

# Examen du cours “Physique non linéaire”

Lundi 7 novembre 2005

## 1 Questions de cours

- 1(a) Donner l'équation de sine-Gordon.
- 1(b) Décrire plusieurs situations physiques où l'on peut trouver cette équation.
- 1(c) Déterminer puis tracer la relation de dispersion linéaire.
- 1(d) Décrire une situation expérimentale dans laquelle apparaît l'instabilité de Kelvin–Helmholtz.
- 1(e) Donner une définition simple d'instabilité convective et d'instabilité absolue. On pourra s'aider d'un dessin.

## 2 Exercice : Instabilité d'Eckhaus

Lorsque l'on considère la stabilité des rouleaux dans la convection de Rayleigh–Bénard, on aboutit à l'équation d'amplitude

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \mu A + \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} - |A|^2 A. \quad (1)$$

- 2(a) À quelle condition la solution stationnaire  $Q \exp(iqX)$  est-elle solution de cette équation ?
- 2(b) Ces solutions, que l'on appelle modes rouleaux, correspondent aux modes instables au-dessus du seuil de l'instabilité. Tracer dans le plan  $(q, \mu)$  la zone instable et la zone stable.
- 2(c) Étudier la stabilité de ces motifs.
- 2(d) Montrer que dans la limite des grandes longueurs d'ondes, il existe deux types de modes : des modes d'amplitudes qui sont amortis et des modes de phases qui ne le sont pas toujours.
- 2(e) À quelle condition les modes de phases induisent-ils une instabilité qui sera donc une instabilité secondaire ?
- 2(f) Tracer le diagramme de l'instabilité d'Eckhaus distinguant dans le plan  $(q, \mu)$  la zone où les rouleaux sont stables et celle où ils sont instables.

Nous allons nous intéresser à la propagation d'ondes dans les milieux granulaires. C'est évidemment un domaine très vaste, tant au niveau industriel, mécanique que géophysique. Les ondes acoustiques sont par exemple utilisées pour réaliser des tests non-destructifs. Elles constituent parfois le seul moyen expérimental pour accéder à certaines informations géophysiques.

### 3 Introduction : Contact de Hertz

Considérons une sphère de rayon  $R$ , de masse  $m$  et de vitesse  $v_{imp}$  rentrant en collision avec un plan immobile, semi-infini et supposé sans frottement. Dès l'instant où la sphère rencontre le plan, en un point de contact  $O$ , des forces de compression  $F$  apparaissent et donnent alors naissance à des déformations des deux corps au voisinage du point  $O$ . On note  $\delta$  la distance d'interpénétration entre ces deux corps, due aux déformations élastiques (cf. Figure 1(b) pour le cas de deux sphères).

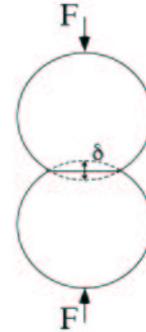


FIG. 1: *Durant les vacances de Noël 1880, à l'âge de 23 ans, Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) établit la théorie statique du contact élastique entre deux corps solides. Lors de la compression de deux billes sous l'action d'une force  $F$ , le rapprochement des centres des billes par rapport à l'état non comprimé correspond à la distance d'interpénétration, notée  $\delta$ .*

- 3(a) Donner l'expression de la vitesse de la sphère au cours de la collision en fonction de  $\delta$ . On notera  $t$  le temps à partir de l'impact.
- 3(b) La force de contact  $F$  entre la sphère et le plan est  $F = k \delta^{3/2}$ , où  $k$  dépend uniquement du rayon de la sphère et des coefficients élastiques (module d'Young et coefficient de Poisson) du matériau. En supposant le contact élastique, écrire la conservation de l'énergie.
- 3(c) Pour quelle valeur de la vitesse, l'interpénétration sera-t-elle maximale? En déduire l'expression de la durée de l'impact  $\tau$ . On notera  $I = \int_0^1 dx / \sqrt{1 - x^{5/2}} \simeq 1.5$ .
- 3(d) Déterminer la durée de la collision et l'interpénétration maximale pour une sphère en acier inoxydable de rayon  $R = 2.5$  cm tombant d'une hauteur de 1m (puis de 1mm) sur un plan de même nature. On donne  $k = 2,46 \times 10^{10}$  N/m<sup>3/2</sup> et  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>.

### 4 Mise en place du problème et régime linéaire

Considérons une chaîne horizontale de  $N$  billes identiques, de rayon  $R$ , en contact les unes avec les autres et soumises à une force statique de compression  $F_0$ . Ce dispositif est représenté schématiquement sur la Figure 2. On ne tiendra pas compte d'un possible effet de rotation des billes ou de flambement de la chaîne de billes.

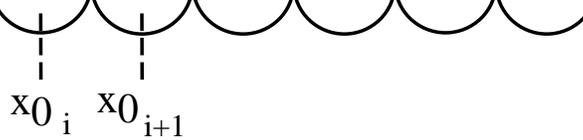


FIG. 2: Schéma du dispositif de compression statique : le centre de chaque bille  $i$  se trouve dans sa position d'équilibre sous compression  $x_{0i}$ .

La loi de Hertz est un résultat exact de l'élastostatique linéaire et la relation non linéaire est un effet purement géométrique. On va considérer les billes comme constituées d'une partie déformable, agissant comme un ressort non linéaire dans son voisinage, et d'une partie indéformable dans pratiquement tout le corps de la bille.

- 4(a) Établir l'expression de la force exercée par la bille  $i + 1$  sur la bille  $i$ , en faisant intervenir  $\delta_0$  l'interpénétration initiale due à la force statique  $F_0$  et  $x_i$  le déplacement du centre de la  $i$ -ème bille par rapport à sa position d'équilibre sous compression  $x_{0i}$ .
- 4(b) En ne tenant pas compte d'éventuels effets dissipatifs, donner le système d'équations non linéaires couplées décrivant la dynamique de la chaîne de billes en termes des variables  $x_i$ . On ne considérera pas les deux billes des extrémités.
- 4(c) On se place tout d'abord dans le cas de déplacements relatifs dynamiques  $|x_i - x_{i+1}|$  très inférieurs au déplacement statique  $\delta_0$ . En utilisant un développement limité à l'ordre le plus bas, montrer que l'on obtient l'équation habituelle d'une chaîne de masses ponctuelles identiques reliées par des ressorts linéaires de raideur  $\kappa$  que l'on déterminera.
- 4(d) En utilisant la relation entre  $F_0$ ,  $\delta_0$  et  $k$ , montrer que  $\kappa$  est reliée simplement à la dérivée de la force statique par rapport à l'interpénétration.
- 4(e) Déterminer et tracer la relation de dispersion de cette équation.
- 4(f) Expliquer pourquoi les fréquences supérieures à une fréquence que l'on déterminera ne se propagent pas.
- 4(g) Déterminer  $c_s$  la vitesse de propagation des ondes de grande longueur d'onde. Pourquoi parle-t-on de "vide sonique" dans le cas  $F_0 = 0$  ?
- 4(h) Proposer une méthode expérimentale pour mesurer la fréquence de coupure. Expliquer pourquoi il faut faire attention à ce que la chaîne soit suffisamment longue.
- 4(i) Proposer une méthode expérimentale pour mesurer la vitesse du son.

## 5 Approximation fortement non linéaire : les ondes solitaires

Il a été cependant montré que des ondes fortement non linéaires peuvent se propager dans le système, même lorsque les billes sont en contact, mais ne sont soumises à aucune force statique. Nous allons essayer de comprendre ce fait expérimental.

- 5(a) La limite fortement non linéaire des équations déterminées à la question 4(b) correspond au cas où le déplacement relatif dynamique est très supérieur au déplacement statique  $\delta_0$ . Écrire les nouvelles équations dans ce régime.

d'une approximation des milieux continus. Écrire le développement de Taylor pour les variables  $x_{i\pm 1}(t)$  autour de la position  $x(\ell, t)$ ,  $\ell$  représentant l'abscisse le long de la chaîne.

- 5(c) Montrer ensuite que l'on aboutit à l'équation

$$x_{tt} = C^2 \left[ \frac{3}{2} x_{\ell\ell} \sqrt{-x_\ell} + \alpha x_{\ell\ell\ell} \sqrt{-x_\ell} - \alpha \frac{x_{\ell\ell} x_{\ell\ell\ell}}{\sqrt{-x_\ell}} - \beta \frac{x_{\ell\ell}^3}{(-x_\ell)^{3/2}} + \dots \right]. \quad (2)$$

On explicitera notamment  $C^2$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction des différents paramètres.  $\Lambda$  étant la largeur caractéristique des perturbations comparer les différents termes du membre de droite entre eux.

- 5(d) On cherche des solutions se propageant sans se déformer à la vitesse  $v$ . Déterminer l'équation vérifiée par la fonction  $\psi = -x_\ell$ .
- 5(e) En introduisant le changement de variable  $\psi = y^{4/5}(v/C)^4$  et  $\ell - vt = \eta\sqrt{2/5}R$ , on admettra que l'on obtient l'équation

$$y_{\eta\eta} = y^{3/5} - y - \frac{4D}{5}y^{-1/5}, \quad (3)$$

où  $D$  est une constante d'intégration qui est fixée par les valeurs du champ  $\psi(\xi)$  et de sa dérivée pour  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Montrer que l'on peut résoudre cette équation de manière formelle en se ramenant au mouvement d'une particule dans un potentiel  $W(y)$ .

- 5(f) Sans calcul mais à l'aide de dessins indiquer les différentes solutions que l'on peut envisager.

Références pour en savoir plus :

- Éric Falcon, *Comportements dynamiques associés au contact de Hertz : processus collectifs de collision et propagation d'ondes solitaires dans les milieux granulaires*, Thèse ENS Lyon (1997).
- C. Coste, E. Falcon, S. Fauve, *Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact*, Physical Review E **56**, 6104–6117 (1997).
- V. F. Nesterenko, *Propagation of nonlinear compression pulses in granular media*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics **5**, 733–743 (1983).

## 1 Questions de cours

- 1(a) L'équation de sine-Gordon s'écrit

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (4)$$

- 1(b) Chaînes de pendules, Jonctions Josephson, Chaînes magnétiques, Dislocations,...
- 1(c) La relation de dispersion est  $\omega^2 = \omega_0^2 + c_0^2 q^2$ .

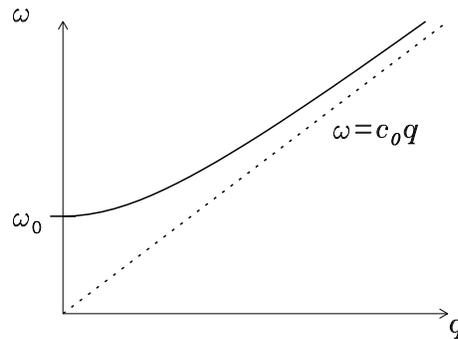


FIG. 3: Relation de dispersion du modèle SG.

- 1(d) L'instabilité de Kelvin–Helmholtz s'observe dans les couches de mélange, c'est-à-dire les systèmes où deux fluides de vitesse différentes sont en contact (cf. TD4).
- 1(e) Quand le milieu est stable, un paquet d'ondes est atténué au cours du temps (cf. Fig. 4(a)). Dans un milieu instable, la réponse est amplifiée et il existe deux situations possibles. L'instabilité est dite convective si le paquet d'onde est transportée vers l'aval et finit par quitter le domaine (cf. Fig. 4(b)). L'instabilité est dite absolue si les perturbations se développent sur place et s'étalent vers l'amont et vers l'aval de sorte à envahir tout le domaine (cf. Fig. 4(c)).

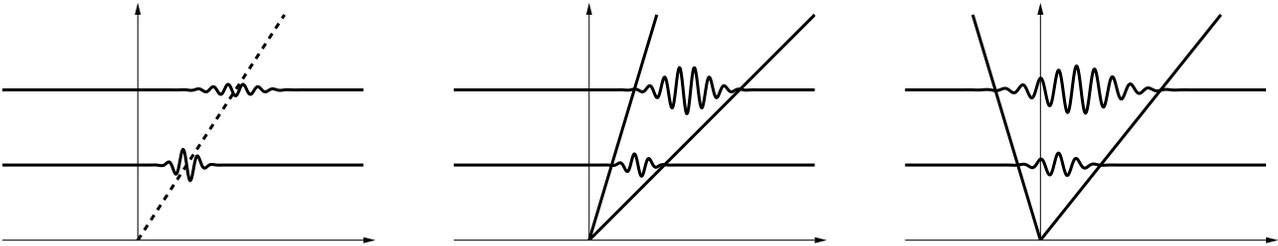


FIG. 4: Paquet d'ondes stable (a). Instabilité convective (b) et absolue (c).

## 2. Exercice : Instabilité d'Eckhaus

- 2(a)  $Q^2 = \mu - q^2$ .
- 2(b) Pour que cette solution existe, il faut  $Q^2 > 0$ , et par conséquent  $\mu > q^2$ . La zone instable se situe donc au dessus de la parabole  $\mu = q^2$  (cf. Fig. 5).

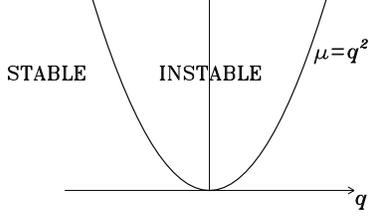


FIG. 5: *Diagramme de stabilité.*

- 2(c) On étudie la stabilité des ces motifs en perturbant amplitude et phase de la manière suivante

$$A = [Q + r(X, T)] \exp i [qX + \phi(X, T)]. \quad (5)$$

En séparant partie réelle et imaginaire, on obtient

$$\frac{\partial r}{\partial T} = \mu(Q + r) + \frac{\partial^2 r}{\partial X^2} - (Q + r) \left( q + \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 - (Q + r)^3 \quad (6)$$

$$(Q + r) \frac{\partial \phi}{\partial T} = 2 \frac{\partial r}{\partial X} \left( q + \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + (Q + r) \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}. \quad (7)$$

En linéarisant en  $r$  et  $\phi$ , on obtient

$$\frac{\partial r}{\partial T} = \mu(Q + r) + \frac{\partial^2 r}{\partial X^2} - (Q + r)q^2 - Q2q \frac{\partial \phi}{\partial X} - Q^3 - 3Q^2r \quad (8)$$

$$Q \frac{\partial \phi}{\partial T} = 2q \frac{\partial r}{\partial X} + Q \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}. \quad (9)$$

En utilisant  $Q^2 = \mu - q^2$ , on aboutit à

$$\frac{\partial r}{\partial T} = -2Q^2r + \frac{\partial^2 r}{\partial X^2} - 2qQ \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} = 2 \frac{q}{Q} \frac{\partial r}{\partial X} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}. \quad (11)$$

Ces deux équations admettent des solutions de la forme  $r = r_0 \exp(i(\eta T + KX)) + cc$  et  $\phi = \phi_0 \exp(i(\eta T + KX)) + cc$ . En effet, en reportant ces solutions dans les 2 équations, on note que le système est bien satisfait pourvu que l'on impose des relations liant  $r_0$  et  $\phi_0$ .

$$(i\eta + 2Q^2 + K^2)r_0 + 2qQiK\phi_0 = 0 \quad (12)$$

$$-2 \frac{q}{Q} iK r_0 + (i\eta + K^2)\phi_0 = 0. \quad (13)$$

Ce système homogène n'aura de solution non nulle pour  $r_0$  et  $\phi_0$  qu'à la condition que son déterminant soit nul, i.e.

$$(i\eta + 2Q^2 + K^2)(i\eta + K^2) + 2qQiK2 \frac{q}{Q} iK = 0, \quad (14)$$

qui donne la relation de dispersion de la perturbation

$$\eta^2 - 2i\eta(Q^2 + K^2) - (2Q^2 + K^2)K^2 + 4q^2K^2 = 0, \quad (15)$$

qui a pour solution

$$\eta = i(Q^2 + K^2) \pm \sqrt{-(Q^2 + K^2)^2 + (2Q^2 + K^2)K^2 - 4q^2K^2} \quad (16)$$

$$= i(Q^2 + K^2) \pm \sqrt{-Q^4 - 4q^2K^2} \quad (17)$$

$$= i \left[ Q^2 + K^2 \pm \sqrt{Q^4 + 4q^2K^2} \right], \quad (18)$$

$$\eta = i \left[ Q^2 + K^2 + \sqrt{Q^4 + 4q^2 K^2} \right] = i2Q^2 + O(K^2), \quad (19)$$

qui sera toujours amortie. Ce sont les modes d'amplitude.

La solution avec le signe moins s'écrit quant à elle

$$\eta = i \left[ Q^2 + K^2 - \sqrt{Q^4 + 4q^2 K^2} \right] = iK^2 \left( 1 - \frac{2q^2}{Q^2} \right) + O(K^4), \quad (20)$$

qui ne sera pas toujours amortie. Ce sont les modes de phase.

- 2(e) Les modes de phase seront instables si  $(1 - 2q^2/Q^2) < 0 \Rightarrow \mu - 3q^2 < 0$ .
- 2(f) Les motifs générant la première instabilité apparaissent à l'intérieur de la parabole extérieure  $\mu = q^2$ , mais ce motif n'est stable qu'à l'intérieur de la parabole intérieure  $\mu = 3q^2$ .

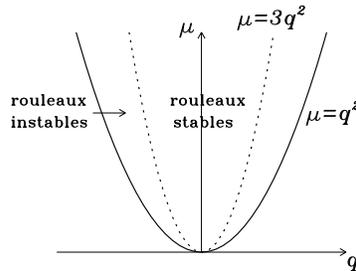


FIG. 6: *Diagramme de l'instabilité d'Eckhaus.*

### 3 Introduction : Contact de Hertz

- 3(a)  $v(t) = d\delta/dt$
- 3(b) L'énergie potentielle de déformation s'écrit à une constante près  $E_{pot} = \frac{2}{5}k\delta^{5/2}$ . En vertu de la conservation de l'énergie lors d'une collision élastique, il vient

$$\frac{m}{2} \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 + \frac{2k}{5} \delta^{5/2} = \frac{m}{2} v_{imp}^2. \quad (21)$$

- 3(c) Lorsque la vitesse de la sphère s'annule :  $d\delta/dt = 0$ . L'interpénétration maximale est alors

$$\delta_{max} = \left( \frac{5m}{4k} \right)^{2/5} v_{imp}^{4/5}. \quad (22)$$

Puisque le contact est parfaitement élastique, la déformation est parfaitement réversible. Ainsi, le temps que met l'interpénétration pour passer de sa valeur initiale  $\delta = 0$  à  $\delta_{max}$ , puis pour revenir à sa valeur initiale, correspond au temps de collision  $\tau$  qui s'écrit en utilisant la conservation de l'énergie

$$\tau = 2 \int_0^{\delta_{max}} \frac{d\delta}{\sqrt{v_{imp}^2 - \frac{4k}{5m} \delta^{5/2}}} = 2I \left( \frac{5m}{4k} \right)^{2/5} v_{imp}^{-1/5}. \quad (23)$$

$$\delta_{max} = \left( \frac{5\rho 4\pi R^3/3}{4k} \right)^{2/5} (2gh)^{2/5} \quad (24)$$

et

$$\tau = 2I \left( \frac{5\rho 4\pi R^3/3}{4k} \right)^{2/5} (2gh)^{-1/10}. \quad (25)$$

Pour  $h=1\text{m}$ , on a  $\tau = 2 * 1.5 * (5 * 7850 * 4/3 * \pi * 0.025^3/4/2.46.10^{-10})^{2/5} * (2 * 9.81 * 1)^{-0.1} = 1.30.10^{-4}\text{s} = 130\mu\text{s}$  et  $\delta_{max} = 12\mu\text{m}$ .

Pour  $h=1\text{mm}$ , on a  $\tau = 2 * 1.5 * (5 * 7850 * 4/3 * \pi * 0.025^3/4/2.46.10^{-10})^{2/5} * (2 * 9.81 * 10^{-3})^{-0.1} = 2.59.10^{-4}\text{s} \simeq 250\mu\text{s}$  et  $\delta_{max} = 190\mu\text{m} \simeq 0.2\text{mm}$ .

#### 4. Mise en place du problème et régime linéaire

– 4(a)  $F_i = k(\delta_0 + x_i - x_{i+1})^{3/2}$  si  $x_i - x_{i+1} > -\delta_0$  et  $F_i = 0$  sinon.

– 4(b)

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{k}{m} [(\delta_0 + x_{i-1} - x_i)^{3/2} - (\delta_0 + x_i - x_{i+1})^{3/2}] \quad (26)$$

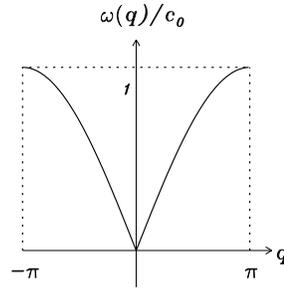
– 4(c) Au premier ordre, on a  $(1 + \frac{x_{i-1} - x_i}{\delta_0})^{3/2} \simeq 1 + \frac{3}{2} \frac{x_{i-1} - x_i}{\delta_0}$  Les équations du mouvement peuvent donc se réécrire sous la forme

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\kappa}{m} (x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) \quad (27)$$

où  $\kappa = 3k\sqrt{\delta_0}/2$ . C'est donc l'équation habituelle d'une chaîne de masses ponctuelles identiques reliées par des ressorts linéaires de raideur  $\kappa$ .

– 4(d) Soumises à la force statique normale  $F_0$ , la distance d'approche  $\delta_0$  des deux centres de deux billes consécutives est  $F_0 = k\delta_0^{3/2} \Rightarrow \delta_0 = (F_0/k)^{2/3}$ . On a donc  $\kappa = 3k\sqrt{\delta_0}/2 = \partial F_0/\partial \delta_0$

– 4(e) En cherchant les solutions sous la forme,  $x_i = A e^{j(iq - \omega t)} + c.c.$ , on obtient la relation de



dispersion habituelle  $\omega = 2\sqrt{\kappa/m} |\sin(q/2)|$ .

– 4(f) La fréquence de coupure  $f_c$  du réseau au delà de laquelle une onde de fréquence  $f > f_c$  ne se propage plus est  $f_c = \frac{1}{2\pi} 2\sqrt{\kappa/m} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3k\sqrt{\delta_0}}{2m}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2m}} k^{1/3} F_0^{1/6}$

– 4(g)  $c_s = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\omega}{q} = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2m}} k^{1/3} F_0^{1/6}$ . La vitesse du son et la fréquence de coupure dépendent donc toutes les deux de la force de compression comme  $F_0^{1/6}$ . Pour  $F_0 = 0$ , la vitesse du son s'annule et, par conséquent, les ondes acoustiques linéaires ne se propagent plus dans le système. On parle de vide "sonique".

arrive dans un milieu où elle ne peut se propager, elle sera absorbée sur une distance finie qui est la longueur de pénétration. Si cette longueur est de l'ordre de grandeur de la longueur de la chaîne, la fréquence de coupure va être surestimée.

- 4(i) Les mesures de vitesses ont été effectuées par la méthode dite de “temps de vol”. Un signal similaire au train d’onde représenté sur la figure 7(a) est envoyé par un générateur de fonction à la céramique piézoélectrique. La figure 7(b) montre que les résultats sont excellents.

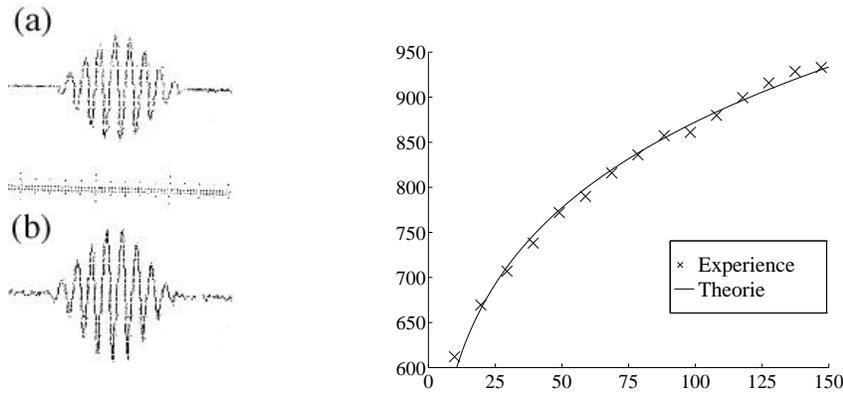


FIG. 7: (a) Exemple de profil de train d’onde envoyé à la céramique piézoélectrique (et la réponse de la céramique (b)) pour les mesures de vitesse du son dans la chaîne. (c) Évolution de la vitesse du son  $c_s$  en fonction de la force statique  $F_0$  appliquée dans le cas d’un réseau de billes d’acier.

## 5. Approximation fortement non linéaire : les ondes solitaires

- 5(a) En négligeant  $\delta_0$  dans les équations déterminées à la question 4(b), on a

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{k}{m} [(x_{i-1} - x_i)^{3/2} - (x_i - x_{i+1})^{3/2}] \quad (28)$$

- 5(b) Le développement demandé est

$$x_{i\pm 1}(t) = x(\ell \pm 2R, t) = x(\ell, t) \pm 2R \frac{\partial x}{\partial \ell} + 2R^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \ell^2} \pm \frac{4R^3}{3} \frac{\partial^3 x}{\partial \ell^3} + \frac{2R^4}{3} \frac{\partial^4 x}{\partial \ell^4} + \dots$$

- 5(c) En l’introduisant dans l’équation du mouvement, on obtient donc

$$\begin{aligned} x_{tt} &= \frac{k}{m} \left[ \left( -2Rx_\ell + 2R^2x_{\ell\ell} - \frac{4R^3}{3}x_{\ell\ell\ell} + \frac{2R^4}{3}x_{\ell\ell\ell\ell} \right)^{3/2} - \left( -2Rx_\ell - 2R^2x_{\ell\ell} - \frac{4R^3}{3}x_{\ell\ell\ell} - \frac{2R^4}{3}x_{\ell\ell\ell\ell} \right)^{3/2} \right] \quad (29) \\ &= \frac{k}{m} (-2Rx_\ell)^{3/2} \left[ \left( 1 - R \frac{x_{\ell\ell}}{x_\ell} + \frac{2R^2}{3} \frac{x_{\ell\ell\ell}}{x_\ell} - \frac{R^3}{3} \frac{x_{\ell\ell\ell\ell}}{x_\ell} \right)^{3/2} - \left( 1 + R \frac{x_{\ell\ell}}{x_\ell} + \frac{2R^2}{3} \frac{x_{\ell\ell\ell}}{x_\ell} + \frac{R^3}{3} \frac{x_{\ell\ell\ell\ell}}{x_\ell} \right)^{3/2} \right] \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{tt} &= \frac{k}{m}(-2Rx_\ell)^{3/2} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( -R\frac{x_{\ell\ell}}{x_\ell} + \frac{2R^2}{3}\frac{x_{\ell\ell\ell}}{x_\ell} - \frac{R^3}{3}\frac{x_{\ell\ell\ell\ell}}{x_\ell} \right) + \frac{3}{8} \left( -R\frac{x_{\ell\ell}}{x_\ell} + \frac{2R^2}{3}\frac{x_{\ell\ell\ell}}{x_\ell} - \frac{R^3}{3}\frac{x_{\ell\ell\ell\ell}}{x_\ell} \right)^2 \right. \\
&\quad - \frac{1}{16} \left( -R\frac{x_{\ell\ell}}{x_\ell} + \frac{2R^2}{3}\frac{x_{\ell\ell\ell}}{x_\ell} - \frac{R^3}{3}\frac{x_{\ell\ell\ell\ell}}{x_\ell} \right)^3 - 1 - \frac{3}{2} \left( R\frac{x_{\ell\ell}}{x_\ell} + \frac{2R^2}{3}\frac{x_{\ell\ell\ell}}{x_\ell} + \frac{R^3}{3}\frac{x_{\ell\ell\ell\ell}}{x_\ell} \right) \\
&\quad \left. - \frac{3}{8} \left( R\frac{x_{\ell\ell}}{x_\ell} + \frac{2R^2}{3}\frac{x_{\ell\ell\ell}}{x_\ell} + \frac{R^3}{3}\frac{x_{\ell\ell\ell\ell}}{x_\ell} \right)^2 + \frac{1}{16} \left( R\frac{x_{\ell\ell}}{x_\ell} + \frac{2R^2}{3}\frac{x_{\ell\ell\ell}}{x_\ell} + \frac{R^3}{3}\frac{x_{\ell\ell\ell\ell}}{x_\ell} \right)^3 \right] \quad (31)
\end{aligned}$$

$$= \frac{k}{m}(-2Rx_\ell)^{3/2} \left[ 3 \left( -R\frac{x_{\ell\ell}}{x_\ell} - \frac{R^3}{3}\frac{x_{\ell\ell\ell\ell}}{x_\ell} \right) - R^3\frac{x_{\ell\ell}x_{\ell\ell\ell}}{x_\ell^2} + \frac{1}{8} \left( R\frac{x_{\ell\ell}}{x_\ell} \right)^3 + \dots \right] \quad (32)$$

$$= \frac{k}{m}(2R)^{3/2} \left[ 3Rx_{\ell\ell}\sqrt{-x_\ell} + R^3x_{\ell\ell\ell\ell}\sqrt{-x_\ell} - R^3\frac{x_{\ell\ell}x_{\ell\ell\ell}}{\sqrt{-x_\ell}} - \frac{R^3}{8}\frac{x_{\ell\ell}^3}{(-x_\ell)^{3/2}} + \dots \right] \quad (33)$$

$$= \frac{k}{m}(2R)^{5/2} \left[ \frac{3}{2}x_{\ell\ell}\sqrt{-x_\ell} + \frac{R^2}{2}x_{\ell\ell\ell\ell}\sqrt{-x_\ell} - \frac{R^2}{2}\frac{x_{\ell\ell}x_{\ell\ell\ell}}{\sqrt{-x_\ell}} - \frac{R^2}{16}\frac{x_{\ell\ell}^3}{(-x_\ell)^{3/2}} + \dots \right] \quad (34)$$

qui correspond bien à l'équation donnée dans l'énoncé en posant  $C^2 = k(2R)^{5/2}/m$ ,  $\alpha = R^2/2$  et  $\beta = R^2/16$ . Cette solution n'a de sens que parce que  $-x_\ell > 0$ .

Les trois derniers termes du membre de droite sont d'ordre  $(R/\Lambda)^2$  par rapport au premier.

– 5(d) Posons  $\xi = \ell - vt$  et  $\psi = -x_\xi$ . On a alors

$$\frac{v^2}{C^2} \psi_\xi = \frac{3}{2} \psi_\xi \sqrt{\psi} + \frac{R^2}{2} \psi_{\xi\xi\xi} \sqrt{\psi} + \frac{R^2}{2} \frac{\psi_\xi \psi_{\xi\xi}}{\sqrt{\psi}} - \frac{R^2}{16} \frac{\psi_\xi^3}{\psi^{3/2}} \quad (35)$$

$$= \frac{3}{2} \psi_\xi \sqrt{\psi} + \frac{R^2}{2} \frac{(\psi \psi_{\xi\xi})_\xi}{\sqrt{\psi}} - \frac{R^2}{16} \frac{\psi_\xi^3}{\psi^{3/2}} \quad (36)$$

qui conduit à

$$\frac{v^2}{C^2} \psi_\xi \sqrt{\psi} = \frac{3}{2} \psi_\xi \psi + \frac{R^2}{2} (\psi \psi_{\xi\xi})_\xi - \frac{R^2}{16} \frac{\psi_\xi^3}{\psi} \quad (37)$$

– 5(e) Multiplions les deux membres de l'équation par  $y_\eta$  et intégrons par rapport à la variable  $\eta$ . L'équation devient

$$\frac{1}{2} y_\eta^2 + W(y) = E \quad (38)$$

où  $E$  est une nouvelle constante d'intégration et  $W(y) = -\frac{5}{8}y^{8/5} + \frac{1}{2}y^2 + Dy^{4/5}$ . On reconnaît donc une analogie mécanique. L'équation (38) correspond donc à l'équation du mouvement d'une particule ponctuelle soumise à une force dérivant du potentiel  $W(y)$ , la variable  $\eta$  jouant le rôle d'un temps fictif.

– 5(f)

$$\frac{dW}{dy} = -y^{3/5} + y + \frac{4D}{5}y^{-1/5} = \left( -y^{4/5} + y^{6/5} + \frac{4D}{5} \right) y^{-1/5} = 0 \quad (39)$$

$$\left( -y^{4/5} + y^{6/5} + \frac{4D}{5} \right) y^{-1/5} = \left( -\chi^2 + \chi^3 + \frac{4D}{5} \right) y^{-1/5} = 0 \quad (40)$$

$$(41)$$

Les solutions non nulles de l'équation  $dW/dy = 0$  peuvent être obtenues simplement en prenant  $\chi = y^{2/5}$ . Il suffit ensuite de résoudre l'équation polynomiale du troisième ordre en  $\chi$ .

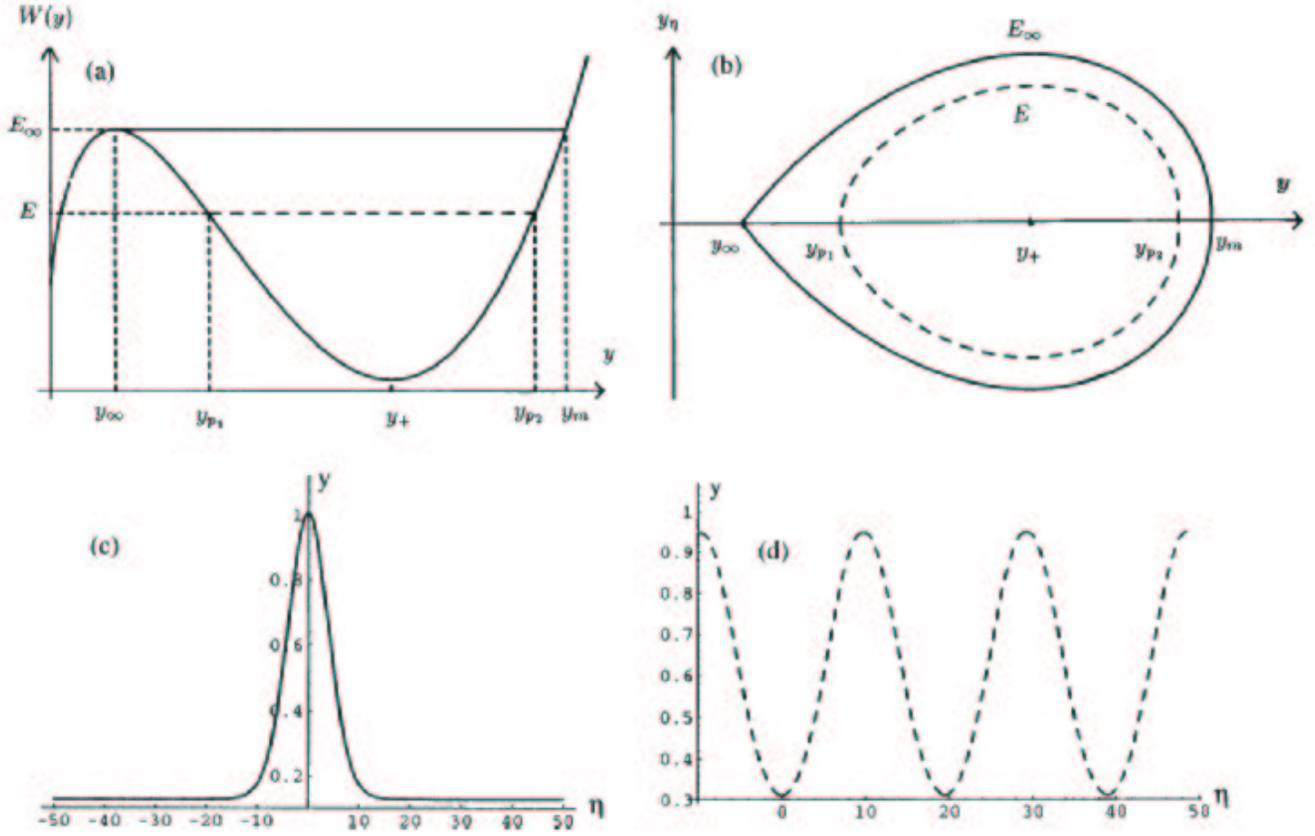


FIG. 8: (a) Graphe de la fonction  $W(y)$  dans le cas  $0 < D < 5/27$  illustrant l'analogie mécanique. Deux mouvements de la "particule" sont envisageables : si son "énergie" est celle du maximum local,  $E_\infty = W(y_\infty)$ , la particule va de  $y_\infty$  à  $y_m$  telle que  $W(y_m) = W(y_\infty)$  en un "temps" infini ; cette trajectoire correspond à une solution onde solitaire de l'équation (3). Si son énergie est  $E_p < E_\infty$ , la particule va de  $y_{p1}$  à  $y_{p2}$  en un temps "fini" ; cette "trajectoire" correspond à une solution de type onde périodique non linéaire de l'équation (3). Si  $E > E_\infty$ , il n'existe pas de solutions bornées. (b) Représentation des "trajectoires" de (a) dans le plan de phase ("position"  $y$ , "vitesse"  $y_\eta$ ) ; la trajectoire qui tourne en un temps fini autour de la position d'équilibre stable  $y_-$  correspond à l'onde périodique non linéaire (courbes en traits tillés), alors que l'orbite homocline (courbe en traits pleins) qui représente un point anguleux en  $y_\infty$ , correspond à l'onde solitaire. (c) Allure de l'onde solitaire, obtenue par intégration numérique de l'équation (3) pour  $E = E_\infty$ . (d) Allure de l'onde périodique non linéaire obtenue par intégration numérique de l'équation (3) pour  $E < E_\infty$ .