

Examen du cours “des Systèmes Dynamiques au Chaos”

Lundi 27 avril 2008

Notes de cours manuscrites autorisées.

1 Question de cours

- 1(a) Tracer la “toile d’araignée” pour les applications itérées suivantes :
 $x_{n+1} = x_n^3$, $x_{n+1} = \exp(x_n)$, et $x_{n+1} = \tanh(x_n)$.
- 1(b) Calculer l’exposant de Lyapunov de l’application $x_{n+1} = rx_n$.
- 1(c) Déterminer la dimension fractale du tapis de Sierpinski dont on voit sur la figure 1 les premières étapes de la construction itérative.

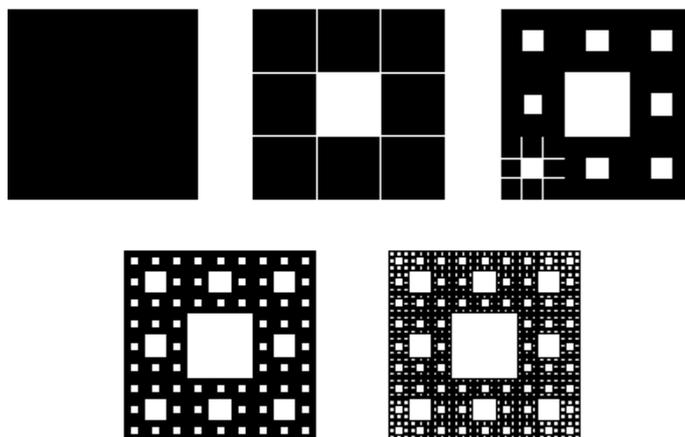


FIG. 1 – Premières étapes de la construction du tapis de Sierpinski.

2 Méthode des perturbations pour le pendule non linéaire

Considérons l’équation d’un pendule non amorti mais forcé

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = F \cos(\omega t) \quad (1)$$

où $\omega_0 > 0$ est la fréquence propre du pendule alors que $F \cos(\omega t)$ est un terme de forçage.

- 2(a) En utilisant le développement $\sin \theta$ au troisième ordre en θ , donner l’équation décrivant l’approximation non linéaire la plus basse, valable pour des angles faibles.
- 2(b) Montrer que l’équation obtenue peut se réécrire sous la forme

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta - \epsilon \theta^3 = \Gamma \cos \tau. \quad (2)$$

On donnera les expressions des quantités τ , Ω , ϵ et Γ dont on donnera les unités respectives.

2(c) La méthode de perturbation la plus simple est de chercher la solution de l'équation (2) sous la forme d'une série en puissance de ϵ :

$$\theta(\epsilon, \tau) = \theta_0(\tau) + \epsilon\theta_1(\tau) + \epsilon^2\theta_2(\tau) + \dots \quad (3)$$

où $\theta(0, \tau) = \theta_0(\tau)$ est la solution de l'équation (2) lorsque $\epsilon = 0$.

Comment s'appelle cette méthode? Substituer la solution (3) dans l'équation (2), en ne retenant que les termes d'ordre inférieur à ϵ^2 .

2(d) En distinguant les termes d'ordre différent en ϵ , déterminer un système de trois équations différentielles ordinaires pour θ_0 , θ_1 , et θ_2 :

2(e) On souhaite résoudre ce système ordre par ordre. Résoudre l'équation en θ_0 et montrer que l'unique solution de période 2π avec Ω non entier est

$$\theta_0(\tau) = \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \cos \tau. \quad (4)$$

2(f) Déterminer ensuite $\theta_1(\tau)$ en ne gardant que les solutions de période 2π . On rappelle l'identité $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$.

2(g) En utilisant les solutions pour θ_0 et θ_1 , déterminer l'approximation au premier ordre de (2).

3 Friction de Coulomb et Oscillations de Stick-Slip

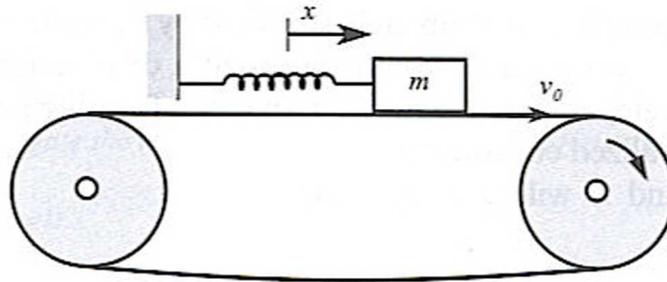


FIG. 2 – Friction de Coulomb.

Les phénomènes de friction se produisent lorsque deux solides en contact se déplacent à des vitesses différentes, en l'absence de toute lubrification. La figure (2) illustre ce phénomène : une courroie est mise en mouvement à vitesse constante v_0 par l'intermédiaire des deux cylindres. Une masse m , reliée à un support solide par l'intermédiaire d'un ressort de constante c , est placée sur la courroie. Si l'on note F la force de friction entre le bloc et la ceinture, et x l'étirement du ressort, l'équation s'écrit

$$m\ddot{x} + cx = F, \quad (5)$$

où F ne dépend que de la vitesse $v_0 - \dot{x}$. Supposons une forme simple pour F , avec une discontinuité à $\dot{x} = v_0$

$$F = F_0 \operatorname{sgn}(v_0 - \dot{x}) \quad (6)$$

où F_0 est une constante positive constant alors que la fonction sgn est définie par

$$\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ 0, & u = 0 \\ -1, & u < 0. \end{cases}$$

- 3(a)** Dessiner l'évolution de F en fonction de la variable x . En considérant séparément les cas $\dot{x} > v_0$ et $\dot{x} < v_0$, déterminer une équation ne faisant intervenir que x et \dot{x} . Quelle est la forme de ces courbes dans un plan $(x\sqrt{c}, y\sqrt{m})$ si l'on introduit la nouvelle variable $y = \dot{x}$?
- 3(b)** Identifiez le(s) point(s) d'équilibre de ce système.
- 3(c)** Évaluer la stabilité linéaire du (des) point(s) fixe(s).
- 3(d)** En déduire le portrait de phase. N'hésitez pas à utiliser votre intuition physique, notamment sur le comportement du système lorsque $\dot{x} = v_0$.
- 3(e)** Considérons désormais la variation continue de F visible dans la Fig. 3 qui correspond à

$$F(y) = \begin{cases} -6(y-1), & |y-1| \leq 0.4 \\ -[1 + 1.4 \exp(-0.5|y-1| + 0.2)] \operatorname{sgn}(y-1), & |y-1| \geq 0.4 \end{cases}$$

où $y = \dot{x}$, alors que l'équation du mouvement s'écrit $\ddot{x} + x = F(\dot{x})$.

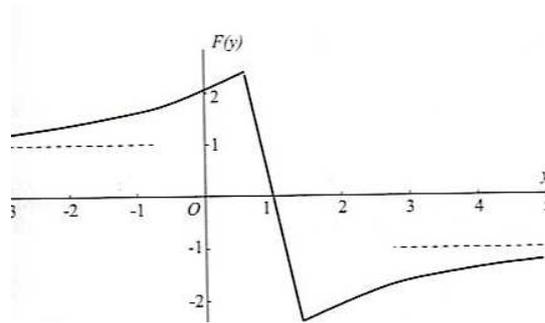


FIG. 3 – Variation douce de la force F .

Identifiez les points d'équilibre et déterminer leur stabilité.

- 3(f)** En choisissant quelques conditions initiales, essayer de déterminer le nouveau portrait de phase. Quelles sont les principales modifications par rapport à la question 3(b) ?

4 Modèle de Laser

Les équations de Maxwell-Bloch d'un laser sont

$$\dot{E} = K(P - E) \quad (7)$$

$$\dot{P} = \gamma_1(ED - P) \quad (8)$$

$$\dot{D} = \gamma_2(\lambda + 1 - D - \lambda EP) \quad (9)$$

où les différentes variables décrivent la dynamique du champ électrique E , la polarisation moyenne P des atomes et l'inversion de population D . Les autres paramètres sont K , le taux de décroissance de la cavité à cause de la transmission du faisceau, ainsi que γ_1 et γ_2 , les taux de décroissance de la polarisation atomiques et de l'inversion de population. Le paramètre λ enfin décrit enfin l'énergie de pompage. C'est une quantité qui peut être positive, négative ou nulle.

- 4(a)** Montrer que l'état non laser (correspondant au point fixe $E^* = 0$) perd sa stabilité au dessus d'une valeur seuil de λ que l'on déterminera.
- 4(b)** Déterminer le type de point fixe au dessous et au dessus de ce seuil critique.
- 4(c)** Déterminer un changement de variable qui permet de transformer ce système de trois équations en modèle de Lorenz.

Correction de l'examen du 27 avril 2009

1 Échauffement

1(a)

1(b) $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)| = \ln |r|$

1(c) $d = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 3 \frac{\ln 2}{\ln 3} \simeq 1.89 < 2$

2 Méthode des perturbations pour le pendule non linéaire

2(a) En remplaçant $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6$ dans l'équation (1), on aboutit à

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = F \cos(\omega t). \quad (10)$$

2(b) En introduisant les variables sans dimension $\tau = \omega t$, $\Omega = \omega_0/\omega$, $\epsilon = \Omega^2/6$ et $\Gamma = F/\omega^2$, on aboutit à l'équation (2).

2(c) Méthode de Poincaré-Lindstedt.

Après substitution, on obtient

$$\ddot{\theta}_0(\tau) + \epsilon \ddot{\theta}_1(\tau) + \epsilon^2 \ddot{\theta}_2(\tau) + \Omega^2 [\theta_0(\tau) + \epsilon \theta_1(\tau) + \epsilon^2 \theta_2(\tau)] - \epsilon \theta_0^3(\tau) - 3\epsilon^2 \theta_0^2(\tau) \theta_1(\tau) = \Gamma \cos \tau. \quad (11)$$

2(d) En regroupant ordre par ordre, on a donc

$$\ddot{\theta}_0(\tau) + \Omega^2 \theta_0(\tau) = \Gamma \cos \tau \quad (12)$$

$$\ddot{\theta}_1(\tau) + \Omega^2 \theta_1(\tau) = \theta_0^3 \quad (13)$$

$$\ddot{\theta}_2(\tau) + \Omega^2 \theta_2(\tau) = 3\theta_0^2 \theta_1. \quad (14)$$

2(e) La solution de ces équations correspond à la somme entre une solution homogène et une solution particulière. Toutes les équations ont une solution homogène de la forme

$$\theta_n(\tau) = A \cos(\Omega \tau) + B \sin(\Omega \tau), \quad (15)$$

où A et B sont des constantes déterminées par les conditions initiales. Comme nous ne cherchons que les solutions 2π périodiques (i.e., $\theta(\tau + 2\pi) = \theta(\tau)$) et pour lesquelles Ω n'est pas entier (i.e., ω_0 n'est pas une harmonique de ω), on a forcément $A = B = 0$ pour toutes les solutions homogènes. Notez que $\cos(n\tau)$ est 2π -périodique pour tout entier n .

La solution particulière est déterminée en cherchant une solution de la forme $\theta_0(\tau) = A \cos \tau + B \sin \tau$ (A et B sont évidemment différents de la solution homogène). On obtient l'équation

$$-A \cos \tau - B \sin \tau + \Omega^2 A \cos \tau + \Omega^2 B \sin \tau = \Gamma \cos \tau. \quad (16)$$

En égalant les coefficients, on obtient

$$A = \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \quad (17)$$

$$B = 0, \quad (18)$$

ce qui signifie que

$$\theta_0(\tau) = \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \cos \tau. \quad (19)$$

2(f) Pour déterminer $\theta_1(\tau)$, on substitue le résultat (19) dans l'équation (13)

$$\ddot{\theta}_1(\tau) + \Omega^2 \theta_1(\tau) = \left(\frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \right)^3 \cos^3 \tau. \quad (20)$$

En utilisant l'identité $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$, on a

$$\ddot{\theta}_1(\tau) + \Omega^2 \theta_1(\tau) = \left(\frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \right)^3 \left(\frac{3}{4} \cos \tau + \frac{1}{4} \cos 3\tau \right). \quad (21)$$

Cherchons une solution de la forme $\theta_1(\tau) = A \cos \tau + B \cos 3\tau$ (on sait que les termes en sinus vont s'annuler). On obtient alors

$$-A \cos \tau - 9B \cos 3\tau + \Omega^2 A \cos \tau + \Omega^2 B \cos 3\tau = \left(\frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \right)^3 \left(\frac{3}{4} \cos \tau + \frac{1}{4} \cos 3\tau \right) \quad (22)$$

En égalant les coefficients, on a

$$-A + \Omega^2 A = \left(\frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \right)^3 \frac{3}{4} \quad (23)$$

$$-9B + \Omega^2 B = \left(\frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \right)^3 \frac{1}{4}, \quad (24)$$

qui conduit à

$$\theta_1(\tau) = \frac{3\Gamma^3}{4(\Omega^2 - 1)^4} \cos \tau + \frac{\Gamma^3}{4(\Omega^2 - 1)^3(\Omega^2 - 9)} \cos 3\tau. \quad (25)$$

2(g) En combinant les résultats des questions précédentes, on aboutit à

$$\theta(\tau) = \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \cos \tau + \epsilon \left(\frac{3\Gamma^3}{4(\Omega^2 - 1)^4} \cos \tau + \frac{\Gamma^3}{4(\Omega^2 - 1)^3(\Omega^2 - 9)} \cos 3\tau \right) + O(\epsilon^2). \quad (26)$$

3 Friction de Coulomb et Oscillations de Stick-Slip

3(a) Lorsque $\dot{x} > v_0$, $F = -F_0$, et on obtient

$$m\ddot{x} + cx = -F_0. \quad (27)$$

En multipliant par \dot{x} , on obtient une relation entre x et \dot{x} .

$$m\dot{x}\ddot{x} + cx\dot{x} = -F_0\dot{x}. \quad (28)$$

En intégrant cette équation par rapport à t , on aboutit à

$$m\frac{\dot{x}^2}{2} + c\frac{x^2}{2} = -F_0x + const, \quad (29)$$

qui peut se réécrire

$$m\dot{x}^2 + cx^2 + 2F_0x = const, \quad (30)$$

qui se réduit à

$$m\dot{x}^2 + c\left(x + \frac{F_0}{c}\right)^2 = const. \quad (31)$$

Notez que les constantes du terme de droite sont différentes dans les 3 équations. Si l'on définit $X = x\sqrt{c}$ et $Y = \dot{x}\sqrt{m}$, les équations deviennent

$$Y^2 + \left(X + \frac{F_0}{\sqrt{c}}\right)^2 = \text{const.} \quad (32)$$

C'est l'équation d'un cercle dans le plan $X - Y$, avec comme centre $(-\frac{F_0}{\sqrt{c}}, 0)$, et le rayon dépendant de la constante à droite

Lorsque $\dot{x} < v_0$, $F = F_0$, qui conduit à

$$m\ddot{x} + cx = F_0 \quad (33)$$

qui conduit à

$$Y^2 + \left(X - \frac{F_0}{\sqrt{c}}\right)^2 = \text{const.} \quad (34)$$

où $X = x\sqrt{c}$ et $Y = \dot{x}\sqrt{m}$. Cela représente à nouveau un cercle dans le plan $X - Y$, avec $(\frac{F_0}{\sqrt{c}}, 0)$ comme centre, et le rayon dépendant toujours de la constante.

3(b) Au point fixe $\dot{x} = \ddot{x} = 0$, on a

$$cx = F \quad (35)$$

Comme $\dot{x} = 0 < v_0$, on a $F = F_0$. Le point fixe est donné par $(x, \dot{x}) = (\frac{F_0}{c}, 0)$.

3(c) L'analyse de stabilité linéaire correspond au comportement de solutions dans un voisinage proche autour du point fixe $(\frac{F_0}{c}, 0)$, on peut donc supposer $F = F_0$ puisque l'on peut toujours trouver un petit voisinage autour du point fixe dans lequel $\dot{x} < v_0$. En écrivant les équations comme deux équation différentielles du 1er ordre, on a

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = \frac{F_0 - cx}{m}. \quad (36)$$

Le Jacobien est donné alors par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

où $f_1(x, y) = y$ et $f_2(x, y) = \frac{F_0 - cx}{m}$. Les valeurs propres sont données par

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} = 0 \quad (38)$$

qui conduit à $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{c}{m}}$. Les valeurs propres étant purement imaginaires, cela signifie que le point fixe $(\frac{F_0}{c}, 0)$ est un centre marginalement stable. Même si la partie réelle des valeurs propres est nulle, les prédictions de l'analyse de stabilité linéaire sont aussi valables pour les équations de départ, puisque le système de départ est linéaire!

Par ailleurs, nous avons montré que les trajectoires sont des cercles dans le plan XY (où $X = x\sqrt{c}$ et $Y = \dot{x}\sqrt{m}$) et c'est cohérent avec le fait que le point fixe est un centre marginalement stable avec des orbites périodiques concentriques autour de lui.

3(d) Pour dessiner le portrait de phase dans le plan XY , on trace d'abord les cercles de centres $(-\frac{F_0}{\sqrt{c}}, 0)$ et $(\frac{F_0}{\sqrt{c}}, 0)$, en se souvenant que les cercles centrés en $(-\frac{F_0}{\sqrt{c}}, 0)$ correspondent à $Y > v_0\sqrt{m}$, et les cercles centrés en $(\frac{F_0}{\sqrt{c}}, 0)$ à $Y < v_0\sqrt{m}$. Il est utile de dessiner la ligne horizontale $Y = v_0\sqrt{m}$ pour distinguer de manière claire les deux régions. Les cercles sont parcourus dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour déterminer cela, il suffit de faire attention à ce qui

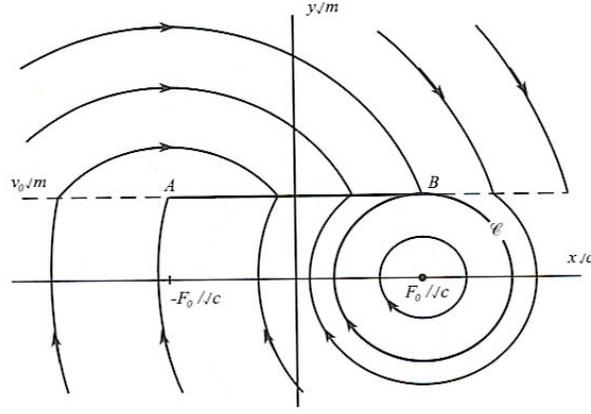


FIG. 4 – Portrait de phase dans le cas d'une variation discontinue de F .

se passe sur les axes X et Y ; Par exemple, pour une trajectoire coupant l'axe Y au niveau d'une valeur Y positive, on sait que la trajectoire doit aller vers la droite lorsque $X = 0$ and $\dot{X} > 0$. De manière similaire, lorsqu'une trajectoire couple l'axe X , il faut déterminer le signe de $\frac{d\dot{X}}{dt} = \ddot{X}$; $\ddot{X} > 0$ implique que la trajectoire doit être vers le haut, alors que $\ddot{X} < 0$ implique qu'elle doit être vers le bas.

Les points sur y (ou \dot{x}) = v_0 ne sont pas couverts par l'équation différentielle puisque c'est lorsque F est discontinue ; on doit donc déterminer le comportement à partir d'autres considérations physiques. En rencontrant l'état $\dot{x} = v_0$ pour $|x| < F_0/c$, le bloc se déplacera avec la courroie le long de AB (cf. figure) jusqu'à ce que la valeur maximale de la friction, F_0 , soit insuffisante pour résister à la tension du ressort qui augmente. C'est au point B lorsque $x = F_0/c$; Le bloc se met alors à osciller, comme représenté par la trajectoire fermée l à travers $(x, y) = (F_0/c, v_0)$. En réalité, pour toute condition initiale se situant hors de l'ellipse, le système se met à osciller. On appelle ce mouvement oscillation de **stick-slip**.

- 3(e)** Les points d'équilibre correspondent à $\dot{x} = \ddot{x} = 0$. Cela implique $y = \dot{x} = 0$, et ainsi $|y - 1| \geq 0.4$. Cela donne $F(y = 0) = [1 + 1.4 \exp(-0.5 + 0.2)] = 2.04$, ce qui indique que le point fixe est donné par $(x, \dot{x}) = (2.04, 0)$. Comme auparavant, on a $(y - 1) < 0$ dans le voisinage du point fixe et par conséquent $F(y) = [1 + 1.4 \exp(-0.5(1 - y) + 0.2)]$. On est désormais en mesure d'écrire les équation du mouvement sous la forme

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = -x + [1 + 1.4 \exp(-0.5(1 - y) + 0.2)] \quad (39)$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.5x \cdot 1.4 \exp(-0.5(1 - y) + 0.2) \end{pmatrix}_{(2.04, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.5186 \end{pmatrix} \quad (40)$$

où $f_1(x, y) = y$ et $f_2(x, y) = -x + [1 + 1.4 \exp(-0.5(1 - y) + 0.2)]$. Les valeurs propres de J sont données par

$$-\lambda(0.5186 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 0.5186\lambda + 1 = 0 \quad (41)$$

dont les racines sont $\lambda_{1,2} = 0.2593 \pm 0.9658i$. Des valeurs propres complexes avec une partie réelle positive : le point fixe est instable et le portrait de phase correspondra autour du point fixe à une spirale instable.

- 3(f)** Le portrait de phase déterminé numériquement est montré dans la figure 4. On voit apparaître un cycle limite qui attire les trajectoires de l'intérieur et de l'extérieur. Ce cycle limite stable

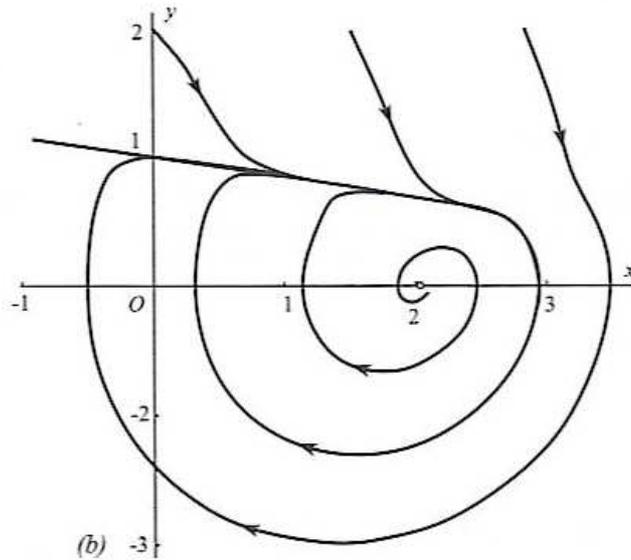


FIG. 5 – Portrait de phase pour une variation douce de F .

est l'analogie du cercle oscillant l déterminé auparavant ; C'est la principale différence avec la partie précédente, puisque le cercle l n'attire que les solutions à l'extérieur, mais pas celles de l'intérieur. La deuxième différence (reliée !) est que le point fixe est désormais instable.

4 Modèle de Laser

4(a) et (b) Le point fixe correspondant à $E^* = 0$ a pour autres coordonnées $P^* = 0$ et $D^* = \lambda + 1$.

On en déduit la matrice jacobienne $J = \begin{pmatrix} -K & K & 0 \\ \gamma_1 D^* & -\gamma_1 & \gamma_1 E^* \\ -\lambda \gamma_2 P^* & -\lambda \gamma_2 E^* & -\gamma_2 \end{pmatrix}$ qui se simplifie en

$J = \begin{pmatrix} -K & K & 0 \\ \gamma_1(\lambda + 1) & -\gamma_1 & 0 \\ 0 & -\lambda \gamma_2 & -\gamma_2 \end{pmatrix}$. L'équation pour la variable D est donc découplée et montre que $D(t)$ tend vers 0 de manière exponentiellement rapide.

Les deux autres équations sont gouvernées par le système de deux équations ayant pour trace $\tau = -(K + \gamma_1) < 0$ et $\Delta = -K\gamma_1\lambda$.

On a donc un puits lorsque le déterminant Δ est positif, c'est-à-dire lorsque $\lambda < 0$ et un col sinon. Lorsque $\tau^2 - 4\Delta = (K + \gamma_1)^2 + 4K\gamma_1\lambda > 0$, le puits est un nœud stable, et une spirale stable sinon.

4(c) $t_{laser} = \frac{\sigma}{K} t_{Lorenz}$, $E = \alpha x$, $P = \alpha z$ et $D = r - z$, $\gamma_1 = K/\sigma$, $\gamma_2 = Kb/\sigma$, $\lambda = r - 1$ et $\alpha^{-1} = \sqrt{b(r - 1)}$.