

Examen du cours “des Systèmes Dynamiques au Chaos”

Mercredi 2 mai 2012

Notes de cours manuscrites autorisées sauf pour la question de cours.

1 Question de cours (30')

Considérons le système dynamique suivant dans lequel μ est un paramètre réel

$$\dot{x}_1 = +x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2). \quad (2)$$

- 1(a) Déterminez les points fixes du système.
- 1(b) Déterminez la stabilité linéaire de l'origine lorsque $\mu = 0$. Dessiner le portrait de phase correspondant.
- 1(c) Déterminez les équations dynamiques en coordonnées polaires en posant $x_1 = r \cos \theta$ et $x_2 = r \sin \theta$.
- 1(d) Comme $\dot{\theta}$ est constant, justifiez que l'on puisse se restreindre à l'étude de l'équation en \dot{r} .
- 1(e) Montrez qu'il existe un point fixe pour $r = 0$. Aux temps longs, est ce que les petites perturbations autour de $r = 0$ croissent ou décroissent lorsque $\mu = 0$? On discutera cette conclusion à la lumière de la discussion de la stabilité de l'origine. Est-ce que ces deux analyses donnent des indications sur différents aspects du système?
- 1(f) Montrez qu'il existe un cycle limite lorsque $\mu > 0$. Quel est son rayon R ? Est-il stable?
- 1(g) Dessinez sommairement le portrait de phase pour tout $\mu > 0$.

2 Prédire le résultat de l'élection présidentielle

Considérons la population des électeurs français pour l'élection présidentielle. Soit x_k la fraction d'électeurs de François Hollande le jour k . On peut bien entendu faire un raisonnement similaire pour Nicolas Sarkozy.

Supposons que la fraction x_k change d'un jour à l'autre de telle manière qu'elle ne dépend que de la valeur x_k elle-même, de telle façon que la fraction des électeurs supporteurs de Hollande le jour $k + 1$ pourrait s'écrire

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad (3)$$

en notant $\phi(x)$ une fonction inconnue monotone croissante et définie sur l'intervalle unité ($0 \leq x \leq 1$). On a précisément $0 \leq \phi(x) \leq 1$. Supposons que $\phi(x) = x$ possède trois et seulement trois solutions $x = \alpha$, $x = 1/2$, et $x = \gamma$, avec

$$0 < \alpha < 1/2 < \gamma < 1. \quad (4)$$

- 2(a) Parmi les solutions stationnaires, quelles sont celles qui sont stables, s'il en existe? Quelles sont celles qui sont instables?
- 2(b) Supposons qu'un sondage précis effectué aujourd'hui montre qu'une faible majorité d'électeurs a choisi François Hollande. Si l'on peut atteindre un état stationnaire le jour de l'élection, quelle fraction d'électeurs voteront pour François Hollande? Justifiez.

3 Evolution du zooplancton

La population Z de zooplancton (animaux microscopiques aquatiques) se nourrit à partir de la quantité P de phytoplancton (plantes microscopiques aquatiques).

3(a) En introduisant a, b, c, d des constantes positives, expliquez pourquoi un modèle raisonnable de la dynamique de ces populations peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= aP - bPZ \quad (P \geq 0) \\ \frac{dZ}{dt} &= cPZ - dZ \quad (Z \geq 0). \end{aligned} \tag{5}$$

3(b) Déterminez les points fixes du système, déterminez la stabilité analytiquement et décrivez le mouvement dans le voisinage à l'aide d'un dessin du plan de phase. Quelles conclusions peut-on tirer sur l'évolution des populations de zooplancton et de phytoplancton ?

3(c) Supposons que l'intensité du soleil diminue de façon dramatique pendant une courte période (par exemple à cause d'une pollution en surface), éliminant une quantité de phytoplancton. Discuter de manière qualitative les différents effets sur la population restante. Est-ce qu'une réduction soudaine de ce type du phytoplancton, peut notamment conduire à l'augmentation de la population de zooplancton ?

3(d) Existe-t-il un (ou des) cycle(s) limite(s) dans ce problème. Justifiez.

4 Pendule Inversé

Nous allons essayer de prouver qu'il est possible de stabiliser la position inversée d'un pendule, si le point de suspension oscille de manière convenable. Nous allons procéder par étapes, mais il est important de noter que l'on peut résoudre la question (d), même si l'on n'arrive pas à répondre aux questions (a), (b) ou (c).

Pour faciliter la discussion, en notant x le déplacement vertical du point pivot, nous allons considérer le mouvement suivant du point pivot

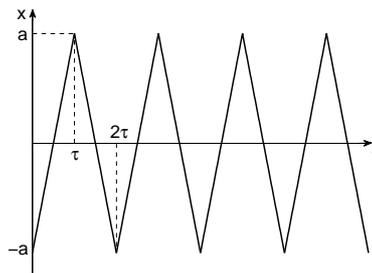


FIGURE 1 – Déplacement vertical du pivot en fonction du temps.

$$x = \begin{cases} +a\left(\frac{2t}{\tau} - 1\right), & 0 < t < \tau \\ -a\left(\frac{2t'}{\tau} - 1\right), & \tau < t < 2\tau, \quad t' = t - \tau. \end{cases} \tag{6}$$

Le pivot oscille par conséquent entre $\pm a$, comme l'indique la figure 1. Négligeons les frottements et considérons de petits déplacements du pendule par rapport à sa position la plus haute.

L'équation de mouvement pour de petits déplacements θ par rapport à la position $\theta_{eq} = \pi$ s'écrit

$$\ddot{\theta} = (g + \ddot{x})\frac{\theta}{\ell}, \quad (7)$$

en notant ℓ la longueur du pendule. Si au temps $t = 0$, la position est θ_0 et la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$, pour $0 < t < \tau$, on a

$$\theta = \theta_0 \cosh(\mu t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\mu} \sinh(\mu t) \quad (8)$$

avec $\mu = \sqrt{g/\ell}$. Pendant le rapide renversement du mouvement à $t = \tau$, on peut considérer $\ddot{x} \gg g$. En intégrant l'équation du mouvement sur le petit intervalle de temps débutant juste avant que le pivot soit à son maximum (τ^-) à juste après (τ^+), on peut montrer que la vitesse angulaire change par

$$\delta(\dot{\theta}) = -4a\theta|_{\tau^-}/\ell\tau \quad (9)$$

alors que θ ne change pas dans ce très petit intervalle de temps.

4(a) Déterminez θ et $\dot{\theta}$ pour $t = \tau^-$ en utilisant l'équation (8). Le signe moins en exposant indiquant que l'on considère un temps qui se situe juste avant $t = \tau$. Montrez par conséquent que

$$\begin{bmatrix} X(\tau^-) \\ Y(\tau^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

où $X = \theta\sqrt{\mu}$, $Y = \dot{\theta}/\sqrt{\mu}$, X_0 et Y_0 correspondent à θ_0 et $\dot{\theta}_0$, tandis que $C = \cosh(\mu\tau)$ et $S = \sinh(\mu\tau)$.

4(b) Considérons le changement soudain en $\dot{\theta}$ à $t = \tau$ donné par l'équation (9). Déterminez θ et $\dot{\theta}$ en $t = \tau^+$, le signe plus en exposant indiquant que l'on considère un instant juste après $t = \tau$. Montrez par conséquent que

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ S - 2QC & C - 2QS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

où $Q = 2a/l\mu\tau$. X_1 et Y_1 correspondent à $\theta(\tau^+)$ et $\dot{\theta}(\tau^+)$.

4(c) La demi-période suivante, on procède de la même manière sauf que l'impulsion est de signe opposée. Exprimez par conséquent X_2 et Y_2 en termes de X_1 et Y_1 , où X_2 et Y_2 correspondent à $\theta(2\tau^+)$ et $\dot{\theta}(2\tau^+)$ (on recherche un résultat similaire à la question précédente).

4(d) Les résultats des questions (b) et (c) peuvent être combinés pour aboutir à

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - Qs & s - Q(c - 1) \\ s(1 - 2Q^2) + Q(c - 1) & c + Qs - 2Q^2(c - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

où $c = \cosh(2\mu\tau)$ et $s = \sinh(2\mu\tau)$. C'est un système discrétisé en temps, c'est-à-dire que la matrice de transfert relie l'état du système à $t = t_0$ à celui à $t = t_0 + 2\tau$.

Déterminez le(s) point(s) fixe(s) du système ci-dessus qui correspond(ent) à la position inversée du pendule. Donner simplement la condition pour laquelle le point fixe est stable (aucun calcul n'est demandé).

4(e) Montrer que la position inversée est marginalement stable si $1 < Q < \coth(\mu\tau)$.

Pour en savoir plus :

- 1) *Dinamicheskaya ustoychivost mayatnijka pri koleblyushejsya tochke podvesa* de Pyotr Leonidovich Kapitsa dans *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki* 21, 588 (1951).
- 2) *The inverted pendulum* de A. B. Pippard dans *European Journal of Physics* 8, 203 (1987).

Correction de l'examen du 2 Mai 2012

1 Question de cours

1(a) Les points fixes sont donnés par $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Cela conduit à

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) = 0 \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = -(\mu - x_1^2 - x_2^2) \quad \text{pour } x_1 \neq 0 \quad (10)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) = 0 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = (\mu - x_1^2 - x_2^2) \quad \text{pour } x_2 \neq 0 \quad (11)$$

En multipliant ces deux équations, on obtient $(\mu - x_1^2 - x_2^2)^2 = -1$, ce qui ne peut être satisfait si x_1 et x_2 sont réels. Par conséquent, $(x_1, x_2) = (0, 0)$ est le seul point fixe et cela pour toutes les valeurs de μ .

1(b) Lorsque $\mu = 0$, les équations (1) et (2) se réduisent à

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1(-x_1^2 - x_2^2) \quad (12)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(-x_1^2 - x_2^2). \quad (13)$$

La matrice Jacobienne J est donnée par

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_1x_2 \\ -1 - 2x_1x_2 & -x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Pour $(x_1, x_2) = (0, 0)$, cela donne

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

qui conduit à l'équation caractéristique $\lambda^2 = -1$ qui a pour solutions les valeurs propres $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Les valeurs propres étant des imaginaires purs, l'origine est un point fixe neutralement stable pour le système linéarisé. C'est un centre et l'espace des phases près de l'origine aura des orbites fermées (des cercles pour être précis). Pour obtenir les directions des trajectoires, considérons un point sur l'axe positif des x_2 , par exemple $(x_1, x_2) = (0, 1)$; En substituant ces valeurs dans l'équation en \dot{x}_1 , on obtient $\dot{x}_1 = 1 > 0$, qui indique immédiatement que les trajectoires doivent aller vers la droite. Les trajectoires vont donc tourner dans le sens des aiguilles d'une montre.

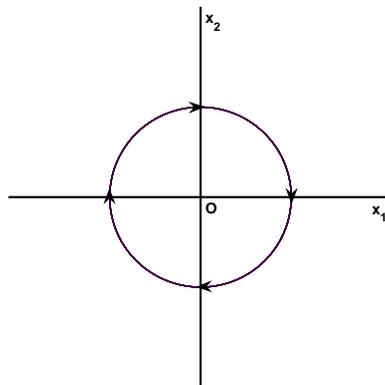


FIGURE 2 – Espace des phases près de l'origine pour le système linéarisé.

1(c) En substituant $x_1 = r \cos \theta$ et $x_2 = r \sin \theta$, les équations (1) et (2) se réduisent à

$$\dot{x}_1 = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} = r \sin \theta + r \cos \theta (\mu - r^2) \quad (14)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} = -r \cos \theta + r \sin \theta (\mu - r^2). \quad (15)$$

En faisant (14) $\cos \theta + (15) \sin \theta$, on obtient une équation pour \dot{r} . De manière similaire, $-(14) \sin \theta + (15) \cos \theta$ conduit à une expression pour $\dot{\theta}$. On obtient après calculs

$$\dot{r} = r(\mu - r^2) \quad (16)$$

$$\dot{\theta} = -1. \quad (17)$$

1(d) Comme $\dot{\theta}$ est une constante négative, on sait que toutes les solutions tourneront autour de l'origine dans le sens des aiguilles d'une montre.

1(e) Par ailleurs, on peut voir immédiatement que \dot{r} s'annule pour $r = 0$. Par conséquent, $r = 0$ est un point fixe pour (16). Lorsque $\mu = 0$, $\dot{r} = -r^3$. Cela signifie que \dot{r} est négatif pour toutes les valeurs positives de r ($r \geq 0$). Toute petite perturbation autour de l'origine disparaîtra et donc toutes les solutions convergent vers zéro. En combinant le comportement de r et θ , on déduit que l'espace des phase aura des spirales stables vers l'origine lorsque $\mu = 0$. En conclusion, pour $\mu = 0$, l'origine est un point fixe asymptotiquement stable.

Un centre n'étant pas un point fixe robuste, la prédiction obtenue à partir de l'analyse linéaire n'est pas valide pour l'analyse du système nonlinéaire de départ.

1(f) Lorsque $\mu > 0$, On observe que $R = \mu^{1/2}$ est un point fixe pour l'équation (16). Lorsque $0 < r < \mu^{1/2}$, \dot{r} est positif et par conséquent r croît. Lorsque $r > \mu^{1/2}$, \dot{r} est négatif et par conséquent r décroît. Cela signifie que $R = \mu^{1/2}$, $\dot{\theta} = -1$ représente un attracteur qui attire les solutions de l'intérieur et de l'extérieur du cercle. C'est donc bien un cycle limite stable et de rayon $R = \mu^{1/2}$. Le portrait de phase portrait est présenté à la Fig. 3.

1(g) Portrait de phase

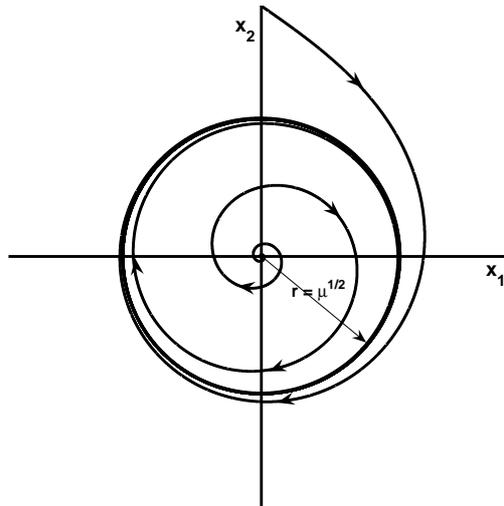


FIGURE 3 – Cycle limite stable lorsque $\mu > 0$

2 Prédire le résultat de l'élection présidentielle

- 2(a)** Comme les points d'équilibre correspondent à $x_{k+1} = x_k = \phi(x_k)$ et que l'on doit tenir compte des contraintes sur $\phi(x)$ (fonction monotone croissante et définie uniquement sur l'intervalle unité), on peut tracer l'allure de $\phi(x)$ et ses points d'équilibre. La stabilité de l'application unidimensionnelle est déterminée par la dérivée de ϕ à chaque point d'équilibre x^* .

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(x^*)}{dx} &< 1 : \text{stable} \\ \frac{d\phi(x^*)}{dx} &> 1 : \text{instable.} \end{aligned}$$

Il existe deux scénarios : Scénario 1 ($\phi(0) > 0, \phi(1) < 1$) possède deux points d'équilibre stable, et le Scénario 2 qui a un unique point d'équilibre stable. Le Scénario 2 ($\phi(0) < 0, \phi(1) > 1$) n'est pas correct puisque x est une fraction alors que ϕ_2 associe x au dessus de 1. Ce n'est donc pas un scénario que l'on peut retenir. Le Scénario 1 est donc l'unique possibilité.

Dans le scénario 1, $x = 1/2$ est instable alors que les 2 autres solutions d'équilibre sont stables. On le voit en regardant les dérivées à chaque point d'équilibre. $\frac{d\phi(1/2)}{dx} > 1$ signifie que $x = 1/2$ est instable. Comme $\frac{d\phi(x)}{dx} < 1$ aux deux autres points d'équilibre, cela signifie qu'ils sont stables.

- 2(b)** En considérant le scénario 1, toute perturbation vers la droite de $x = 1/2$ évoluera vers le point stable de droite. Lorsque le point d'équilibre est atteint le jour de l'élection $x = x^* > 1/2$. Hollande a donc la majorité et il gagne l'élection.

3 Zooplancton

- 3(a)** Dans ce problème, le zooplancton, Z , correspond aux prédateurs alors que le phytoplancton, P , correspond aux proies. En l'absence de prédateurs et avec des ressources illimitées, les proies se reproduiront et la population augmentera : c'est l'explication du terme aP avec $a > 0$.

Comme les interactions et par conséquent le taux de décès est proportionnel au nombre de rencontres entre les prédateurs et les proies, il existe un terme inhibiteur $-bPZ$.

On peut comprendre l'équation dynamique pour les prédateurs de façon identique. En l'absence de proies, la population de prédateurs aura tendance à décroître alors qu'en présence de proies elle pourra se reproduire (en imaginant une relation de proportionnalité entre consommation et reproduction) : cela explique les deux termes $-dZ$ et cPZ .

- 3(b)** En étudiant les deux équations on détermine facilement deux points fixes : le premier pour $(P, Z) = (0, 0)$ et le second $(P, Z) = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$. La matrice Jacobienne s'écrit quant à elle

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \dot{Z}}{\partial P} & \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - bZ & -bP \\ cZ & cP - d \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Au point $(0, 0)$, la matrice Jacobienne se réduit à

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Les valeurs propres sont donc de signe opposées et le point fixe est donc un col (instable). Le vecteur propre correspondant à la valeur propre instable $\lambda_1 = a$ est $[1 \ 0]$, alors que celle correspondant à la valeur propre stable $\lambda_1 = -d$ est selon $[0 \ 1]$. C'est logique puisque si $Z = 0$,

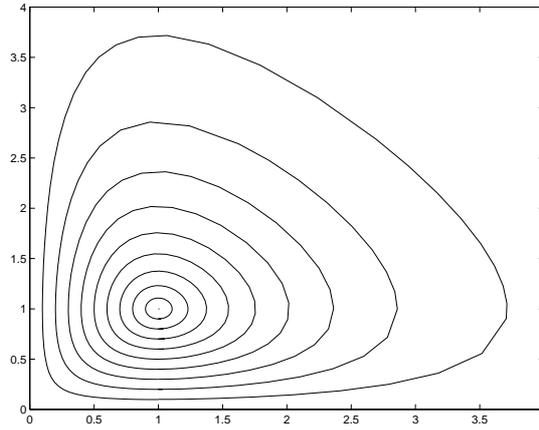


FIGURE 4 – Portrait de phase Zooplancton/Phytoplancton pour $a = b = c = d = 1$ (les trajectoires sont parcourues dans le sens trigonométriques).

une valeur initiale non nulle de P continuera à croître selon la loi $\dot{P} = aP$, et de manière similaire, si $P = 0$, une valeur initiale non nulle pour Z continuera à décroître selon la loi $\dot{Z} = -dZ$.

Au point $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$, la matrice Jacobienne se réduit à

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

qui conduit à l'équation caractéristique suivante

$$\lambda^2 + ad = 0. \quad (21)$$

Les valeurs propres $\lambda = \pm i\sqrt{ad}$ sont donc imaginaires pures, et le point fixe est donc marginalement stable. Au voisinage de ce point critique, les populations de phytoplancton et de zooplancton sont des fonctions sinusoidales du temps, déphasées de 90° . Il est important de noter que c'est un cas peu robuste et que par conséquent la prédiction pour le système non linéaire est ouverte. C'est l'existence d'une quantité conservée, une "fonction énergie", qui permet d'affirmer que le point fixe $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ reste marginalement stable même pour les équations nonlinéaires de départ.

- 3(c)** Un changement soudain dans l'espace des phases aura pour effet le saut sur l'orbite contenant le nouveau point. C'est finalement un système très proche d'un oscillateur harmonique. Comme le système est conservatif, les orbites auront tendances à être fermées et différentes conditions initiales induiront différents états oscillants. Selon le nombre exact de phytoplanctons disparus, le système peut sauter sur un autre point du même cycle, ou bien sur une autre trajectoire de plus petite ou plus grande amplitude. Si tout le phytoplancton disparaît le système tendra vers l'état $(0, 0)$.
- 3(d)** Les trajectoires périodiques autour du point fixe marginalement stable $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ ne sont pas des cycles limites, puisque ces derniers attirent ou repoussent les conditions initiales dans un proche voisinage. Ici les trajectoires ne sont pas isolées.

4 Pendule Inversé

4(a) En dérivant l'équation (8), on obtient

$$\dot{\theta} = \theta_0 \mu \sinh(\mu t) + \dot{\theta}_0 \cosh(\mu t). \quad (22)$$

En substituant $t = \tau$ dans les équations (8) et (22), on a

$$\theta(\tau^-) = \theta_0 \cosh(\mu\tau) + \frac{\dot{\theta}_0}{\mu} \sinh(\mu\tau) \quad (23)$$

et

$$\dot{\theta}(\tau^-) = \theta_0 \mu \sinh(\mu\tau) + \dot{\theta}_0 \cosh(\mu\tau). \quad (24)$$

En multipliant l'équation en θ par $\sqrt{\mu}$ et celle en $\dot{\theta}$ par $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, on aboutit à

$$X(\tau^-) = X_0 \cosh(\mu\tau) + Y_0 \sinh(\mu\tau) = CX_0 + SY_0. \quad (25)$$

et

$$Y(\tau^-) = X_0 \sinh(\mu\tau) + Y_0 \cosh(\mu\tau) = SX_0 + CY_0 \quad (26)$$

C'est ce qu'indique l'équation matricielle de l'énoncé.

4(b) Comme l'énoncé affirme qu'il n'y a pas de changement en θ dans le petit intervalle de temps entre τ^- et τ^+ , cela signifie que

$$X_1 = X(\tau^+) = X(\tau^-) = CX_0 + SY_0 \quad (27)$$

d'après la question précédente.

En utilisant l'équation (9) pour le changement en $\dot{\theta}$, on peut écrire

$$Y(\tau^+) = \frac{\dot{\theta}(\tau^+)}{\sqrt{\mu}} = \frac{\dot{\theta}(\tau^-) - 4a\theta(\tau^-)/(\ell\tau)}{\sqrt{\mu}} = Y(\tau^-) - 2QX(\tau^-) \quad (28)$$

$$= SX_0 + CY_0 - 2Q(CX_0 + SY_0) \quad (29)$$

$$= (S - 2QC)X_0 + (C - 2QS)Y_0 \quad (30)$$

4(c) Comme il est indiqué que tout ce qui a lieu entre $t = \tau$ et $t = 2\tau$ est similaire à ce qui se passe entre $t = 0$ et $t = \tau$, hormis le changement de signe de $\dot{\theta}$ qui a lieu entre $t = 2\tau^-$ et $t = 2\tau^+$. Cela conduit à

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ S + 2QC & C + 2QS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

On notera le changement de signe des termes qui résultent du changement de l'impulsion en $\dot{\theta}$ à $t = 2\tau$.

4(d) Comme indiqué dans la question, θ repère de petits déplacements par rapport à la position $\theta_{eq} = \pi$, et θ est la perturbation de $\theta_{eq} = 0$. Par conséquent, le point fixe $(X, Y) = (0, 0)$ correspond à l'état inversé du pendule. On notera également que $(0, 0)$ est un point fixe, puisqu'il reste en $(0, 0)$ s'il démarre de $(0, 0)$.

Ce système correspond par conséquent à une application itérée et non plus un système continu en temps. Le critère de stabilité est donc déterminé par par

$$|\lambda_{1,2}| \leq 1 \quad (31)$$

où $\lambda_{1,2}$ sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne prise au point fixe. On notera qu'ici $|\lambda_{1,2}| = 1$ correspond à la stabilité marginale.

4(e) Le système étant linéaire, la matrice jacobienne est celle qui multiplie $\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$ pour avoir $\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$.
 Pour déterminer les valeurs propres de la matrice, calculons d'abord son déterminant.

$$\det(J) = (c - Qs)(c + Qs - 2Q^2(c - 1)) - (s - Q(c - 1))(s(1 - 2Q^2) + Q(c - 1)) \quad (32)$$

$$= c^2 + Qsc - 2Q^2c^2 + 2Q^2c - Qsc - Q^2s^2 + 2Q^3sc - 2Q^3s - s^2 + 2Q^2s^2 - Qsc + Qs + Qsc - 2Q^3sc + Q^2c^2 - Q^2c - Qs + 2Q^3s - Q^2c + Q^2 \quad (33)$$

$$= c^2 - Q^2c^2 + Q^2s^2 - s^2 + Q^2 \quad (34)$$

$$= 1. \quad (35)$$

Nous avons utilisé le résultat $c^2 - s^2 = 1$, ce qui permet de réduire fortement le résultat final!
 Calculons maintenant la trace

$$\text{trace}(J) = c - Qs + c + Qs - 2Q^2(c - 1) = 2c + 2Q^2 - 2Q^2c. \quad (36)$$

Les valeurs propres d'une matrice 2×2 s'expriment de la façon suivante en termes de la trace τ et du déterminant Δ

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}). \quad (37)$$

On obtient donc

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(2c + 2Q^2 - 2Q^2c \pm \sqrt{(2c + 2Q^2 - 2Q^2c)^2 - 4}) \quad (38)$$

$$= c + Q^2 - Q^2c \pm \sqrt{(c + Q^2 - Q^2c)^2 - 1}. \quad (39)$$

L'unique possibilité pour obtenir $|\lambda_{1,2}| = 1$ correspondra au cas où $(c + Q^2 - Q^2c)^2 - 1 \leq 0$, sinon les valeurs propres seront deux nombres réels différents. Vérifions que le module de ces valeurs propres sera égal à un si elles sont complexes (i.e. $\lambda_{1,2} = c + Q^2 - Q^2c \pm i\sqrt{1 - (c + Q^2 - Q^2c)^2}$),

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{(c + Q^2 - Q^2c)^2 + 1 - (c + Q^2 - Q^2c)^2} = 1. \quad (40)$$

Par conséquent l'unique condition à satisfaire pour la stabilité marginale est

$$(c + Q^2 - Q^2c)^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq (c + Q^2 - Q^2c) \leq 1 \quad (41)$$

ce qui implique

$$(-1 - c) \leq Q^2(1 - c) \leq (1 - c). \quad (42)$$

En supposant que $c \neq 1$ (i.e. $\tau \neq 0$), la condition se réduit à $\frac{-c-1}{1-c} \geq Q^2 \geq 1$, et cela se simplifie en $\coth^2(\mu\tau) \geq Q^2 \geq 1$. Notez que les inégalités ont été retournées puisque l'on a divisé par $(1 - c)$, qui est négatif puisque la fonction cosh est toujours supérieure à 1 si l'argument est non nul. Par conséquent, on a

$$1 \leq Q \leq \coth(\mu\tau) \quad (43)$$

pour la stabilité marginale.

Il est important de noter que si l'on tient compte de la friction, le pendule passe de marginalement stable à stable, les petites perturbations disparaissant. Prendre une fonction en dent de scie a simplifié le résultat puisque l'on a $\ddot{x} = 0$ pour tout temps sauf pour de très petits intervalles autour de $t = \tau, 2\tau, \dots$. On peut donc résoudre le problème de manière analytique presque tout le temps.