

Examen du cours “des Systèmes Dynamiques au Chaos”

Lundi 29 Avril 2013

*Notes de cours manuscrites autorisées sauf pour la question de cours.*

## 1 Question de cours

1(a) Tracer le portrait de phase du système dynamique

$$\dot{x} = x + y \quad (1)$$

$$\dot{y} = 4x - 2y \quad (2)$$

1(b) Étudier le système dynamique  $\dot{x} = r + x - \ln(1 + x)$  lorsque l'on varie le paramètre  $r$ . Donner le nom de la bifurcation que l'on peut identifier.

1(c) Déterminer l'exposant de Lyapunov de l'application tente aussi appelée application circonflexe.

1(d) Calculer la surface du flocon de Von Koch.

## 2 Balançoire

Considérons un modèle simple d'un enfant sur une balançoire. En notant  $x$  la variable correspondant à l'angle entre la balançoire et la gravité, on étudie l'équation

$$\ddot{x} + (1 + \varepsilon\gamma + \varepsilon \cos 2t) \sin x = 0, \quad (3)$$

où  $\varepsilon$  et  $\gamma$  sont des paramètres et  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Le terme  $(1 + \varepsilon\gamma + \varepsilon \cos 2t)$  modélise l'effet de la gravité ainsi que le forçage régulier des jambes de l'enfant, à approximativement deux fois la pulsation naturelle de la balançoire.

Après une nuit difficile, le parent fatigué se pose la question suivante : si mon enfant démarre proche de la position au repos  $x = 0$  et  $\dot{x} = 0$ , est ce qu'il peut faire démarrer la balançoire en faisant osciller ses jambes ou bien dois-je absolument le pousser au départ ?

2(a) Pour de faibles valeurs de  $x$ , justifier que l'équation (3) peut s'écrire sous la forme

$$\ddot{x} + x + \varepsilon h(x, t) = 0. \quad (4)$$

2(b) En utilisant la méthode des échelles multiples ( $t, T = \varepsilon t, \dots$ ) et la substitution  $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots$ , donner les deux équations à vérifier aux ordres les plus bas.

2(c) Justifier le choix  $x_0(t, T) = r(T) \cos(t + \phi(T)) = r(T) \cos \theta$ .

2(d) Exprimer le terme de forçage de l'équation d'ordre  $O(\varepsilon)$  en fonction des fonctions  $r$  et  $\phi$ .

- 2(e)** Montrer que l'annulation des termes séculaires du forçage donne deux équations couplant  $r$ ,  $\phi$ ,  $r'$  et  $\phi'$ , où le prime correspond à la dérivée par rapport au temps lent  $T = \varepsilon t$ . Indication : on se souviendra que  $\cos t \cos 2t = (\cos 3t + \cos t)/2$  et que  $\sin t \cos 2t = (\sin 3t - \sin t)/2$ .
- 2(f)** Montrer que ces relations permettent d'obtenir les équations d'évolution de  $r$  et  $\phi$  :

$$r' = r/4 \sin(2\phi) \quad (5)$$

$$\phi' = \gamma/2 + \cos(2\phi)/4 \quad (6)$$

- 2(g)** Montrer que le point fixe  $r = 0$  est instable si  $|\gamma| < \gamma_c$  que l'on déterminera. Lorsque  $r$  est proche de 0, on pourra utiliser le fait que  $\phi' \gg r'$  et par conséquent que  $\phi$  s'équilibre relativement rapidement.
- 2(h)** Lorsque  $|\gamma| < \gamma_c$ , déterminer la formule donnant le taux de croissance de  $r$  en fonction de  $\gamma$ .
- 2(i)** Interpréter les résultats

### 3 Oscillations

Lorsque l'on excite un oscillateur linéaire (harmonique) de fréquence  $\omega_0$  par une oscillation de fréquence  $\Omega$ , la réponse comporte deux parties : une composante à la fréquence  $\omega_0$  qui décroît exponentiellement avec le temps pour un oscillateur amorti (contribution transitoire) et une composante forcée à la fréquence  $\Omega$  dont l'amplitude dépend de  $\Omega$  conformément à la courbe de résonance bien connue.

Pour un oscillateur non linéaire la réponse est nettement plus compliquée. Pour rester en dehors du domaine où apparaissent des phénomènes chaotiques, nous considérerons des excitations faibles et un oscillateur faiblement non linéaire.

Considérons par exemple le cas où l'on a un terme cubique dans l'équation du mouvement (potentiel quartique) :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = -2\varepsilon\mu\dot{u} - \varepsilon\alpha u^3 + K \cos(\Omega t). \quad (7)$$

Le premier terme de droite correspond à l'amortissement visqueux habituel, le second à la première contribution non linéaire, le troisième enfin à une excitation externe périodique.

Dans les nombreux systèmes non linéaires avec un potentiel symétrique, cette équation apparaît quand on réalise un développement au voisinage du minimum du potentiel. Elle est connue sous le nom d'équation de Duffing.

Un traitement par une théorie de perturbations classique est donnée dans le Landau de mécanique. Nous allons appliquer à cet exemple la méthode des échelles multiples.

#### 3.1 Résonance principale ( $\Omega \simeq \omega_0$ )

On étudie le cas où la fréquence d'excitation est voisine de  $\omega_0$  en considérant  $\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma$  avec  $\sigma$  d'ordre 1. Comme on est au voisinage d'une résonance, l'amplitude de la réponse peut devenir grande. Pour rester dans le domaine de validité des théories approchées, on doit se limiter à de faibles excitations, comme précédemment signalé. On pose donc  $K = \varepsilon k$  et on introduit les différentes échelles de temps  $T_0, T_1, \dots, T_n$  avec  $T_n = \varepsilon^n t$ . Cherchons des solutions sous la forme

$$u(t, \varepsilon) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (8)$$

- 3.1(a)** En utilisant la méthode des échelles multiples ( $t, T = \varepsilon t, \dots$ ) et la substitution  $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots$ , donner les deux équations à vérifier aux ordres les plus bas.

- 3.1(b)** Montrer que la solution à l'ordre le plus bas est  $u_0 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + c.c.$ .
- 3.1(c)** Réécrire l'équation d'ordre  $\varepsilon$  en utilisant la solution déterminée à la question précédente.
- 3.1(d)** Déterminer la condition de solvabilité, c'est-à-dire l'équation qui annule tout terme séculaire.
- 3.1(e)** En introduisant amplitude et phase sous la forme  $A = (a/2) \exp(i\beta)$ , montrer que l'on se ramène au système dynamique.

$$\text{Partie réelle} \quad a \frac{d\beta}{dT_1} = B a^3 + C \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (9)$$

$$\text{Partie imaginaire} \quad \frac{da}{dT_1} = D a + E \sin(\sigma T_1 - \beta), \quad (10)$$

On donnera les expressions de  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$ .

### 3.2 Régime stationnaire forcé

- 3.2(a)** Par un changement de variable approprié, montrer que l'on peut ramener le système (9-10) à un système autonome, c'est à dire sans dépendance explicite du temps.
- 3.2(b)** Déterminer les points fixes du système précédent et exprimer  $u$  dans le régime stationnaire.
- 3.2(c)** Vérifier que, dans le cas linéaire ( $\alpha = 0$ ), on retrouve l'expression usuelle.
- 3.2(d)** Discuter le cas nonlinéaire.
- 3.2(e)** Proposer une méthode pour déterminer la stabilité des solutions correspondant au régime stationnaire.

### 3.3 Résonances secondaires

Lorsque la fréquence d'excitation  $\Omega$  s'écarte notablement de  $\omega_0$ , on doit considérer des excitations plus fortes.

- 3.3(a)** Quelle hypothèse du 3.1 doit on modifier ?
- 3.3(b)** Réécrire les équations aux deux ordres les plus bas.
- 3.3(c)** Déterminer la solution de l'équation à l'ordre le plus bas.
- 3.3(d)** En utilisant cette expression à l'ordre suivant, discutez ce que l'on obtiendra expérimentalement.

# Correction de l'examen du 29 Avril 2013

## 1 Question de cours

- 1(a) Le polynôme caractéristique est  $(1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = 0$  a pour solution  $\lambda_+ = 2$  et  $\lambda_- = -3$ . L'origine est donc un col. Pour déterminer les directions caractéristiques, on cherche les vecteurs propres qui s'avèrent être  $(1,1)$  et  $(1,-4)$ . On a donc tout pour tracer le portrait de phase.
- 1(b) On trace la courbe  $y = \ln(1 + x)$ . On voit ensuite que selon la valeur de  $r$ , cette courbe est coupée 2 fois, une fois ou bien zéro fois par la droite  $y = r + x$ . On a donc bien une bifurcation noeud-col.
- 1(c) L'application tente est donnée par  $f(x) = rx$  pour  $0 \leq x \leq 1/2$ , et  $f(x) = r(1 - x)$  pour  $1/2 \leq x \leq 1$ . On a donc  $f'(x) = \pm r$ , et donc l'exposant de Lyapunov est  $\lambda = \ln r$ .
- 1(d) Etudions la surface du flocon de Von Koch dont on voit les trois premières allures sur la figure 1.



FIGURE 1 – Triangle de départ ; après une itération, après deux itérations.

On voit très facilement sur la figure 1, qu'il y a 3 côtés de longueur 1 initialement. Au bout d'une itération, il y a 12 côtés de longueur  $1/3$ . Au bout de 2 itérations, il y a 48 côtés de longueur  $1/9$ .

Soit  $S_n$  la surface du flocon après  $n$  itérations. L'aire du triangle dessiné à gauche de la figure 1 est  $S_0 = a^2\sqrt{3}/4$ , la formule standard d'un triangle équilatéral. On prendra  $a = 1$  dans la suite. Pour avoir l'aire de la figure du milieu, il faut rajouter l'aire des 3 petits triangles équilatéraux de base  $a/3$ . On a donc  $S_1 = S_0 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

Si on généralise, on a  $S_{n+1} = S_n + 3 \times 4^n \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = S_n + \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} \frac{\sqrt{3}}{12}$ . On en déduit donc que  $S_{n+1} = S_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{4}{9}\right)}$  et donc  $S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$  dont la limite est  $S_\infty = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ .

## 2 Balançoire

- 2(a) Dans le cas d'oscillations de petites amplitudes  $x \ll 1$ , l'équation (3) peut s'écrire sous la forme

$$\ddot{x} + x + \varepsilon h(x, \dot{x}, t) = 0 \tag{11}$$

en posant

$$h(x, \dot{x}, t) = x(\gamma + \cos 2t). \tag{12}$$

- 2(b) En utilisant la substitution  $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots$ , la méthode des échelles multiples ( $t, T = \varepsilon t, \dots$ ), conduit à

$$\text{Ordre } \mathcal{O}(1) : \quad \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \tag{13}$$

$$\text{Ordre } \mathcal{O}(\varepsilon) : \quad \ddot{x}_1 + x_1 = -2\partial_{tT}x_0 - h(x_0, \partial_t x_0, t). \tag{14}$$

**2(c)** La solution à l'ordre  $O(1)$  est  $x_0(t, T) = r(T) \cos(t + \phi(T))$ .

**2(d)** Si l'on substitue la solution de l'ordre  $O(1)$ ,  $x_0(t, T) = r(T) \cos(t + \phi(T))$ , dans l'équation (14), on aboutit à

$$-2\partial_{tT}x_0 - h(x_0, \partial_t x_0, t) = 2[r' \sin(t + \phi) + r\phi' \cos(t + \phi)] - r \cos(t + \phi)(\gamma + \cos 2t) \quad (15)$$

**2(e)** On développe les  $\cos(t + \phi)$  et  $\sin(t + \phi)$ , on utilise les transformations données et on annule les termes en  $\cos t$  et  $\sin t$  : cela donne

$$2r' \cos \phi + r[(\gamma - 1/2) \sin \phi - 2\phi' \sin \phi] = 0 \quad (16)$$

$$2r' \sin \phi + r[-(\gamma + 1/2) \cos \phi + 2\phi' \cos \phi] = 0. \quad (17)$$

**2(f)** On utilise les deux équations précédentes et on fait appel à  $\cos(2\phi) = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi$  et  $\sin(2\phi) = 2 \cos \phi \sin \phi$ .

**2(g)** En utilisant le fait que  $\phi$  s'équilibre plus vite que  $r$  près de 0, regardons d'abord le comportement de  $\phi$ . Comme  $\phi' = \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{2} \cos 2\phi)$ , on peut effectuer quelques observations qualitatives sur l'évolution de  $\phi$ . Comme le domaine est défini par  $|\frac{1}{2} \cos 2\phi| < \frac{1}{2}$ , il y a trois domaines différents. Pour les valeurs de  $\gamma < -0.5$ , on aura  $\phi' < 0$ . Par conséquent,  $\phi$  atteindra des valeurs négatives infinies. Pour des valeurs de  $\gamma$  plus grandes que  $1/2$ ,  $\phi' > 0$ . Par conséquent,  $\phi$  ira vers  $+\infty$ . Finalement, pour des valeurs de  $\gamma$  entre  $\pm 1/2$ ,  $\phi$  tendra vers un point fixe dont on peut déterminer la valeur

$$0 = \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{2} \cos 2\phi^*) \quad (18)$$

$$-2\gamma = \cos 2\phi^* \quad (19)$$

$$\phi^* = \frac{1}{2} \cos^{-1}(-2\gamma). \quad (20)$$

Par conséquent, la croissance exponentielle de  $r$  n'aura lieu que dans la région  $|\gamma| < \frac{1}{2} = \gamma_c$ . Hors de cette région, la phase évolue sans arrêt. Comme le signe  $r'$  est corrélé au signe de  $\sin 2\phi$  une valeur oscillante de  $\phi$  conduira à une croissance/décroissance de  $r$ . Si l'origine est instable, les trajectoires proches doivent diverger ce qui ne pourra se produire que si  $\phi$  a une valeur fixe correspondant à  $r' > 0$ .

**2(h)** Dans la région  $|\gamma| < \gamma_c$ , le taux de croissance de l'amplitude est fixe. Le point fixe est donné par  $\cos 2\phi^* = -2\gamma$  en ce qui concerne  $\phi$ . L'équation (??) se réécrit sous la forme

$$r' = \frac{r}{4} \sin 2\phi^* = kr \quad (21)$$

en définissant le taux de croissance  $k = \frac{1}{4} \sin 2\phi^*$ . On peut exprimer  $k$  en fonction de  $\gamma$  à partir des manipulations suivantes

$$\cos^2(2\phi^*) = 4\gamma^2 = 1 - \sin^2(2\phi^*) \quad (22)$$

$$\sin^2(2\phi^*) = 1 - 4\gamma^2 \quad (23)$$

$$\sin(2\phi^*) = \sqrt{1 - 4\gamma^2} \quad (24)$$

$$k = \frac{\sqrt{1 - 4\gamma^2}}{4} \quad (25)$$

**2(i)** Dans le cas où  $\gamma \in [-1/2, 1/2]$ , l'amplitude diverge vers l'infini ce qui signifie que la balançoire oscille en augmentant son amplitude à partir d'un point à peine perturbée par rapport au point fixe. Cela signifie que pour les valeurs à l'intérieur de cet intervalle, il est possible de démarrer la balançoire sans force extérieure. Hors de cet intervalle, l'enfant peut bouger les jambes autant qu'il veut, il ne pourra pas osciller à moins qu'on le pousse hors de cette région où l'approximation des petits angles est valable.

## 3 Oscillations

### 3.1 Résonances principales

**3.1(a)** Comme les variables  $T_0, T_1, \dots$  sont considérées comme des variables indépendantes, on a

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial T_1} \quad (26)$$

$$= D_0 u + \varepsilon D_1 u \quad (27)$$

$$= D_0(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) + \varepsilon D_1(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) \quad (28)$$

et

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = (D_0 + \varepsilon D_1)^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) \quad (29)$$

$$= (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1) (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) \quad (30)$$

$$= D_0^2(u_0 + \varepsilon u_1) + 2\varepsilon D_0 D_1 u_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (31)$$

En reportant dans l'équation (7) et en identifiant, on a

$$\text{Ordre } \mathcal{O}(\varepsilon^0), \quad D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (32)$$

$$\text{Ordre } \mathcal{O}(\varepsilon^1), \quad D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - \alpha u_0^3 + k \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (33)$$

**3.1(b)** La solution générale de l'équation d'ordre  $\varepsilon^0$  est

$$u_0 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + A^*(T_1) \exp(-i\omega_0 T_0). \quad (34)$$

Si on se limite à l'ordre  $\varepsilon$ ,  $A^*$  ne dépend que de  $T_1$ .

**3.1(c)** En reportant cette expression dans (33) dans laquelle on a exprimé  $\cos(\omega T_0 + \sigma T_1)$  sous forme complexe, il vient

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 &= -2D_0 D_1 u_0 - \left[ 2i\omega_0 \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} + \mu A \right) + 3\alpha A^2 A^* \right] \exp(i\omega_0 T_0) \\ &\quad - \alpha A^3 \exp(3i\omega_0 T_0) + \frac{1}{2} k \exp(i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)) + c.c. \end{aligned} \quad (35)$$

**3.1(d)** L'équation (35) comporte dans le terme de droite un terme en  $\exp(i\omega_0 T_0)$  qui est résonant avec le terme de gauche. Pour que la méthode utilisée reste valable, il faut annuler ce terme séculaire, ce qui conduit à

$$2i\omega_0 \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} + \mu A \right) + 3\alpha A^2 A^* - \frac{1}{2} k \exp(i\sigma T_1) = 0. \quad (36)$$

Cette équation permet de déterminer l'amplitude  $A$  donc la solution  $u_0$  à l'ordre zéro.

**3.1(e)** En posant  $A = (a/2) \exp(i\beta)$ , l'équation (36) que l'on sépare en ses parties réelle et imaginaire donne alors

$$\text{Partie réelle} \quad a \frac{d\beta}{dT_1} = \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^3 - \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (37)$$

$$\text{Partie imaginaire} \quad \frac{da}{dT_1} = -\mu a + \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta), \quad (38)$$

après multiplication par  $\exp(-i\beta)/\omega_0$  pour simplifier.

Les équations (37) et (38) qui déterminent les paramètres de la solution sont formellement identiques à celles d'un système dynamique à 2 degrés de liberté, non autonome puisque le temps figure explicitement dans ces équations du mouvement.

## 3.2 Régime stationnaire forcé

**3.2(a)** En général  $a$  et  $\beta$  dépendent du temps et ceci correspond à l'existence d'un terme transitoire dans la réponse d'un oscillateur forcé. Cherchons la solution qui correspond au régime stationnaire, c'est-à-dire le régime obtenu après disparition du transitoire. Pour faire apparaître ce type de solution, il est nécessaire de transformer le système (9) et (10) en un système autonome (sans dépendance explicite du temps).

Pour cela, on pose  $\gamma = \sigma T_1 - \beta$  c'est-à-dire  $\beta = \sigma T_1 - \gamma$ , de sorte que les équations (9) et (10) peuvent se réécrire sous la forme

$$a \frac{d\gamma}{dT_1} = a\sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^3 + \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \cos \gamma \quad (39)$$

$$\frac{da}{dT_1} = -\mu a + \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \sin \gamma. \quad (40)$$

[3.2(b)] Déterminer les points fixes du système précédent et exprimer  $u$  dans le régime stationnaire.

La solution s'écrit

$$u = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + c.c. + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (41)$$

$$= \frac{a^*}{2} \exp(i\omega_0 T_0 + i\beta^*) + c.c. + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (42)$$

$$= a^* \cos(\omega_0 T_0 + \beta^*) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (43)$$

$$= a^* \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1 - \gamma^*) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (44)$$

$$= a^* \cos(\omega_0 t + \varepsilon \sigma t - \gamma) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (45)$$

$$= a^* \cos(\Omega t - \gamma) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (46)$$

qui correspond bien à la solution forcée à la fréquence  $\Omega$ .

**3.2(b)** L'étude de la résonance est donc ramenée à l'étude du système dynamique autonome (39) et (40) dont le régime stationnaire forcé est donné par  $\frac{d\gamma}{dT_1} = 0$ ,  $\frac{da}{dT_1} = 0$ . En notant les solutions stationnaires  $a^*$  et  $\gamma^*$ , on a

$$a^* \sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^{*3} = -\frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \cos \gamma^* \quad (47)$$

$$\mu a^* = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0} \sin \gamma^*. \quad (48)$$

On élimine  $\gamma$  en sommant les carrés de ces deux relations. On obtient

$$\left[ \mu^2 + \left( \sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^{*2} \right)^2 \right] a^{*2} = \frac{k^2}{4\omega_0^2} \quad (49)$$

qui donne l'amplitude de l'oscillation forcée. La représentation de  $a^*$  en fonction de  $\sigma$  donne la courbe de la réponse en fréquence de l'oscillateur anharmonique au voisinage de la résonance principale. On obtient

$$\sigma = \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^{*2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4\omega_0^2 a^{*2}} - \mu^2}. \quad (50)$$

En faisant le rapport des deux équations (47) et (48), on obtient la phase  $\gamma^*$  sous la forme

$$\tan \gamma^* = \frac{\mu}{\sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^{*2}}. \quad (51)$$

**3.2(c)** Dans le cas de l'oscillateur linéaire ( $\alpha = 0$ ), on retrouve

$$a^{*2} = \frac{k^2}{4\omega_0^2 (\mu^2 + \sigma^2)} \quad (52)$$

et  $\tan \gamma^* = \mu/\sigma$ , les expressions habituelles obtenues pour l'étude de la résonance avec amortissement (cf. Landau).

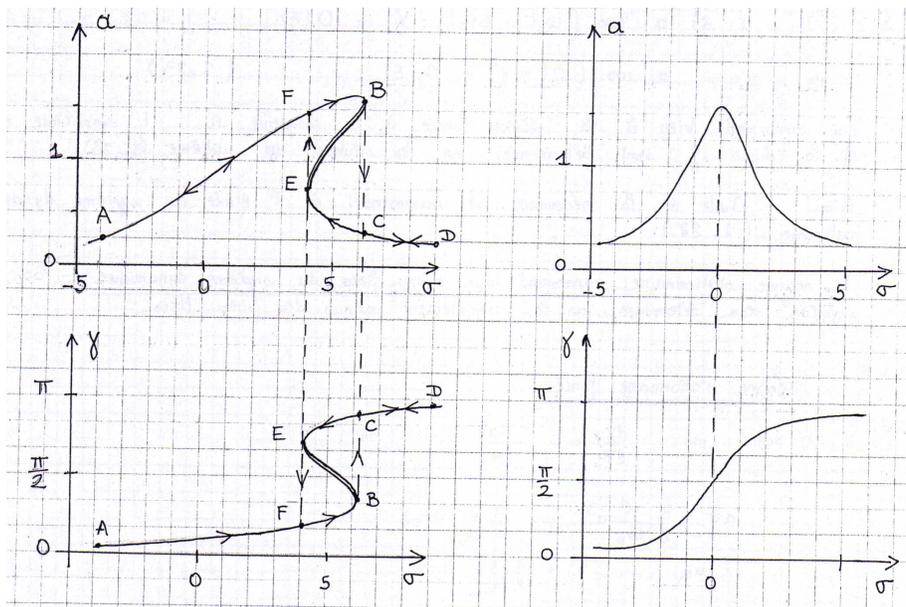


FIGURE 2 – Représentations de l'amplitude et de la phase en fonction de la fréquence de forçage  $\sigma$ . Les figures de gauche correspondent au cas général, alors que les figures de droite correspondent au cas linéaire.

**3.2(d)** On constate sur la figure 2 que la nonlinéarité tord la courbe de résonance au point que pour certaines valeurs de  $\sigma$ , il existe plusieurs solutions possibles pour l'amplitude. Ceci à des conséquences physiques importantes puisque cela entraîne une mémoire des conditions initiales (phénomène d'hystérésis) et des sauts brutaux quand  $\sigma$  varie.

Les flèches portées sur la figure 2 indiquent le comportement du système pour une expérience réalisée à amplitude d'excitation constante ( $k$  constant) dans le sens des fréquences croissantes (trajet AFBCD) ou dans le sens des fréquences décroissantes (trajet DCEFA).

On obtient un phénomène de saut identique quand on fait varier  $k$  l'amplitude d'excitation à  $\sigma$  constant, c'est-à-dire à fréquence d'excitation fixe : c'est ce qui est représenté sur la figure 3 à gauche. Au delà d'une certaine amplitude d'excitation, le système saute brusquement à une réponse de grande amplitude. L'existence des sauts est liée à l'instabilité de la position EB de la courbe de réponse.

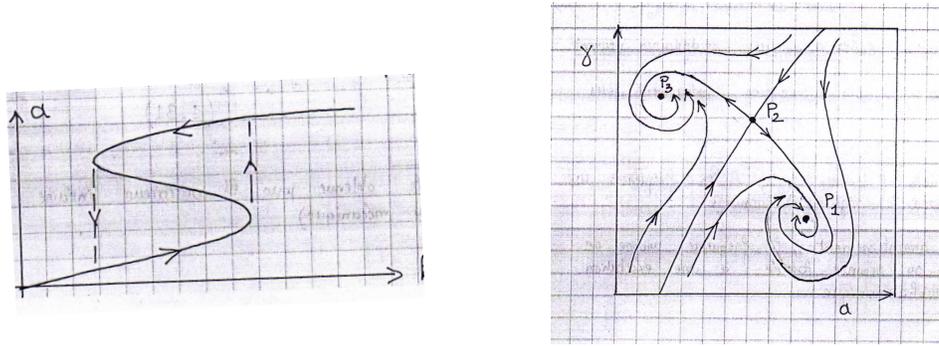


FIGURE 3 – À gauche, représentations de l'amplitude en fonction de l'amplitude de forçage  $k$  à fréquence d'excitation  $\sigma$  fixe. À droite, portrait de phase.

**3.2(e)** Comme nous avons ramené l'étude de la résonance à celle du système dynamique décrit par les équations (39) et (40) dont les points fixes  $a^*$  et  $\gamma^*$  correspondent aux régimes stationnaires, la stabilité peut être étudiée en considérant de petites perturbations au tour du point fixe. Considérons des solutions dont l'amplitude est  $a = a^* + a_1$  et la phase est  $\gamma = \gamma^* + \gamma_1$  où correspondent à un régime stationnaire. On linéarise les équations (39) et (40) par rapport à  $a_1$  et  $\gamma_1$ . On obtient alors une équation de la forme

$$\frac{d\gamma_1}{dT_1} = A\gamma_1 + Ba_1 \tag{53}$$

$$\frac{da_1}{dT_1} = C\gamma_1 + Da_1. \tag{54}$$

La solution est instable quand le déterminant  $|(A - \omega)(D - \omega) - BC|$  a des racines dont la partie réelles est positive. Le calcul montrera que la zone BE est instable tandis que les autres parties de la courbe de réponse en fréquence correspondent à des régimes stationnaires stables.

Au lieu de se contenter d'une analyse linéaire, on peut aussi construire le plan de phase pour le système  $(a, \gamma)$ . Il a l'allure représentée sur la figure 3 à droite où l'on voit les trois points fixes.  $P_1$  correspond à la branche stable des hautes amplitudes.  $P_3$  à la branche stable des faibles amplitudes.  $P_2$  est un point fixe instable dans une direction. il correspond à la branche instable BE.

### 3.3 Résonances secondaires

**3.3(a)** Lorsque la fréquence d'excitation  $\Omega$  s'écarte notablement de  $\omega_0$ , la réponse à une excitation d'ordre  $\varepsilon$  est très faible, d'ordre au moins  $\varepsilon^2$ . Pour avoir des réponses d'ordre  $\varepsilon$ , on doit donc considérer des excitations d'ordre 0. Quand on applique la méthode des échelles multiples, le terme d'excitation apparaît alors dans l'équation d'ordre zéro.

**3.3(b)** On obtient

$$\text{Ordre } \mathcal{O}(\varepsilon^0), \quad D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = K \cos(\omega_0 T_0) \quad (55)$$

$$\text{Ordre } \mathcal{O}(\varepsilon^1), \quad D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - \alpha u_0^3 \quad (56)$$

**3.3(c)** La solution générale de la première équation comporte désormais deux termes. La solution générale de l'équation sans second membre (comme dans le cas précédent) et la solution particulière de l'équation avec second membre. La solution générale est par conséquent

$$u_0 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + B \exp(i\omega_0 T_0) + c.c. \quad (57)$$

où  $B = K/(2(\omega_0^2 - \Omega^2))$ .

**3.3(d)** Comme précédemment, on reporte dans l'équation d'ordre  $\varepsilon^1$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = & - \left[ 2i\omega_0 \left( \frac{dA}{dT_1} + \mu A \right) + 6\alpha AB^2 + 3\alpha A^2 A^* \right] \exp(i\omega_0 T_0) \\ & - \alpha \left[ A^3 \exp(3i\omega_0 T_0) + B^3 \exp(3i\Omega T_0) \right. \\ & \quad \left. + 3A^2 B \exp(i(2\omega_0 + \Omega)T_0) + 3A^{*2} B \exp(i(-2\omega_0 + \Omega)T_0) \right. \\ & \quad \left. + 3AB^2 \exp(i(\omega_0 + 2\Omega)T_0) + 3A^* B^2 \exp(i(\omega_0 - 2\Omega)T_0) \right] \\ & - B [2i\mu\Omega + 3\alpha B^2 + 6\alpha AA^*] \exp(i\Omega T_0) + c.c.. \end{aligned} \quad (58)$$

Ainsi en présence de la non linéarité ( $\alpha \neq 0$ ) apparaissent des termes du type  $\exp(i(m\omega_0 + n\Omega))$  avec  $|m| + |n| = 3$  (condition qui vient du terme en  $u_0^3$ ). Si l'on a  $m\omega_0 + n\Omega \simeq \omega_0$  des résonances secondaires peuvent apparaître. En dehors des cas où  $\Omega \simeq \omega_0$  ou bien  $\Omega \simeq 0$ , ces résonances apparaissent pour  $\Omega = \omega_0/3$  ou  $\Omega = 3\omega_0$ .

Pour ces résonances, compte tenu de la forme de  $u_0$ , les fréquences  $\omega_0$  et  $\Omega$  persistent toutes les deux dans le régime stationnaire. Ainsi, malgré la présence de l'amortissement, la fréquence propre de l'oscillateur peut persister dans sa réponse forcée à une excitation extérieure superharmonique ou subharmonique. Les réponses ont l'allure présentée dans la figure 4. On pourrait étudier les résonances secondaires comme la résonance principale en posant  $3\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma$  ou bien  $\Omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma$ .

Nous nous sommes limités ici au cas de l'approximation d'ordre 1. On peut aisément comprendre qu'à des ordres plus élevés d'autres résonances subharmoniques peuvent apparaître. Elles joueront un rôle d'autant plus grand que l'amplitude de l'excitation sera grand mais on sortira alors du domaine de validité des méthodes approchées que nous utilisons ici. La réponse de l'oscillateur non linéaire devient très compliqué jusqu'à ce qu'apparaissent les phénomènes chaotiques.

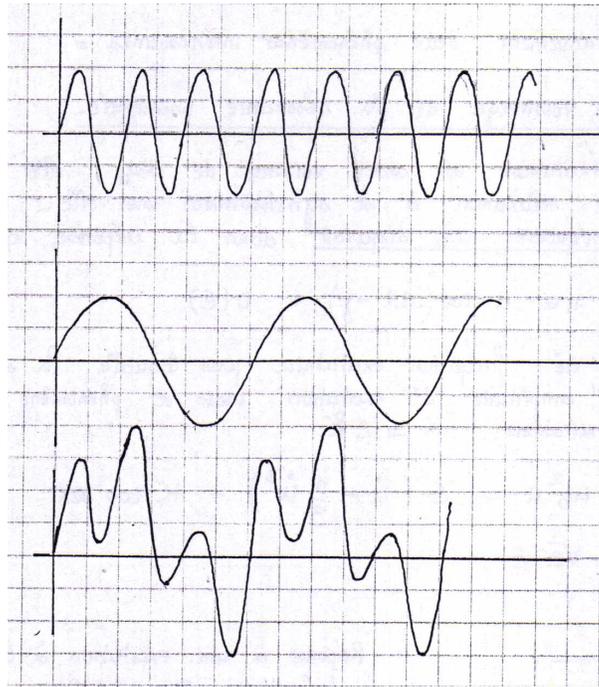


FIGURE 4 – En haut, solution correspondant à une oscillation libre (sans amortissement). Au milieu, excitation à la fréquence  $\Omega = \omega_0/3$  En bas, réponse de l'oscillateur non linéaire amorti qui comporte une contribution à la fréquence  $\omega_0$  et une autre à la fréquence  $\Omega$ . En raison de la composante à  $\Omega = 3\omega_0$ , on parle de multiplication de fréquence.