermique que ne le fit Lorenz, M. Hénon proposa une simplification supplémentaire qui consiste à transformer les équations à temps continu en itérations à temps discret. Cela permet de remplacer un système de trois équations différentielles analogues à celui du modèle de Lorenz par une application à deux dimensions.

2(a) Comment appelle-t-on la méthode qui permet ce passage de 3 équations à temps continu à un système de deux équations discrètes ?

Partant de cette idée, Hénon a proposé l'application suivante du plan sur lui-même

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 1 + Y_n - \alpha X_n^2 \\ Y_{n+1} &= \beta X_n. \end{aligned}$$

où α contrôle la nonlinéarité et β traduit le rôle de la dissipation. α et β sont positifs.

2(b) Déterminer les points fixes.

2(c) Quel est le critère de stabilité du(des) point(s) fixe(s) dans le cas d'une application discrète ?

2(d) Déterminer la stabilité du(des) point(s) fixe(s) lorsque ($\beta < 1$).

Pour simplifier les calculs, nous conseillons d'introduire les termes positifs suivants

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \beta}{2\alpha} & C &= +\alpha X^*, \quad \text{pour } X^* > 0 \\ \varepsilon &= \alpha^{-1} & \tilde{C} &= -\alpha X^*, \quad \text{pour } X^* < 0. \end{aligned}$$

- 2(e)** Les valeurs habituellement utilisées sont $\alpha = 1,4$ et $\beta = 0,3$. Qu'obtiendra-t-on si l'on fait une simulation numérique ?
- 2(f)** Lorsque l'on calcule l'évolution d'un écart δ introduit dans les conditions initiales de la transformation de Hénon en fonction du nombre d'itérations k , on obtient la figure (2). Commenter.

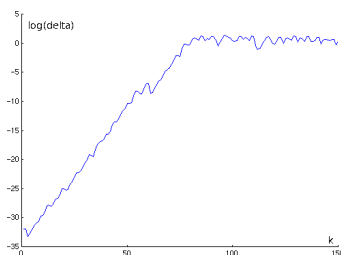


FIG. 3 – Evolution d'un écart δ introduit dans les conditions initiales de la transformation de Hénon en fonction du nombre d'itérations k .

- 2(g)** Considérons une transformation linéaire transformant un point M , de coordonnées x et y , en un point P de coordonnées $z = ax + by$ et $t = cx + dy$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Considérons les points $M_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ et $M_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ et $M \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$. Déterminer l'aire du quadrilatère OM_1MM_2 , puis celle de son transformé OP_1PP_2 . En déduire la condition pour qu'il y ait dilatation des aires par cette transformation.
- 2(h)** Considérons désormais une transformation non linéaire $z = f(x, y)$ et $t = g(x, y)$. Justifier qu'il y aura dilatation des aires au voisinage d'un point M_0 si le déterminant de la matrice jacobienne est supérieur à 1. Appliquer ce résultat à la transformation de Hénon.

Correction de l'examen du 24 avril 2008

1 Modèle des oscillations de l'anche d'une clarinette

- 1(a) Les termes de gauche viennent de l'inertie et de la force de rappel alors que ceux de droite représentent l'amortissement. On remarque que ce dernier ne correspond pas forcément à de la dissipation d'énergie, puisque cette dernière sera soit dissipée, soit augmentée selon le signe des coefficients.
- 1(b) Amortissement linéaire signifie que $b = 0$. Le problème se réécrit sous la forme du système dynamique

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -\frac{k}{m}x + \frac{a}{m}y. \quad (4)$$

Effectuons une analyse de stabilité linéaire autour de l'origine qui est évidemment le point fixe du système dynamique. Le Jacobien est donné par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{a}{m} \end{pmatrix}.$$

dont les valeurs propres sont données par l'équation caractéristique

$$(-\lambda) \left(\frac{a}{m} - \lambda \right) - \left(-\frac{k}{m} \right) = \lambda^2 - \frac{a}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \quad (5)$$

dont les solutions sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{a}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}. \quad (6)$$

Si $(a/m)^2 - 4k/m > 0$, les valeurs propres seront réelles, sinon elles seront complexes conjuguées. On aura donc une spirale stable (2 valeurs propres complexes conjuguées avec partie réelle négative) lorsque $a < 0$ et $(a/m)^2 - 4k/m < 0$. En résumé, les conditions sont

$$-2\sqrt{km} < a < 0 \quad \text{et} \quad b = 0. \quad (7)$$

- 1(c) À la question 1(b), l'origine était un point d'équilibre stable, alors que nous souhaiterions qu'il soit instable désormais. Le terme supplémentaire d'amortissement $b\dot{x}^3$ est cubique autour de l'origine : il ne contribuera donc pas aux propriétés de stabilité linéaire de l'origine.

L'origine sera instable lorsque la partie réelle des valeurs propres sera positive. Lorsque $(a/m)^2 - 4k/m < 0$, alors $Re(\lambda_{1,2}) = a/(2m)$ doit être positif : cela nécessite $a > 0$. Lorsque $(a/m)^2 - 4k/m > 0$, les deux valeurs propres sont réelles et a doit être positif. En conclusion, a doit être positif pour que l'origine soit instable.

La condition $a > 0$ signifie qu'il y a une augmentation de l'énergie au système à travers l'"amortissement" au tour de l'origine. On doit cependant s'assurer qu'il y a bien une dissipation de l'énergie lorsque l'on est suffisamment loin de l'origine, sinon l'énergie augmenterait sans limite et cela n'est pas possible physiquement.

Le terme cubique domine l'amortissement linéaire lorsque $|\dot{x}|$ est suffisamment grand. Pour déterminer le signe de b , multiplions l'équation par \dot{x} et intégrons. On obtient

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right] = \frac{dE}{dt} = a\dot{x}^2 - b\dot{x}^4, \quad (8)$$

où E est l'énergie mécanique du système ($\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ est l'énergie cinétique ; k peut être considéré comme une constante de raideur associée à l'énergie potentielle $\frac{1}{2}kx^2$). Il est donc immédiat de voir que l'on doit avoir la condition $b > 0$ pour que le terme cubique corresponde à une dissipation de l'énergie.

1(d) Puisque l'origine est instable, les trajectoires doivent s'éloigner du point $(0,0)$. Nous savons également que l'énergie du système ne peut pas croître indéfiniment. Il est donc naturel de s'attendre à un cycle limite.

Pour avoir l'allure du portrait de phase autour de l'origine, étudions les valeurs propres du jacobien près de l'origine

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{a}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}. \quad (9)$$

En remplaçant $m = 2$ et $k = a = b = 1$, on obtient $\lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i$, qui indique que l'on a bien une spirale instable autour de l'origine.

La figure (4) confirme l'existence d'un cycle limite stable, qui attirera les trajectoires initialement à l'intérieur et à l'extérieur du cycle.

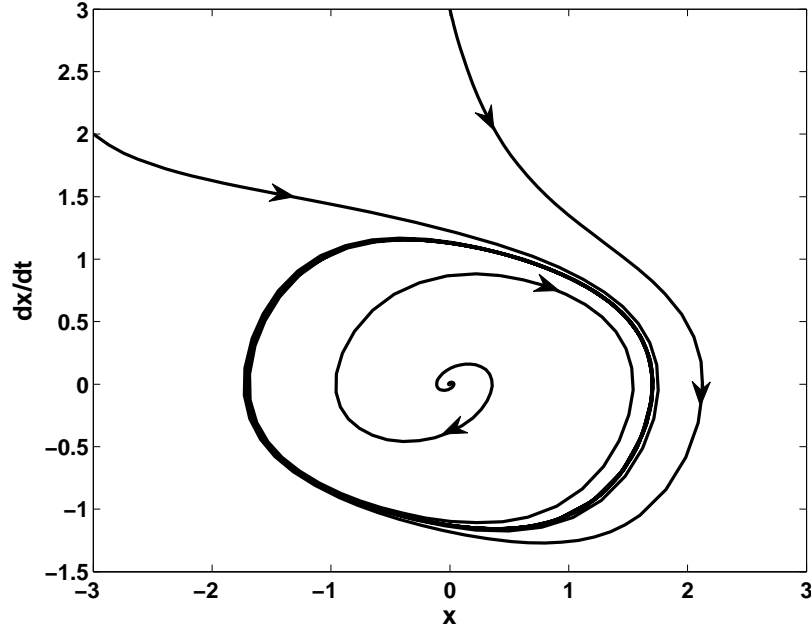


FIG. 4 – Portrait de phase lorsque $m = 2$ et $k = a = b = 1$.

1(e) À partir de l'équation (1), on obtient

$$\frac{m}{k}\ddot{x} - \frac{a}{k}\left(1 - \frac{b}{a}\dot{x}^2\right)\dot{x} + x = 0. \quad (10)$$

En introduisant une nouvelle échelle de temps $\tau = \delta t$, on a

$$\frac{m}{k}\delta^2 x_{\tau\tau} - \frac{a}{k}\left(1 - \frac{b}{a}\delta^2 x_\tau^2\right)\delta x_\tau + x = 0. \quad (11)$$

En prenant $\delta = \sqrt{k/m}$, l'équation se simplifie en

$$x_{\tau\tau} - \frac{a}{\sqrt{km}}\left(1 - \frac{bk}{am}x_\tau^2\right)x_\tau + x = 0. \quad (12)$$

c'est-à-dire l'équation (2) de l'énoncé avec $\mu = a/\sqrt{km}$ et $\alpha = bk/(am)$.

1(f) En effectuant le changement de variable proposé, $y = \sqrt{3}\dot{x}$, on aboutit à

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y}{\sqrt{3}} \right) - \mu \left(1 - \alpha \frac{y^2}{3} \right) \frac{y}{\sqrt{3}} + x = 0. \quad (13)$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, on a alors

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\ddot{y} - \frac{\mu}{\sqrt{3}}\dot{y} + \mu\alpha\frac{y^2}{\sqrt{3}}\dot{y} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 0 \quad (14)$$

qui se simplifie en

$$\ddot{y} - \mu(1 - \alpha y^2)\dot{y} + y = 0 \quad (15)$$

l'équation de l'oscillateur de van der Pol.

1(g) L'équation aux bornes de la bobine conduit à

$$L \frac{dW}{dt} = V, \quad (16)$$

alors que l'égalité des courants donne

$$I_0 = i_C + i + W \quad (17)$$

avec

$$i_c = C \frac{dV}{dt} \quad (18)$$

$$i = \phi_t(V - (-E_0)) = \phi(V) + I_0. \quad (19)$$

On aboutit donc à

$$\dot{V} = \frac{1}{C}(-\gamma V^3 + \delta V - W). \quad (20)$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, on a alors

$$\ddot{V} = \frac{1}{C}(-3\gamma V^2\dot{V} + \delta\dot{V} - \dot{W}) = \frac{1}{C}(-3\gamma V^2\dot{V} + \delta\dot{V} - \frac{1}{L}V) \quad (21)$$

qui se simplifie en

$$\ddot{V} - \frac{1}{C}(\delta - 3\gamma V^2)\dot{V} + \frac{1}{LC}V = 0. \quad (22)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$LC\ddot{V} - L\delta \left(1 - \frac{3\gamma}{\delta} V^2 \right) \dot{V} + V = 0. \quad (23)$$

qui donne

$$y_{\tau\tau} - \mu(1 - \alpha y^2)y_{\tau} + y = 0 \quad (24)$$

en posant $\mu = \delta\sqrt{L/C}$, $\alpha = 3\gamma/\delta$ et $\tau = t/\sqrt{LC}$. On retrouve donc l'équation de Van der Pol.

2 La transformation de Hénon

- 2(a)** Les points successifs obtenus dans \mathbb{R}^2 doivent être considérés comme appartenant à la section de Poincaré du flot engendré par le système des trois équations différentielles.
- 2(b)** Les points fixes sont donnés par $X_{n+1} = X_n = X^*$, $Y_{n+1} = Y_n = Y^*$, ce qui donne :

$$X^* = -\frac{(1-\beta)}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{(1-\beta)}{2\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha}} \quad (25)$$

$$Y^* = \beta X^* \quad (26)$$

Il y a donc deux points fixes et comme α et β sont réels, X^* et Y^* doivent l'être aussi.

- 2(c)** Pour déterminer la stabilité linéaire des points fixes, nous allons étudier la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} -2\alpha X_n & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Comme c'est une application discrète, le critère de stabilité d'un point fixe est donné par les valeurs propres de la matrice Jacobienne lorsqu'on l'évalue au point fixe. La condition d'instabilité est qu'au moins l'une des valeurs propres vérifie

$$|\lambda| > 1.$$

- 2(d)** L'équation caractéristique de la matrice Jacobienne est

$$\lambda^2 + 2\alpha X^* \lambda - \beta = 0,$$

qui a pour solutions

$$\lambda = -\alpha X^* \pm \sqrt{(\alpha X^*)^2 + \beta}. \quad (28)$$

Pour déterminer la stabilité des points fixes, nous devons tester les deux valeurs propres associées aux deux points fixes. Nous devons donc étudier : λ_{\pm} pour X_+^* et λ_{\pm} pour X_-^* .

Comme $\beta < 1$, cela signifie que l'on a

$$\begin{aligned} X_+^* &= -A + \sqrt{A^2 + \varepsilon} > 0 \\ X_-^* &= -A - \sqrt{A^2 + \varepsilon} < 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm}(X_+^*) &= -C \pm \sqrt{C^2 + \beta} \\ \lambda_{\pm}(X_-^*) &= +\tilde{C} \pm \sqrt{\tilde{C}^2 + \beta}, \end{aligned}$$

où $\lambda_+ > 0$ et $\lambda_- < 0$. Nous devons désormais déterminer si $|\lambda_{\pm}(X_+^*)| > 1$ ou si $|\lambda_{\pm}(X_-^*)| > 1$. Il y a quatre cas à distinguer.

- 1)** $|\lambda_+(X_+^*)| > 1$?

$$-C + \sqrt{C^2 + \beta} > 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + 2C < \beta \quad \Rightarrow \quad 1 + 2\alpha X_+^* < \beta \quad \Rightarrow \quad X_+^* < -\frac{1-\beta}{2\alpha} = -A.$$

Comme nous avons $A > 0$ et que nous savons que $X_+^* > 0$, il y a une contradiction. Par conséquent $|\lambda_+(X_+^*)|$ ne peut pas être plus grand que 1. Ce point fixe est donc stable dans la direction associée à λ_+ .

2) $|\lambda_-(X_+^*)| > 1$?

$$-C - \sqrt{C^2 + \beta} < -1 \Rightarrow 1 - 2C < \beta \Rightarrow 1 - 2\alpha X_+^* < \beta \Rightarrow X_+^* > \frac{1 - \beta}{2\alpha} = A.$$

qui conduit à

$$-A + \sqrt{A^2 + \varepsilon} > A \Rightarrow \varepsilon > 3A^2 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 3 \left(\frac{1 - \beta}{2\alpha} \right)^2 \Rightarrow \alpha > \alpha_c = \frac{3}{4}(1 - \beta)^2.$$

Lorsque $\alpha < \alpha_c$, ce point fixe est stable dans la direction associée à λ_- : C'est donc un nœud stable. En revanche, lorsque $\alpha > \alpha_c$, ce point fixe est instable dans la direction λ_- , et le point fixe est un col.

3) $|\lambda_+(X_-^*)| > 1$?

$$\tilde{C} + \sqrt{\tilde{C}^2 + \beta} > 1 \Rightarrow 1 - 2\tilde{C} < \beta \Rightarrow 1 + 2\alpha X_-^* < \beta \Rightarrow X_-^* < -\frac{1 - \beta}{2\alpha} = -A.$$

qui conduit à

$$-A - \sqrt{A^2 + \varepsilon} < -A \Rightarrow -\sqrt{A^2 + \varepsilon} < 0,$$

qui est toujours vrai. Le point fixe (X_+^*, Y_+^*) est donc toujours instable dans la direction associée à λ_+ .

4) $|\lambda_-(X_-^*)| > 1$?

$$\tilde{C} - \sqrt{\tilde{C}^2 + \beta} < -1 \Rightarrow 1 + 2\tilde{C} < \beta \Rightarrow 1 - 2\alpha X_-^* < \beta \Rightarrow X_-^* > \frac{1 - \beta}{2\alpha} = A.$$

Comme nous savons que $A > 0$ et $X_-^* < 0$, cette situation est donc impossible. $|\lambda_-(X_-^*)|$ ne peut donc pas être plus grand que 1. Ce point fixe est donc stable dans la direction associée à λ_- .

En résumé, l'application de Hénon Map a deux points fixes. Le point fixe (X_-^, Y_-^*) est toujours un point col instable. L'autre point fixe, (X_+^*, Y_+^*) , est un nœud stable si $\alpha < \alpha_c$, et un col sinon.*

2(e) Pour $\beta = 0,3$, on obtient $\alpha_c = 0,3675$. On se situe par conséquent dans le cas $\alpha = 1,4 > \alpha_c$: l'origine est un point col instable. Quels que soient les points initiaux à l'intérieur du bassin d'attraction (dont la structure est très complexe), les itérés successifs convergent très rapidement vers l'attracteur. La façon dont apparaissent les points successifs est irrégulière, imprévisible et aléatoire. A cet égard, la dynamique sur l'attracteur de Hénon se présente bien sous un aspect chaotique.

2(f) Le calcul de δ repose sur la détermination de deux séries de points itérés à partir de deux points initiaux situés au voisinage de l'attracteur et séparés seulement de $\delta_0 = 10^{-8}$ l'un de l'autre.

En moyenne, l'écart δ des itérés de rang k croît comme $\delta = \delta_0 \exp(\lambda_1 k)$ où λ_1 est le plus grand exposant de Lyapunov. Une estimation de λ_1 est donc donnée par la pente moyenne de la courbe (en échelle semi-logarithmique) ci-dessus, soit $\lambda_1 \simeq 0,50$. Après un calcul numérique précis, on obtient $\lambda_1 = 0.419$.

La saturation de la caractéristique tient à la même raison que celle invoquée en cours pour l'attracteur de Lorenz.

Cela confirme le diagnostic de sensibilité aux conditions initiales et l'on est en droit de conclure que l'attracteur de Hénon est bien un attracteur étrange.

2(g) Le carré OM_1MM_2 est d'aire d'unité, alors que le parallélogramme OP_1PP_2 a pour aire (longueur d'un produit vectoriel) la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Il y aura donc dilatation des aires lorsque $|ad - bc| > 1$ et contraction sinon.

2(h) Au voisinage de $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, on peut négliger les accroissements $\Delta x, \Delta y$. Etant donné que $df = f_x dx + f_y dy$, on a dans ces conditions $\Delta z \simeq f_x \Delta x + f_y \Delta y$ et de même pour $\Delta t \simeq g_x \Delta x + g_y \Delta y$. Si $\vec{\delta P}$ représente le vecteur transformé de $\vec{\delta M}$ pris dans le voisinage de M_0 :

$$\vec{\delta P} \simeq \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \vec{\delta M}. \quad (29)$$

La matrice jacobienne définit une application linéaire. On se retrouve donc ramené au cas des transformations linéaires examinées précédemment. Si le déterminant de la matrice (le jacobien) est supérieur à 1 en valeur absolue, il y a dilatation des aires, sinon il y a contraction.

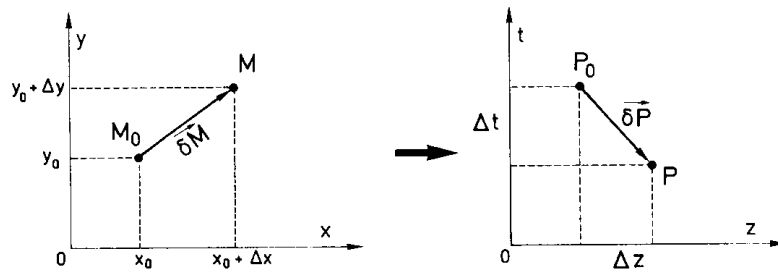


FIG. 5 – Représentation des vecteurs illustrant la linéarisation locale d'une transformation.

Dans le cas de la transformation de Hénon, on a

$$J = \begin{vmatrix} 2\alpha x_0 & 1 \\ \beta & 0 \end{vmatrix} = -\beta, \quad (30)$$

dont la valeur absolue est bien inférieure à 1. On a donc contraction des aires.