

## Examen "Des systèmes dynamiques au chaos".

*Documents et calculatrices interdits lors de la question de cours. Notes de cours autorisées pour le reste de l'examen. Les différentes parties du problème sont indépendantes.*

### I - Question de cours

- 1) Tracer le portrait de phase du système dynamique

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= 4x - 2y \end{aligned} \tag{1}$$

- 2) Énoncer le Théorème de Poincaré-Bendixon.

- 3) Considérons l'application  $x_{n+1} = x_n^2 + c$ .

- Trouver et classifier les points fixes.
- Trouver les valeurs de  $c$  pour lesquelles les points fixes bifurquent, et classifier ces bifurcations.
- Pour quelles valeurs de  $c$  il y a-t-il un cycle d'ordre 2 stable ?

### II - Renversements du champ magnétique terrestre

#### A) La dynamo de Bullard (1955)

En 1919, Larmor postule que les mouvements de convection du fer liquide dans le noyau créent et entretiennent le champ magnétique terrestre. En 1955, Bullard imagine le premier modèle de dynamo auto-excitée. Ce montage (représenté en figure 1 à gauche) est constitué d'un disque métallique que l'on peut faire tourner à vitesse angulaire  $\omega$ , en lui appliquant un moment  $\Gamma$  à l'aide d'un moteur. Pour fermer le circuit électrique, on relie l'axe (conducteur) à la périphérie du disque par un fil, muni de frotteurs, dont une partie a la forme d'une spire circulaire.

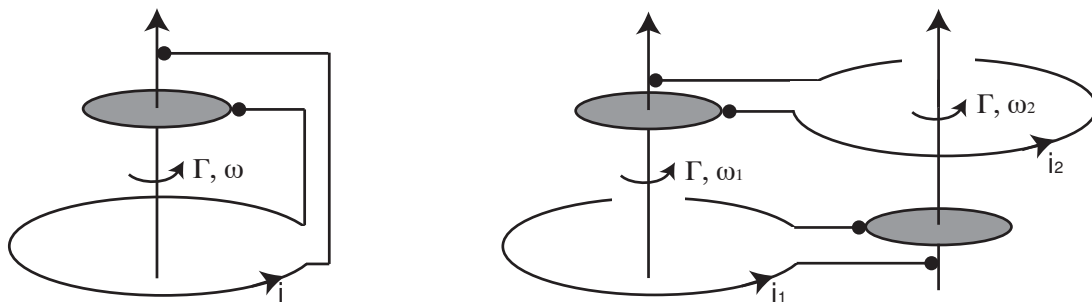


FIGURE 1 – Gauche : dynamo disque de Bullard. Droite : dynamos couplées de Rikitake.

Dans ces conditions, le courant  $i$  circulant dans le circuit et la vitesse de rotation  $\omega$  satisfont les équations couplées

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= -Ri + M\omega i \\ J \frac{d\omega}{dt} &= \Gamma - Mi^2 \end{aligned} \tag{2}$$

avec  $L, M > 0$  respectivement les coefficients d'auto et de mutuelle induction du circuit,  $R$  la résistance électrique de l'enroulement, et  $J$  le moment d'inertie du disque.

A-1) Décrire l'origine des différents termes du système d'équation satisfait par  $i$  et  $\omega$ .

A-2) On considère uniquement le cas  $\Gamma > 0$ . Déterminer le(s) point(s) fixe(s).

A-3) Par un changement de variables approprié, mettre le système sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\tau} &= 1 - I^2 \\ \frac{dI}{d\tau} &= a(\Omega - 1)I \end{aligned} \tag{3}$$

où  $a$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $J, L, M, R$  et  $\Gamma$ . Que représente ce paramètre ?

A-4) Etudier la stabilité du point fixe  $(I, \Omega) = (1, 1)$ . Ces conclusions sont-elles valables dans le régime non linéaire ?

A-5) Calculer  $\frac{d\Omega}{dI}$ , et montrer que le système possède une intégrale première de la forme  $g(\Omega) + h(I) = K$ , avec  $K$  une constante que l'on exprimera en fonction des conditions initiales  $\Omega_0 = \Omega(t = 0)$  et  $I_0 = I(t = 0)$ . En déduire une propriété importante des trajectoires  $(I(t), \Omega(t))$ .

A-6) Esquisser quelques trajectoires dans le plan  $(I, \Omega)$ .

A-7) On appelle renversement du champ magnétique un événement pour lequel le courant dans le circuit change de signe. À partir du système d'équations, la dynamo de Bullard peut-elle produire un renversement du courant dans le circuit ?

## B - Effet d'un faible frottement sur le portrait de phase

Lorsqu'on tente de réaliser ce montage dans la pratique, on n'observe pas la présence d'oscillations. Pour comprendre ce phénomène, on prend en compte la présence de frottements fluides. L'équation électrique est inchangée mais l'équation mécanique du système devient

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma - \alpha\omega - Mi^2, \tag{4}$$

avec  $\alpha > 0$  le coefficient de frottement du disque.

- B-1) Montrer qu'il faut exercer un couple plus grand qu'une valeur  $\Gamma_c$  pour pouvoir observer un courant non nul dans la bobine. Au delà de  $\Gamma_c$ , combien de solutions sont-elles possibles ?
- B-2) Etudier la stabilité de ces points fixes, et esquisser le portrait de phase du système pour  $\Gamma > \Gamma_c$ .
- B-3) Tracer le diagramme de bifurcation donnant la valeur du courant  $i$  en fonction du couple moteur.

## C - La dynamo de Rikitake (1956)

Pour expliquer l'origine des renversements du champ magnétique terrestre, Rikitake a proposé de coupler deux dynamos de Bullard entre elles et de leur appliquer le même couple moteur  $\Gamma$ . Notant  $(I_1, \Omega_1)$  et  $(I_2, \Omega_2)$  le courant et la vitesse de rotation de chacune des dynamos, le système d'équations (sans dimension) satisfait par ces quatre variables est :

$$\frac{dI_1}{d\tau} = -aI_1 + a\Omega_1 I_2 \quad \frac{d\Omega_1}{d\tau} = 1 - I_1 I_2 \quad (5)$$

$$\frac{dI_2}{d\tau} = -aI_2 + a\Omega_2 I_1 \quad \frac{d\Omega_2}{d\tau} = 1 - I_1 I_2 \quad (6)$$

- C-1) Montrer que  $\Omega_1 - \Omega_2$  est une constante. On posera dans la suite  $\Omega_1 = \Omega$  et  $\Omega_2 = \Omega - 2\Omega_0$ .
- C-2) Quels sont les points fixes du système ? On considère celui pour lequel les courants  $I_1$  et  $I_2$  sont positifs, montrer qu'il se met sous la forme  $X^* = (I_1, I_2, \Omega) = (I^*, \frac{1}{I^*}, \Omega^*)$  avec  $\Omega^* - 2\Omega_0 = \frac{1}{\Omega^*}$  et  $\Omega^* = (I^*)^2$ .
- C-3) Ecrire la matrice Jacobienne au voisinage de  $X^*$  en fonction de  $a$  et  $I^*$ .
- C-4) Les valeurs propres de cette matrice sont  $\lambda_1 = -2a$  et  $\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{aI^* + \frac{a}{I^*}}$ . Que peut-on conclure concernant la dynamique du système ?
- C-5) On considère dans cette question que  $\Omega_0 = 0$ .
- Montrer que  $I_1^2 - I_2^2$  tend vers 0 aux grandes valeurs de  $\tau$ .
  - Analyser qualitativement le comportement à long temps des modes  $I_2 = -I_1$  et  $I_2 = I_1$ .
  - En déduire que les deux dynamos  $(\Omega_1, I_1)$  et  $(\Omega_2, I_2)$  finissent toujours par se synchroniser. Quelle est alors la dynamique du système ?

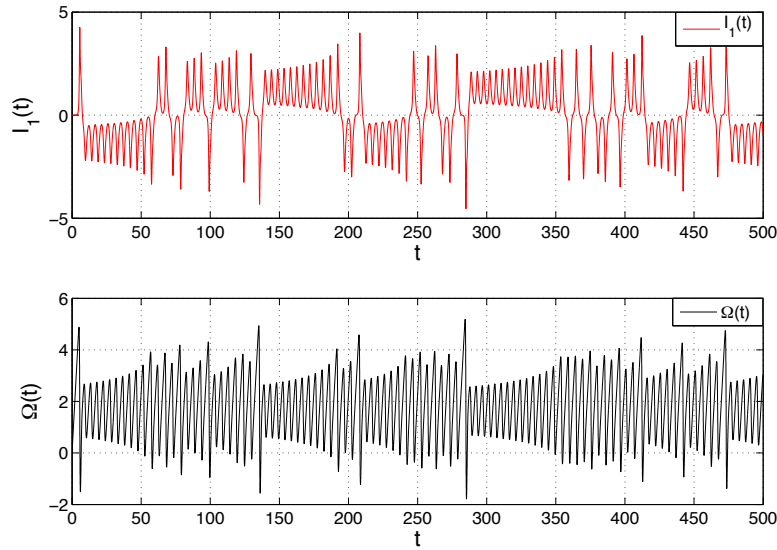


FIGURE 2 – Evolution temporelle  $I_1(t)$  et  $\Omega(t)$  pour  $a = 1$  et  $\Omega_0 = 0.5$ .

- C-6) Dans le cas  $\Omega_0 \neq 0$ , la dynamique du système dépend fortement des paramètres. La figure 2 montre l'évolution typique de  $I_1(t)$  et  $\Omega(t)$  pour les paramètres  $a = 1$  et  $\Omega_0 = 0.5$ . Quel semble être le comportement du système ? Est-ce compatible avec sa dimension ?

## D - Analyse de la série temporelle des renversements

Pour analyser le comportement de la série temporelle, on cherche à savoir si l'on peut prédire le comportement futur du système en fonction de son passé. On note alors  $\Omega_k$  l'amplitude du  $k$ ème maximum de la fonction  $\Omega(t)$  et l'on trace la fonction  $\Omega_{k+1} = f(\Omega_k)$  (figure 3). Une étude approfondie montre que la fonction  $f(x)$  possède la propriété remarquable de vérifier  $|f'(x)| > 1$  pour presque toutes les valeurs de  $x$ . **Pour simplifier l'analyse nous supposons que  $|f'(x)| > 1$  quel que soit  $x$ .**

- D-1) Quelle est la stabilité du point fixe de l'application  $\Omega_{k+1} = f(\Omega_k)$  ?
- D-2) On suppose que l'application  $x_{k+1} = f(x_k)$  possède un cycle limite de longueur  $p$ , *i.e.* qu'il existe une famille de valeurs  $(x_1, \dots, x_p)$  telle que l'on ait  $f(x_{p+1}) = x_1$  (avec  $f(x_n) \neq x_1$  pour  $n < p$ ). Montrer que ce cycle limite est forcément instable. La trajectoire  $(I_1(t), I_2(t), \Omega(t))$  peut-elle être périodique ?
- D-3) Déterminer une propriété de l'exposant de Lyapunov de l'application qui permet de déduire la nature de la trajectoire  $(I_1(t), I_2(t), \Omega(t))$  considérée.
- D-4) Ce modèle est-il compatible avec ce que vous savez des renversements du champ magnétique terrestre ?

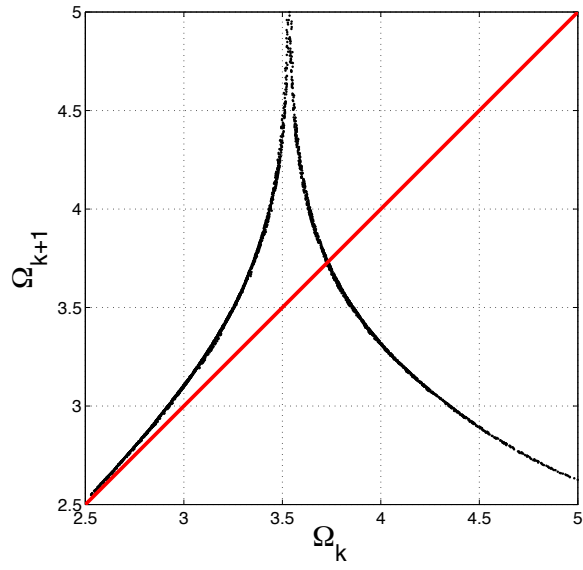


FIGURE 3 – Tracé de la fonction  $\Omega_{k+1} = f(\Omega_k)$  avec  $\Omega_k$  l'amplitude du  $k$ ième maximum de la fonction  $\Omega(t)$

## Examen "Des systèmes dynamiques au chaos".

*Documents et calculatrices interdits lors de la question de cours. Notes de cours autorisées pour le reste de l'examen. Les différentes parties du problème sont indépendantes.*

### I - Question de cours

- 1) Le système est linéaire et possède un unique point fixe  $(0, 0)$ . Comme les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = -3$ , c'est un point col. La direction instable a pour équation  $y = x$  et la direction stable a pour équation  $y = -4x$ .
- 2) Voir cours.
- 3) a) Les points fixes sont solution de  $x^2 - x + c = 0$ . Pour  $c \in ]-\infty, 1/4[$  il y a deux points fixes  $x_{\pm} = (1 \pm \sqrt{1 - 4c})/2$ , un seul  $x = 1/2$  pour  $c = 1/4$ , et aucun point fixe pour  $c > 1/4$ .  
Leur stabilité est donnée par la valeur du module de la dérivée  $|f'(x_{\pm})| = |2x_{\pm}| = |1 \pm \sqrt{1 - 4c}|$ . On a donc toujours  $|f'(x_+)| > 1$  pour  $c < 1/4$  ( $x_+$  est instable). Le second point fixe, qui vérifie  $f'(x_-) = 1 - \sqrt{1 - 4c} < 0$ , sera stable tant que  $f'(x_-) = 1 - \sqrt{1 - 4c} > -1 \Leftrightarrow c \in ]-3/4, 1/4[$ .
- b) Au point  $c = 1/4$  la bifurcation est de type noeud-col.
- c) Un cycle d'ordre 2 vérifie la propriété  $x_{n+2} = x_n$ . Les valeurs de  $x$  correspondantes sont donc solutions de l'équation  $f(f(x)) = x \Leftrightarrow x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0$ .  
Cette équation possède 4 racines dont deux vérifient aussi  $f(x) = x$ , et sont solutions de  $x^2 - x + c = 0$ . Le polynôme d'ordre 4 est donc factorisable par  $x^2 - x + c$ , et l'identification montre que  $x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = (x^2 - x + c)(x^2 + x + c + 1)$ .  
Les deux nouveaux points fixes  $p_{\pm}$  sont donc solutions de l'équation  $x^2 + x + c + 1 = 0$ , ce qui donne  $p_{\pm} = (-1 \pm \sqrt{1 - 4(c + 1)})/2$ .  
Le cycle est stable tant que  $|f'(p_+)f'(p_-)| = |4p_+p_-| < 1 \Leftrightarrow |4(c + 1)| < 1$ , soit  $c \in ]-5/4, -3/4[$ .

### II - Renversements du champ magnétique terrestre

#### A) La dynamo de Bullard (1955)

- A-1) L'équation électrique indique que la somme des générateurs  $-L \frac{di}{dt} + M\omega i$  (auto induction dans la bobine plus induction due au mouvement du disque) est égale à la tension au borne des dipôles passifs (ici la résistance  $R$ ).  
L'équation mécanique indique que la variation du moment cinétique du disque égale la somme des couples moteurs ( $\Gamma$ ) et résistants (moment de la force de Laplace  $-Mi^2$ ).
- A-2) On trouve deux points fixes  $(i, \omega) = (\pm\sqrt{\Gamma/M} = \pm i_c, \omega_c = R/M)$ .

A-3) Le changement  $I = i/i_c$ ,  $\Omega = \omega/\omega_c$  et  $\tau = t(M\Gamma/JR)$  permet d'obtenir le système demandé.

Le paramètre  $a = LM\Gamma/JR^2 = \frac{1}{2}Li_c^2/\frac{1}{2}J\omega_c^2$  représente le rapport entre l'énergie électrique du point fixe et son énergie mécanique.

A-4) La jacobienne s'écrit

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

L'analyse linéaire montre que le point fixe est un centre, ce qui ne permet pas de conclure puisque les termes non linéaires peuvent modifier la stabilité du point.

A-5) On trouve que les trajectoires sont la famille de courbes d'équation

$$\frac{1}{2}(\Omega - 1)^2 + \frac{1}{2a}(I^2 - \ln I^2) = \frac{1}{2}(\Omega_0 - 1)^2 + \frac{1}{2a}(I_0^2 - \ln I_0^2), \quad (2)$$

qui est bien de la forme  $g(\Omega) + h(I) = K$ . Comme les deux fonctions  $f$  et  $g$  ont un seul minimum, les trajectoires seront fermées dans un voisinage du point fixe. Le point fixe  $(1,1)$  est donc un vrai centre.

A-6) Les courbes sont fermées, entourent le point fixe  $(1,1)$ , et tournent dans le sens anti-horaire.

A-7) La forme de l'équation électrique  $\frac{dI}{d\tau} = a(\Omega - 1)I$  indique que le courant  $I$  ne peut pas changer de signe. Ce modèle ne peut donc pas produire de renversements du champ magnétique.

## B - Effet d'un faible frottement sur le portrait de phase

B-1) Les points fixes sont  $(i, \omega) = (0, \Gamma/\alpha)$  (existe pour toutes les valeurs de  $\Gamma$ ) et  $(i, \omega) = (\pm\sqrt{(\Gamma - \alpha\omega_c)/M}, \omega_c = R/M)$  qui n'existe que si  $\Gamma > \Gamma_c = \alpha M/R$ . Pour  $\Gamma > \Gamma_c$  il y a trois points fixes possibles.

B-2) Dans le cas du point fixe  $(i, \omega) = (0, \Gamma/\alpha)$ , la jacobienne s'écrit

$$J(0, \Gamma/\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{M}{\alpha L}(\Gamma - \Gamma_c) & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{J} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

ce qui montre qu'il est stable pour  $\Gamma < \Gamma_c$  et instable pour  $\Gamma > \Gamma_c$ .

Dans le cas  $\Gamma > \Gamma_c$ , la jacobienne au point fixe  $(i, \omega) = (\pm\sqrt{(\Gamma - \alpha\omega_c)/M}, \omega_c = R/M)$  s'écrit

$$J(i, \omega_c) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Mi}{L} \\ -\frac{2Mi}{J} & -\frac{\alpha}{J} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

La trace est négative et le déterminant  $\Delta = \frac{2M}{J}(\Gamma - \Gamma_c) > 0$ . Le point fixe est donc un noeud stable ou une spirale stable. Comme on étudie l'action d'un faible frottement, le discriminant  $\text{disc} = \alpha^2 - \frac{8M}{J}(\Gamma - \Gamma_c)$  est sûrement négatif. Les trajectoires spiralent alors vers le point fixe en tournant dans le sens anti-horaire.

B-3) La bifurcation est une bifurcation fourche supercritique. L'amplitude du courant est proportionnelle à la racine de l'écart au seuil.

## C - La dynamo de Rikitake (1956)

C-1)  $\frac{d(\Omega_1 - \Omega_2)}{d\tau} = 0.$

C-2) Les points fixes vérifient

$$\begin{aligned}\Omega I_2 &= I_1 \\ (\Omega - 2\Omega_0)I_1 &= I_2 \\ I_1 I_2 &= 1\end{aligned}\tag{5}$$

$I_1$  et  $I_2$  sont donc de même signe. Le point vérifiant  $I_1, I_2 > 0$  vérifie donc  $X^* = (I_1, I_2, \Omega) = (I^*, \frac{1}{I^*}, \Omega^*)$  avec  $\Omega^* - 2\Omega_0 = \frac{1}{\Omega^*}$  et  $\Omega^* = (I^*)^2$ .

C-3) La jacobienne  $J(X^*)$  s'écrit

$$J(X^*) = \begin{pmatrix} -a & a(I^*)^2 & a/I^* \\ a/(I^*)^2 & -a & aI^* \\ -1/I^* & -I^* & 0 \end{pmatrix},\tag{6}$$

C-4) Une direction est stable, alors que les deux autres sont neutralement stables. L'analyse de stabilité linéaire ne permet donc pas de conclure.

C-5) a) Pour  $\Omega_0 = 0$ , on a  $\frac{d(I_1^2 - I_2^2)}{d\tau} = -a(I_1^2 - I_2^2)$ .  $I_1^2 - I_2^2$  tend donc vers 0 aux grandes valeurs de  $\tau$ .

b) Le mode  $I_2 = -I_1$  vérifie le système

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{d\tau} &= -aI_1 - a\Omega I_1 \\ \frac{d\Omega}{d\tau} &= 1 + I_1^2\end{aligned}\tag{7}$$

On observe que  $\Omega$  est une fonction strictement croissante et que le courant  $I_1$  tend vers zéro d'autant plus vite que  $\Omega$  est grand. Pour ce mode, l'énergie magnétique tend donc vers zéro pour  $\tau$  suffisamment grand.

Le mode  $I_2 = I_1$  vérifie le système

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{d\tau} &= -aI_1 + a\Omega I_1 \\ \frac{d\Omega}{d\tau} &= 1 - I_1^2\end{aligned}\tag{8}$$

qui n'est autre que le système d'équation de la dynamo de Bullard. Le mode  $I_1 = I_2$  est donc un mode oscillant.

c) Les deux questions précédentes montrent que si l'on attend assez longtemps, le système converge vers la solution  $I_1(t) = I_2(t)$  puisque le mode antisymétrique tend vers zéro. Les deux oscillateurs finissent donc toujours par se synchroniser.



- C-6) La dynamique  $I_1(t)$  montre des renversements irréguliers, et semble chaotique. Cette propriété est compatible avec un système dynamique de dimension 3.

## D - Analyse de la série temporelle des renversements

- D-1) Comme  $|f'(\Omega)| > 1$  quel que soit  $\Omega$ , le point fixe est instable.
- D-2) Soit  $x_1$  un élément du cycle limite de longueur  $p$  ( $f^p(x_1) = x_1$ ) et  $x = x_1 + \delta x$  un point infiniment proche de  $x_1$ . Après  $p$  itérations, l'écart de  $f^p(x)$  à  $x_1$  sera  $|\delta x_p| = |\delta x| |f'(x_1)f'(x_2)\dots f'(x_{p-1})| > |\delta x|$  car  $|f'(x_i)| > 1$  pour tous les éléments du cycle. L'écart grandit donc à chaque période du cycle, ce qui montre que celui-ci est instable. Les cycles limites d'ordre  $p$  correspondent à des trajectoires périodiques ayant  $p$  maxima par période. Puisqu'ils sont tous instables, les trajectoires périodique le sont aussi. La trajectoire ne peut donc pas être périodique.
- D-3) L'exposant de Lyapunov s'écrit

$$\lambda(\Omega_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \ln |f'(\Omega_p)|.$$

Du fait de la propriété de la dérivée, on a  $\lambda > 0$ . L'évolution de  $(\Omega_k)_{k \geq 0}$  est donc chaotique, ce qui montre que la trajectoire considérée l'est aussi.

- D-4) Comme il semble que la série temporelle des renversements du champ magnétique terrestre soit chaotique, il y a un parallèle évident entre la dynamo de Rikitake et la dynamo terrestre. Dans le cas de la Terre, le rôle du disque est assuré par les mouvements du fer liquide dans le noyau externe, tandis que les courants  $I_1$  et  $I_2$  sont différents modes magnétique (dipolaire et quadrupolaire par exemple) pouvant être amplifiés par induction. Pour une réalisation expérimentale d'une dynamo turbulente montrant des séquences de renversements, chercher expérience VKS (pour Von Karman Sodium) sur le web.