

Examen du cours “des Systèmes Dynamiques au Chaos”

Judi 5 mai 2011

Notes de cours manuscrites autorisées sauf pour l'échauffement.

1 Echauffement (30')

- 1(a) Donner l'équation logistique.
- 1(b) Pour modéliser quel phénomène a-t-elle été introduite? Est-ce que cela décrit correctement les résultats expérimentaux?
- 1(c) Déterminer les points fixes et leur stabilité.
- 1(d) Donner l'application logistique.
- 1(e) Tracer qualitativement son diagramme de bifurcation.
- 1(f) Tracer juste au-dessous du diagramme de bifurcation l'allure de l'évolution de l'exposant de Lyapunov en fonction toujours du paramètre de contrôle.
- 1(g) Un ministre français de la recherche aurait récemment dit "Comment peut-on parler sérieusement du climat dans cinquante ans alors qu'on est incapable de prévoir le temps qu'il fera dans 5 jours?". Après avoir suivi le cours "Systèmes Dynamiques et Chaos", que pensez vous de cette question/affirmation?

2 Chute

Une particule, repérée par sa hauteur $x(t)$ et sa vitesse $v(t)$, tombe sous l'effet de la gravité.

- 2(a) Déterminer le système dynamique dans le cas où l'on néglige tout frottement.
- 2(b) Choisissez dans l'espace des phases un rectangle de côtés Δx et Δv et dont l'un des coins est (x, v) . Les quatre coins correspondent à 4 conditions initiales pour 4 particules. Déterminer la position de ces 4 particules après dt .
- 2(c) Quelle sera la surface à l'intérieur du quadrilatère défini par les 4 points? Comment se compare-t-elle à l'aire initiale du rectangle?
- 2(d) Tracer l'évolution dans l'espace des phases du rectangle initial.
- 2(e) On désire désormais tenir compte de la friction. Comment est modifié le système dynamique? Justifier.
- 2(f) Quel est le comportement de la surface dans ce cas?
- 2(g) Dessiner les trajectoires dans l'espace des phases dans le cas avec friction.

3 Rotation

On considère deux aimants qui peuvent tourner sur un axe de rotation commun, comme le montre la figure 1. Les deux aimants sont placés dans l'entrefer d'un électroaimant. Soit θ_1 et θ_2 les deux angles repérant les pôles nord des aimants par rapport à l'axe horizontal (sens trigonométrique).

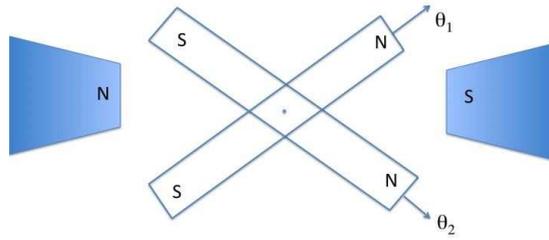


FIGURE 1 – Schéma de principe.

3(a) Justifier que la dynamique des deux aimants soit donnée par le système d'équations

$$\dot{\theta}_1 = K \sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin \theta_1 \quad (1)$$

$$\dot{\theta}_2 = K \sin(\theta_2 - \theta_1) - \sin \theta_2 \quad (2)$$

où $K > 0$.

3(b) Déterminer et classifier les points fixes de ce système.

3(c) Tracer le diagramme θ_1^* en fonction de K . Montrer qu'une bifurcation existe pour $K = K_c$. Donner K_c . Quel est le type de la bifurcation ?

3(d) Montrer qu'il existe une fonction $V(\theta_1, \theta_2)$ telle que $\dot{\theta}_i = -\partial V / \partial \theta_i$. On donnera son expression.

3(e) Déterminer les orbites périodiques de ce système dynamique.

3(f) Déterminer le portrait de phase pour $0 < K < K_c$ et $K > K_c$.

4 Saut

Les deux parties 4.1 et 4.2 peuvent être traitées indépendamment.

4.1 Notion de potentiel effectif

Considérons l'équation

$$m\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx} + f(x) \cos(\omega t) \quad (3)$$

correspondant au mouvement d'une particule de masse m se déplaçant dans un potentiel extérieur $U(x)$ et soumise à un forçage dépendant de la position x . On suppose que le potentiel a un minimum local en $x = 0$. On va s'intéresser ci-dessous au cas où la pulsation ω est grande par rapport à la pulsation propre de l'oscillateur en l'absence de forçage.

D'après le caractère du champ qui agit sur la particule, il est clair a priori que le mouvement de celle-ci apparaîtra comme un déplacement le long d'une trajectoire "non perturbée" (notée $X(t)$) accompagné de petites oscillations $\xi(\omega t)$ (de fréquence ω) autour de cette trajectoire. On réécrit par conséquent la position de la particule sous la forme $x(t) = X(t) + \xi(\omega t)$ avec $\xi \ll X$.

4(a) Montrer que la moyenne de $\xi(t)$ sur une période $2\pi/\omega$ est nulle.

4(b) Calculez la moyenne de $x(t)$ toujours sur une période $2\pi/\omega$.

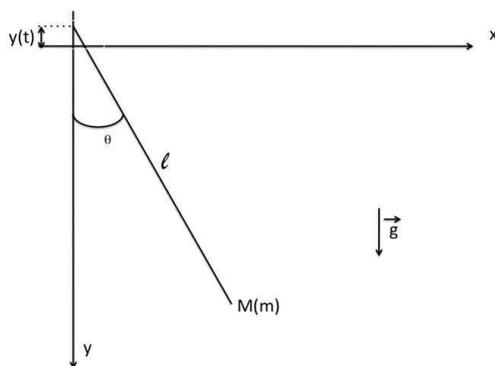
4(c) Introduisez $x(t) = X(t) + \xi(\omega t)$ dans l'équation (3) puis développez en ne gardant que les termes du premier ordre en ξ .

- 4(d) Déterminez l'équation obtenue en prenant la moyenne de cette équation.
- 4(e) Retranchez l'équation de départ à celle obtenue en faisant la moyenne. Justifier que l'on obtienne $\xi = -f(X) \cos(\omega t)/(m\omega^2)$.
- 4(f) En déduire que le problème de départ est équivalent au mouvement d'une particule dans le potentiel effectif

$$U_{eff} = U(X) + \frac{f^2(X)}{4m\omega^2}. \quad (4)$$

4.2 Application :

On considère une tige rigide de longueur ℓ , sans masse, à laquelle est attachée une masse m . L'autre extrémité de la tige oscille verticalement avec la loi $y(t) = a \cos(\Omega t)$ où Ω est grand.



- 4(g) Montrer que le Lagrangien peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + [mgl + mal\Omega^2 \cos(\Omega t)] \cos \theta \quad (5)$$

On rappelle qu'un Lagrangien est défini à une dérivée totale (par rapport au temps) près.

- 4(h) Montrer que l'équation du mouvement correspondante à ce Lagrangien peut s'écrire sous la forme.

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -\frac{dU}{d\theta} + f(\theta) \cos(\Omega t). \quad (6)$$

On donnera les expressions de U et de f .

- 4(i) Trouver le potentiel effectif
- 4(j) Étudier les positions d'équilibre. Commenter.
- 4(k) Déterminer leur stabilité. Commenter.

Pour en savoir plus : *Dinamicheskaya ustoychivost mayatnijka pri koleblyushejsya tochke podvesa* de Pyotr Leonidovich Kapitsa dans *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki* 21, 588 (1951).

Correction de l'examen du 5 Mai 20011

1 Échauffement

1(a) $\dot{x} = rx(1 - x/K)$.

1(b) Pour modéliser l'évolution de la population. La description est impressionnante pour les colonies de bactéries. En revanche, cela fonctionne beaucoup moins bien lorsque les organismes ont un cycle de vie plus complexes (avec des oeufs, larves, ...).

1(c) les deux points fixes sont $x^* = 0$ et $x^* = K$. Le premier est instable alors que le deuxième est stable.

1(d) $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$.

1(e) et 1(f)

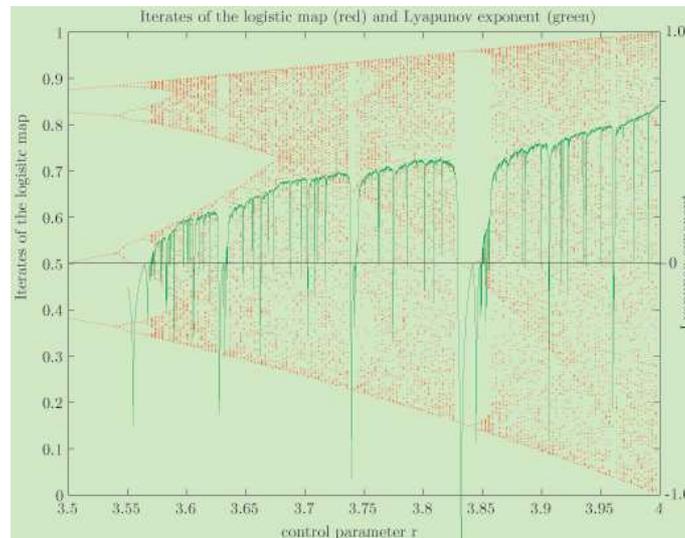


FIGURE 2 – Diagramme de bifurcation et evolution du Lyapunov.

1(g) Contrairement à la prédiction du temps, la prédiction du climat fait intervenir une moyenne. Le processus de moyenne va donc gommer les détails du temps.

On ne peut pas prédire le temps à 5 jours, car le système est chaotique, Mais cela s'avère un avantage pour le climat, car comme on ne connaît pas la condition initiale du climat exactement, ce qui est important est que le système mélange bien, le système est "ergodique" dirait un physicien (pas un mathématicien!). La notion de valeur moyenne a donc un sens.

2 Chute

2(a) $\frac{dx}{dt} = v$ et $\frac{dv}{dt} = -g$.

2(b) Chaque coin du rectangle va se déplacer de $x \rightarrow x + v dt$ et $v \rightarrow v - g dt$. Les coins du haut du rectangle vont donc se déplacer plus vers la droite que ceux du bas.

2(c) Le système n'est pas dissipatif ($\text{div} \vec{f} = 0$) il doit donc y avoir conservation du volume dans l'espace des phases, et donc conservation de la surface.

On trouve en effet que l'aire du parallélogramme est égal au produit entre la base et la hauteur. La base est toujours Δv tandis que la hauteur reste égale à Δx . La surface est donc toujours $\Delta v \Delta x$, comme pour le rectangle de départ.

2(d) cf. Fig. ??(a).

2(e) Il faut rajouter un terme de friction. Les deux possibilités sont $-\mu v$ ou bien $-\mu v^2 v/|v|$. Le système dynamique se réécrit par conséquent

$$\frac{dx}{dt} = +v \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\mu v - g \quad (8)$$

2(f) On a désormais un système dissipatif : $\text{div} \vec{f} = -\mu$. Il va donc y avoir contraction dans l'espace des phases puisque $k > 0$.

2(g) cf. Fig. ??(b). Dans le cas avec friction, les vitesses atteignent une valeur limite $v = -g/\mu$. Il faut faire attention que lorsque $v < 0$, les lignes vont vers les valeurs de x négatives.

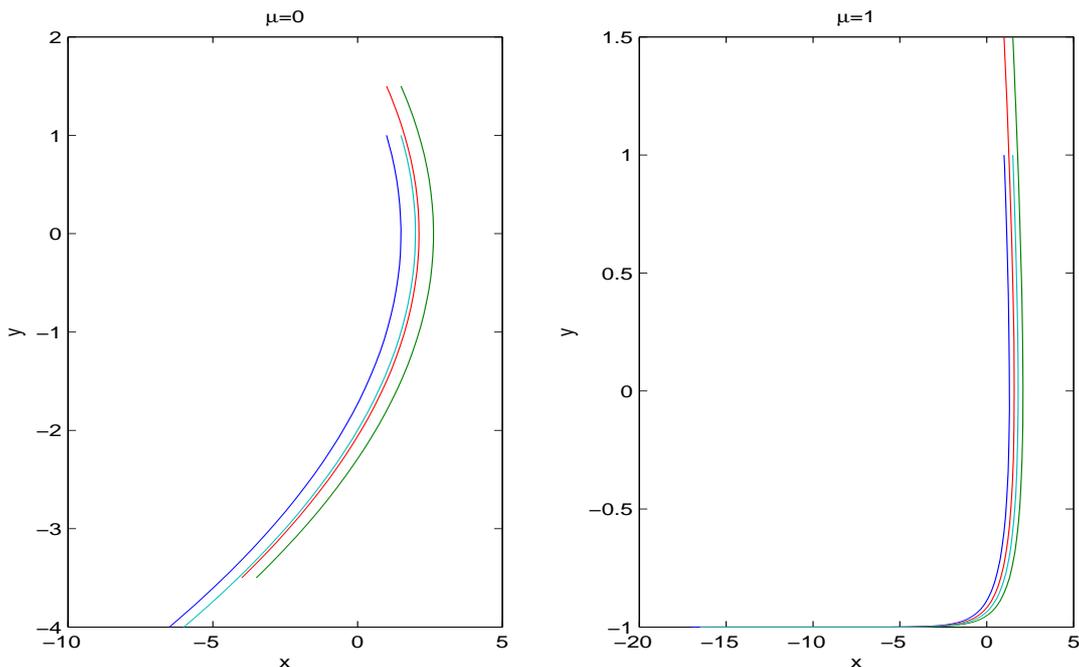


FIGURE 3 – Evolution en l'absence (à gauche) et en présence (à droite) de friction. La condition initiale est le même rectangle.

3 Rotation

3(a) Le terme $K \sin(\theta_1 - \theta_2)$ représente la force répulsive qui tend à éloigner les deux pôles nord à 180° . Cette répulsion est contrebalancée par le terme en $\sin \theta$ du à l'électroaimant extérieur. Si l'inertie des aimants est négligeable par rapport au terme de rotation visqueuse, les équations sont effectivement une approximation raisonnable.

3(b) Les points fixes correspondent à

$$K \sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin \theta_1 = 0 \quad (9)$$

$$K \sin(\theta_2 - \theta_1) - \sin \theta_2 = 0 \quad (10)$$

c'est-à-dire

$$K \sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \quad (11)$$

$$\sin \theta_1 = -\sin \theta_2 \quad (12)$$

c'est-à-dire

$$K \sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \quad (13)$$

$$\theta_1 = -\theta_2 \quad \text{ou} \quad \theta_1 = \pi + \theta_2 \quad (14)$$

c'est-à-dire

$$K \sin(2\theta_1) = \sin \theta_1 \quad \text{et} \quad \theta_1 = -\theta_2 \quad (15)$$

$$K \sin \pi = \sin \theta_1 \quad \text{et} \quad \theta_1 = \pi + \theta_2 \quad (16)$$

c'est-à-dire

$$2K \cos \theta_1 = 1 \quad \text{et} \quad \theta_1 = -\theta_2 \quad (17)$$

$$\theta_1 = \ell\pi = -\theta_2 \quad \text{avec} \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (18)$$

$$\theta_1 = \ell\pi = \theta_2 + \pi \quad \text{avec} \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (19)$$

c'est-à-dire

$$\theta_1 = -\theta_2 = \pm \arccos(1/2K) \quad \text{si} \quad K > 1/2 \quad (20)$$

$$\theta_1 = \ell\pi = -\theta_2 \quad \text{avec} \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (21)$$

$$\theta_1 = \ell\pi = \theta_2 + \pi \quad \text{avec} \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (22)$$

Les points fixes sont donc $(\arccos(1/(2K)), -\arccos(1/(2K)))$, $(-\arccos(1/(2K)), \arccos(1/(2K)))$, $(0,0)$, (π, π) , $(0, -\pi)$ et $(\pi, 0)$. Les deux premiers n'existent que si $K > 1/2$.

La matrice jacobienne s'écrit dans le cas général

$$J = \begin{pmatrix} K \cos(\theta_1^* - \theta_2^*) - \cos \theta_1^* & -K \cos(\theta_1^* - \theta_2^*) \\ -K \cos(\theta_2^* - \theta_1^*) & K \cos(\theta_2^* - \theta_1^*) - \cos \theta_2^* \end{pmatrix}$$

→ Le point fixe $(0,0)$ conduit à la matrice jacobienne $J = \begin{pmatrix} K-1 & -K \\ -K & K-1 \end{pmatrix}$ qui a pour valeur propre les solutions de l'équation $(K-1-\lambda)^2 = K^2$, c'est-à-dire $K-1-\lambda = \pm K$, c'est-à-dire $\lambda = -1$ et $\lambda = 2K-1$. Un **col** si $K > 1/2$ et un **Nœud stable** sinon.

→ Le point fixe (π, π) conduit à la matrice jacobienne $J = \begin{pmatrix} K+1 & -K \\ -K & K+1 \end{pmatrix}$ qui a pour valeur propre les solutions de l'équation $(K+1-\lambda)^2 = K^2$, c'est-à-dire $K+1-\lambda = \pm K$, c'est-à-dire $\lambda = 1$ et $\lambda = 2K+1 > 0$. **Nœud instable**.

→ Le point fixe $(0, \pi)$ conduit à la matrice jacobienne $J = \begin{pmatrix} -K-1 & K \\ K & -K+1 \end{pmatrix}$ qui a pour trace $-2K < 0$ et pour déterminant -1 . C'est donc un **col**.

→ Le point fixe $(\pi, 0)$ conduit à la matrice jacobienne $J = \begin{pmatrix} -K+1 & K \\ K & -K-1 \end{pmatrix}$ qui a pour trace $-2K < 0$ et pour déterminant -1 . C'est donc un **col**.

→ Les points fixes $(\pm \arccos(1/2K), \mp \arccos(1/2K))$ conduisent à la matrice jacobienne $J = \begin{pmatrix} -K & K-1/2K \\ K-1/2K & -K \end{pmatrix}$ qui a pour trace $-2K < 0$ et un déterminant $\Delta = 1 - 1/(4K^2) > 0$. Ce sont donc des **nœuds stables** si $K > 1/2$ (ces points fixes n'existent pas si $K > 1/2$).

3(c) On a une bifurcation fourche supercritique pour $K = K_c = 1/2$.

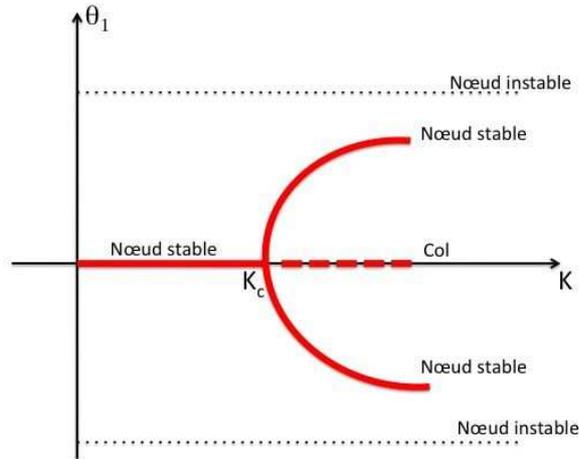


FIGURE 4 – Diagramme de bifurcation.

3(d) $\dot{\theta}_1 = -\partial V/\partial\theta_1$ conduit à

$$\frac{\partial V}{\partial\theta_1} = -K \sin(\theta_1 - \theta_2) + \sin \theta_1 \quad (23)$$

et par conséquent

$$V(\theta_1, \theta_2) = K \cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos \theta_1 + f(\theta_2) \quad (24)$$

qui conduit à

$$\frac{\partial V}{\partial\theta_2} = K \sin(\theta_1 - \theta_2) + f'(\theta_2) \quad (25)$$

et par conséquent par identification avec l'équation (2), on aboutit à $f'(\theta_2) = \sin \theta_2$ qui conduit à l'expression finale

$$V(\theta_1, \theta_2) = K \cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos \theta_1 - \cos \theta_2. \quad (26)$$

3(e) Comme la question précédente a montré que c'était un système gradient, on est assuré qu'il n'y a pas de cycle limite et donc pas d'orbites périodiques pour ce système.

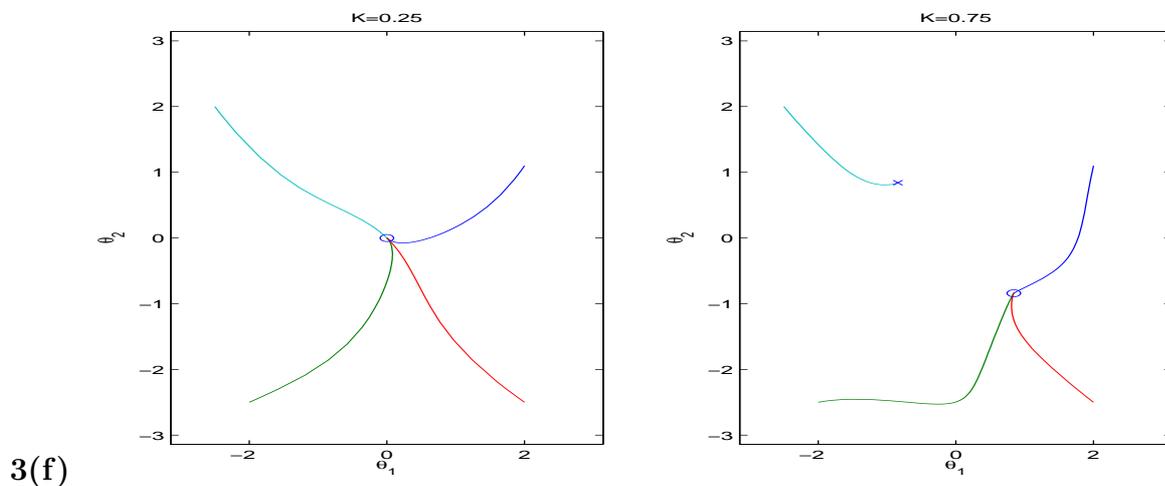


FIGURE 5 – Portrait de phase pour $K = 0.25$ (à gauche) et $K = 0.75$ (à droite).

4 Saut

4.1 Notion de potentiel effectif

4(a) Le terme $\int_0^{2\pi/\omega} \xi(t)dt$ est nul car $\xi(\omega t)$ est supposé variant comme $\cos(\omega t)$ et ses harmoniques.

$$4(b) \quad \langle x(t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t)dt = \frac{\omega}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi/\omega} X(t)dt + \int_0^{2\pi/\omega} \xi(t)dt \right] = X(t)$$

En effet, le premier terme de la parenthèse est égal à $(2\pi/\omega)X(t)$ puisque $X(t)$ est considéré comme constant sur la période rapide $2\pi\omega$. La fonction $X(t)$ décrit par conséquent le mouvement “non perturbé” moyen de la particule par rapport aux oscillations rapides.

4(c) On a

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU(X + \xi)}{dx} + f(X + \xi) \cos(\omega t) \quad (27)$$

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} \simeq -\frac{dU(X)}{dx} - \xi(\omega t) \frac{d^2U(X)}{dx^2} + \left[f(X) + \xi \frac{df(X)}{dx} \right] \cos(\omega t) \quad (28)$$

4(d) En prenant en la moyenne de l'équation (??), on aboutit à

$$m\ddot{X} + 0 = -\frac{dU(X)}{dx} + 0 + 0 + \frac{df(X)}{dx} \langle \xi \cos(\omega t) \rangle \quad (29)$$

4(e) En faisant la différence entre les équations (??) et (??), on aboutit à

$$m\ddot{\xi} = -\xi(\omega t) \frac{d^2U(X)}{dx^2} + f(X) \cos(\omega t) + \frac{df(X)}{dx} [\xi \cos(\omega t) - \langle \xi \cos(\omega t) \rangle] \quad (30)$$

qui se simplifie à l'ordre le plus bas en

$$m\ddot{\xi} = f(X) \cos(\omega t). \quad (31)$$

En effet, tous les autres termes renferment le facteur petit ξ , et par conséquent sont petits par rapport à ceux que nous avons écrits. Notons en revanche que la dérivée ξ est proportionnelle à ω^2 qui est grand. Elle ne peut donc être considérée comme petite.

Par double intégration, on obtient $\xi = -f(X) \cos(\omega t)/(m\omega^2)$ (comme la moyenne doit être nulle, toutes les constantes d'intégration doivent s'annuler).

4(f) En reportant cette expression dans l'équation (??), on aboutit à

$$m\ddot{X} = -\frac{dU(X)}{dx} + \frac{df(X)}{dx} \left\langle -\frac{1}{m\omega^2} f(X) \cos^2(\omega t) \right\rangle \quad (32)$$

$$= -\frac{dU(X)}{dx} - \frac{1}{m\omega^2} f(X) \frac{df(X)}{dx} \langle \cos^2(\omega t) \rangle \quad (33)$$

$$= -\frac{dU(X)}{dx} - \frac{1}{2m\omega^2} f(X) \frac{df(X)}{dx} \quad (34)$$

$$(35)$$

puisque $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$.

On a donc finalement

$$m\ddot{X} = -\frac{d}{dx} \left[U(X) + \frac{f^2(X)}{4m\omega^2} \right] \quad (36)$$

$$(37)$$

qui définit bien le potentiel effectif (4).

4.2 Application :

4(g) Les coordonnées du point M sont $(\ell \sin \theta, \ell \cos \theta + a \cos(\Omega t))$. Les composantes de la vitesse sont quant à elles $(\ell \dot{\theta} \cos \theta, -\ell \dot{\theta} \sin \theta - a\Omega \sin(\Omega t))$

L'énergie cinétique est par conséquent

$$T = \frac{1}{2} m V_G^2 = \frac{1}{2} m \left[\ell^2 \dot{\theta}^2 + 2a\ell \dot{\theta} \Omega \sin \theta \sin(\Omega t) + a^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t) \right] \quad (38)$$

L'énergie potentielle s'exprime sous la forme

$$V = -mg [\ell \cos \theta + a \cos(\Omega t)] \quad (39)$$

En combinant les deux expressions, on aboutit au Lagrangien $\mathcal{L} = T - V$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left[\ell^2 \dot{\theta}^2 + 2a\ell \dot{\theta} \Omega \sin \theta \sin(\Omega t) + a^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t) \right] + mg [\ell \cos \theta + a \cos(\Omega t)] \quad (40)$$

$$= \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + [mg\ell + mal\Omega^2 \cos(\Omega t)] \cos \theta + \frac{dF(t)}{dt} \quad (41)$$

où $F(t) = \frac{amg}{\Omega} \sin(\Omega t) + \frac{ma^2\Omega^2}{4} \left[t - \frac{\sin(2\Omega t)}{2\Omega} \right]$. Comme un Lagrangien est défini à une dérivée totale (par rapport au temps) près, on trouve bien l'expression (5).

4(h) L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \quad (42)$$

$$m\ell^2 \ddot{\theta} = -[mg\ell + mal\Omega^2 \cos(\Omega t)] \sin \theta \quad (43)$$

On a donc $U = -mg\ell \cos \theta$ et $f(\theta) = -mal\Omega^2 \sin \theta$.

4(i) Le potentiel effectif est donc

$$U_{eff} = U + \frac{f^2(\theta)}{4m\ell^2\Omega^2} \quad (44)$$

$$= -mg\ell \cos \theta + \frac{m^2 a^2 \ell^2 \Omega^4 \sin^2 \theta}{4m\ell^2 \Omega^2} \quad (45)$$

qui conduit à l'équation dynamique

$$m\ell^2 \ddot{\theta} = -\frac{dU_{eff}}{d\theta} = -[mg\ell + \frac{ma^2}{2}\Omega^2 \cos \theta] \sin \theta \quad (46)$$

qui se simplifie en

$$\ddot{\theta} = -\left[\frac{mg}{\ell} + \frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} \cos \theta \right] \sin \theta \quad (47)$$

4(j) Les points d'équilibre sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ qui annuleront le terme en sinus. Enfin, on aura un point d'équilibre lorsque $\cos \theta_{eq} = -2mg\ell/(a^2\Omega^2)$. Ce dernier cas n'existe que lorsque $a\Omega > \sqrt{2mg\ell}$.

Il s'agit donc d'osciller avec une grande amplitude ou bien avec une grande pulsation.

4(k) Première Méthode : En considérant $\theta = \theta^* + \varepsilon$, on doit développer à l'ordre le plus bas

$$\frac{d^2(\theta^* + \varepsilon)}{dt^2} = - \left[\frac{mg}{\ell} + \frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} \cos(\theta^* + \varepsilon) \right] \sin(\theta^* + \varepsilon). \quad (48)$$

Le cas $\theta^* = 0$, conduit à $\ddot{\varepsilon} = - \left[\frac{mg}{\ell} + \frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} \right] \varepsilon$ qui montre que ce point fixe est toujours stable.

Le cas $\theta^* = \pi$, conduit à $\ddot{\varepsilon} = \left[\frac{mg}{\ell} - \frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} \right] \varepsilon$ qui montre que ce point fixe est toujours instable à moins que $a\Omega > \sqrt{2mg\ell}$.

Le cas $\theta^* = \theta_{eq}$, conduit à $\ddot{\varepsilon} = - \left[\frac{mg}{\ell} + \frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} \left(-\frac{2mg\ell}{a^2\Omega^2} - \varepsilon \sin \theta_{eq} \right) \right] (\sin \theta_{eq} + \varepsilon \cos \theta_{eq})$ qui se simplifie en $\ddot{\varepsilon} = \varepsilon \left[\frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} \sin^2 \theta_{eq} \right]$ est toujours instable quand il existe.

Deuxième Méthode : En utilisant la méthode vue en cours, on a $p = \dot{\theta}$ et donc $\dot{p} = - \left[\frac{mg}{\ell} + \frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} \cos \theta \right] \sin \theta$ qui donne par conséquent comme matrice jacobienne

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ - \left[\frac{mg}{\ell} + \frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} \cos \theta^* \right] \cos \theta^* + \frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} \sin^2 \theta^* & 0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mg}{\ell} \cos \theta^* - \frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} \cos(2\theta^*) & 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

Le cas $\theta^* = 0$, conduit à $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mg}{\ell} & 0 \end{pmatrix}$. La trace est nulle et le déterminant est positif. C'est un centre : Attention !

Le cas $\theta^* = \pi$, conduit à $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mg}{\ell} - \frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} & 0 \end{pmatrix}$. La trace est nulle et le déterminant est $\Delta = \frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} - \frac{mg}{\ell}$. C'est un col pour $a\Omega < \sqrt{2mg\ell}$ et un centre sinon.

Le cas $\theta^* = \theta_{eq}$, conduit à $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} \left[1 - \left(\frac{2mg\ell}{a^2\Omega^2} \right)^2 \right] & 0 \end{pmatrix}$. La trace est nulle et le déterminant est $\Delta = \frac{a^2\Omega^2}{2\ell^2} \left[\left(\frac{2mg\ell}{a^2\Omega^2} \right)^2 - 1 \right]$. C'est un col pour $a\Omega > \sqrt{2mg\ell}$ et n'existe pas sinon.