

## Examen du cours “Physique non linéaire”

Mardi 7 novembre 2006

### 1 Questions de cours

- 1(a) Donner l'équation de Schrödinger Non Linéaire.
- 1(b) Donner le nom et l'allure schématique de la solution localisée de cette équation. Donner son domaine d'existence.
- 1(c) Décrire l'instabilité modulationnelle ? Quel est son domaine d'existence ? Donner un exemple de situation physique où l'on peut rencontrer une telle instabilité.
- 1(d) Décrire une situation expérimentale qui peut-être décrite par une équation de Ginzburg-Landau.
- 1(e) À quelle condition peut-on définir une fonctionnelle de Lyapunov dont dérive l'équation de Ginzburg-Landau ?

### 2 Lampe Fer-Hydrogène

Le problème consiste à étudier la lampe Fer-Hydrogène qui est un système non linéaire multistable, et à dégager des analogies avec la transition liquide-vapeur (hystérésis, palier de Maxwell, ...). *Les questions sont très largement indépendantes.*

La lampe est constituée d'un filament de Fer dans une enceinte à température  $T$  remplie d'Hydrogène. Le filament est traversé par un courant  $I$ . La chaleur dégagée par effet Joule est évacuée par conduction thermique.

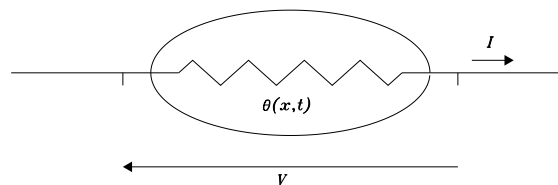


Figure 1: Schéma de la lampe Fer-Hydrogène.

On notera  $\theta(x, t)$  la température le long du filament, supposé de longueur  $L$  ;  $C$  est la capacité calorifique par unité de longueur,  $k$  la conductivité thermique et  $R(\theta)$  la résistance par unité de longueur de filament. Enfin  $\lambda(\theta - T)$  est la puissance par unité de longueur du filament, évacuée par conduction thermique dans l'hydrogène. Seule la résistance  $R(\theta)$  dépend de la température, les autres paramètres étant considérés comme constants.

- (a) Montrer que la température  $\theta(x, t)$  du filament obéit à l'équation

$$C \frac{\partial \theta}{\partial t} = R(\theta) I^2 - \lambda(\theta - T) + k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (1)$$

- (b) La loi de variation de  $R$  en fonction de  $\theta$  est donnée par la figure 2.

On suppose tout d'abord que la température  $\theta$  est indépendante de la position  $x$  le long du filament. Pour une température du gaz d'hydrogène  $T$  et un courant  $I$  donnés, trouver les positions

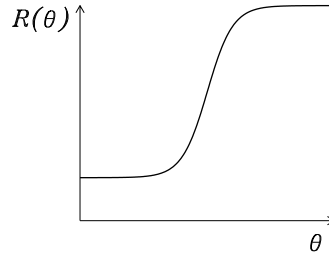


Figure 2: Variation de la résistance en fonction de la température  $\theta$ .

d'équilibre et discuter leur stabilité (aucun calcul). On discutera pour  $T$  donnée en fonction de  $I$ . Attention il y a deux cas différents à basse et haute température de la vapeur d'Hydrogène.

(c) Tracer la courbe de variation de  $\theta$  en fonction de  $I$  (ou bien  $I$  en fonction de  $\theta$ ). Quelle est l'analogie avec la transition liquide-vapeur? Tracer l'évolution de la tension  $V$  aux bornes de la lampe toujours en fonction de la température  $\theta$ . Quelle peut donc être l'utilité d'une lampe Fer- $H_2$ ?

(d) Montrer que les solutions stationnaires dépendantes de  $x$ , notées  $\theta(x)$ , sont données par

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{dU}{d\theta}. \quad (2)$$

Quelle analogie vous suggère l'équation (2)? Représenter l'allure de  $U(\theta)$  dans le cas où le système possède deux solutions stables  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (on remarquera que  $U$  correspond à l'aire entre deux courbes). Tracer les trajectoires correspondantes dans l'espace des phases  $(\theta, \theta_x)$  lorsque  $U(\theta_1) \neq U(\theta_2)$ .

(e) On cherche des solutions sous la forme de "paroi de domaine" telle que  $\theta(x) \rightarrow \theta_{1,2}$  pour  $x \rightarrow \mp\infty$ . Montrer que ces solutions existent si  $U(\theta_1) = U(\theta_2)$ . En déduire la relation intégrale correspondante, et l'interpréter par une construction de Maxwell sur la courbe  $R(\theta)$ . Discuter l'analogie avec la transition liquide-vapeur et notamment avec la notion de palier de Maxwell. Donner la forme de la paroi.

(f) Si  $\Delta U \equiv U(\theta_2) - U(\theta_1) \neq 0$ , il n'existe pas de parois stationnaires. En supposant qu'il existe une solution paroi *mobile* à une vitesse constante  $c$ , calculer cette vitesse en fonction de  $\Delta U$  et de  $\int_0^L (\partial\theta/\partial x)^2 dx$ . Quel est le sens de déplacement?

(g) On pose  $\mathcal{S} \equiv \int_0^L \mathcal{L}(\theta, \partial\theta/\partial x) dx$  où  $\mathcal{L} \equiv (k/2)(\partial\theta/\partial x)^2 - U(\theta)$ . Montrer que la quantité  $\mathcal{S}$  décroît au cours du temps et qu'elle est minorée. En déduire quels sont les états d'équilibre globalement stables et les états métastables.

(h) On veut déterminer la stabilité d'une paroi stationnaire  $\theta_0(x)$  du type de celles étudiées à la question (e). On considère donc  $\theta(x, t) = \theta_0(x) + \psi(x, t)$  avec  $\psi$  petit, et on linéarise l'équation (1) au voisinage de  $\theta_0(x)$ . Montrer que l'on obtient l'équation

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{k}{C} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + A(x)\psi, \quad (3)$$

analogue à une "équation de Schrödinger". Pourquoi utilise-t-on les guillemets? Donner l'expression de  $A(x)$ .

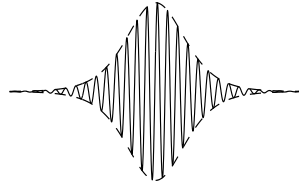
La solution est donc du type  $\psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-\alpha_n t}$  où les  $\psi_n$  sont les fonctions propres de l'opérateur linéaire  $\frac{k}{C} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A(x)$ , associées aux valeurs propres  $\alpha_n$ . On rappelle que l'état fondamental, c'est-à-dire l'état associé à la plus petite valeur propre  $\alpha_n$ , est l'état  $\psi_0$  qui n'a pas de nœud (aucun zéro sur l'axe réel). En utilisant ce résultat, et en exprimant l'invariance par translation des solutions de l'équation (1), montrer que la paroi est stable.

(i) Qu'en est-il pour une région où  $\theta \simeq \theta_2$  entourée de chaque côté par une région où  $\theta \simeq \theta_1$ ? Quel est l'analogie dans la transition liquide-vapeur?

# Correction de l'examen du 7 novembre 2006

## 1 Questions de cours

- 1(a) L'équation de NLS est  $i\frac{\partial\psi}{\partial t} + P\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + Q|\psi|^2\psi = 0$ .  
1(b) On a un soliton enveloppe lorsque  $PQ > 0$ .



1(c) Une onde plane est modulationnellement instable lorsque  $PQ > 0$ . Une onde plane injectée initialement dans le système a tendance à se moduler spontanément et l'on obtient un train de solitons.

Cette instabilité est appelée dans le domaine hydrodynamique, instabilité de Benjamin-Feir, en l'honneur de ceux qui l'ont découverte pour les trains de vagues à la surface de l'eau.

1(d) Il y a énormément d'exemple. La convection de Rayleigh-Bénard, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, l'instabilité de Faraday,...

1(e) À condition que l'équation de Ginzburg-Landau soit à coefficients réels comme dans le cas Rayleigh-Bénard étudié en cours.

## 2. Lampe Fer-Hydrogène

(a) Considérons une longueur de filament, située entre  $x$  et  $x + dx$ , dans laquelle nous écrivons que la variation d'énergie cinétique par unité de temps,  $dE/dt$ , est égale à la somme des puissances. L'énergie s'écrit  $E = Cdx\theta$  si l'on néglige l'énergie élastique due à la dilatation thermique et conduit donc à  $dE/dt \simeq Cdx\frac{\partial\theta}{\partial t}$ . On notera que l'on suppose aussi que  $C$  est indépendant de  $\theta$ .

La somme des puissances, dissipée par effet Joule,  $+RI^2dx$ , et dissipée par conduction thermique dans l'Hydrogène,  $-\lambda(\theta - T)dx$ , auxquelles il faut ajouter le flux de chaleur communiquée aux portions adjacentes  $j(x) - j(x + dx)$ , conduit à

$$R(\theta)I^2dx - \lambda(\theta - T)dx + j(x) - j(x + dx). \quad (4)$$

Les deux derniers termes donnent  $-\frac{\partial j}{\partial x} = k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$  puisque, d'après la loi de Fourier, on a  $j = -k\frac{\partial\theta}{\partial x}$  et que la conductivité thermique est supposée constante. On aboutit donc bien à l'équation (1).

(b) Les solutions stationnaires sont données par l'égalité

$$R(\theta) = \lambda(\theta - T)/I^2, \quad (5)$$

et correspondent graphiquement aux intersections de la courbe de  $R$  et d'une droite qui va tourner autour du point  $(T, 0)$  puisque la température de la vapeur d'hydrogène  $T$  est fixée. Plusieurs cas sont possibles dont les domaines de validité vont être déterminés par deux valeurs limites  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , définies sur la figure 3. Au dessus de  $\lambda_2$  et en dessous de  $\lambda_1$ , il n'y aura qu'une solution. Entre les deux, il y aura 3 solutions.

Une étude attentive, montre qu'il existe une température critique  $T_c$  de l'atmosphère d'hydrogène au dessus de laquelle ce scénario ne se produit pas. La valeur de  $T_c$  correspond aux paramètres pour lesquels la droite tangente la courbe au point d'inflexion. que l'on notera  $\theta^*$ .

L'égalité des pentes  $R'(\theta^*) = \lambda/I^2$  et des valeurs  $R(\theta^*) = \lambda(\theta^* - T_c)/I^2$ , conduit à

$$T_c = \theta^* - R(\theta^*)\frac{I^2}{\lambda} \quad (6)$$

$$= \theta^* - \frac{R(\theta^*)}{R'(\theta^*)}. \quad (7)$$

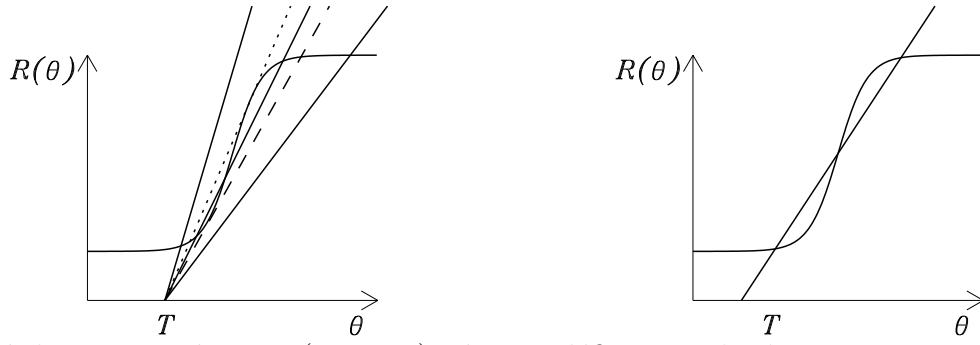


Figure 3: Cas à basse température ( $T < T_c$ ).  $\lambda_1$  est définie par la droite tangente au bas de la courbe (traits tillés), alors que  $\lambda_2$  est définie par le haut de la courbe (pointillés). La figure de droite correspond au cas générique intéressant.

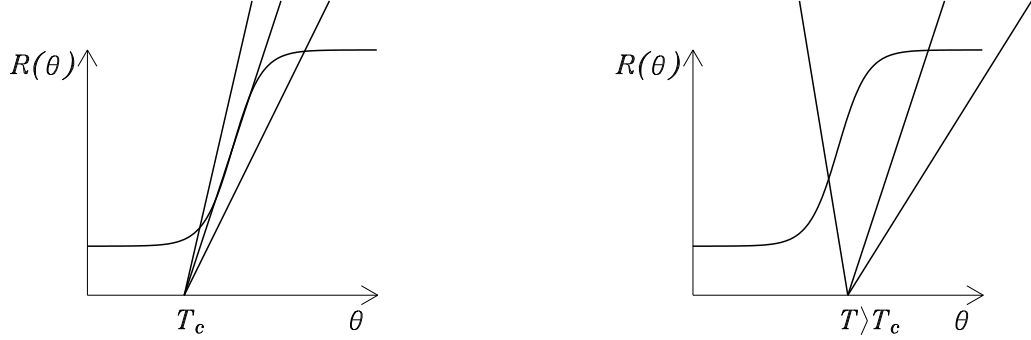


Figure 4: La figure de gauche correspond au cas limite  $T = T_c$  alors que celle de droite présente le cas  $T > T_c$ .

En conclusion, si  $T \geq T_c$ , il y a une seule solution stationnaire, alors que pour  $T < T_c$ , il peut y avoir de 1 à 3 solutions.

Pour déterminer la stabilité de ces points d'équilibre, considérons l'équation (1) dans le cas homogène. Elle se simplifie en

$$C \frac{\partial \theta}{\partial t} = R(\theta) I^2 - \lambda(\theta - T), \quad (8)$$

et montre que  $\theta$  va croître si  $R > \lambda(\theta - T)/I^2$ . Si la droite est donc au dessus de la courbe,  $\theta$  va diminuer, alors qu'elle augmentera si elle est en dessous.

Les différents cas peuvent donc être résumés pour  $T < T_c$  comme suit :

- Si  $\lambda < \lambda_1$ , il y aura 1 point fixe stable.
- Si  $\lambda = \lambda_1$ , il y aura 2 points fixes, 1 stable et 1 instable.
- Si  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ , il y aura 3 points fixes, stable, instable et stable.
- Si  $\lambda = \lambda_2$ , il y aura 2 points fixes, 1 instable et 1 stable.
- Si  $\lambda > \lambda_2$ , il y aura 1 point fixe stable.

La stabilité peut être aussi déterminée en étudiant le comportement d'une perturbation à la température d'équilibre  $\theta_0$ , solution homogène et stationnaire de l'équation (1). En introduisant  $\theta = \theta_0 + \varepsilon$  dans l'équation (1), on aboutit à

$$C \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left( R(\theta_0) + \frac{\partial R}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} \varepsilon + \dots \right) I^2 - \lambda(\theta_0 + \varepsilon - T) \quad (9)$$

$$= I^2 \left( \frac{\partial R}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} - \frac{\lambda}{I^2} \right) \varepsilon \quad (10)$$

en utilisant l'équation (5). Comme le rapport  $I^2/C$  est positif, la perturbation sera stable si la parenthèse est négative et instable sinon. On retrouve les même résultats.

(c) Il est plus simple d'étudier  $I(\theta)$  et d'inverser le graphe. L'équation (5) peut se réécrire sous la forme

$$I(\theta_0) = \sqrt{\frac{\lambda(\theta_0 - T)}{R(\theta_0)}}. \quad (11)$$

Comme on a

$$\frac{dI}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{dI^2}{d\theta} = 0 = \frac{\lambda R(\theta) - \lambda(\theta - T)R'(\theta)}{R^2}. \quad (12)$$

En utilisant l'équation (5) à nouveau, on a

$$\frac{dI^2}{d\theta} = 0 = \frac{\lambda\lambda(\theta - T)/I^2 - \lambda(\theta - T)R'(\theta)}{R^2} = \lambda(\theta - T)\frac{\lambda/I^2 - R'(\theta)}{R^2} \Rightarrow R'(\theta) = \lambda/I^2. \quad (13)$$

Les extrema sont donc les points de tangence entre la droite et la courbe  $R(\theta)$ . Il n'y a donc pas d'extremum lorsque  $T > T_c$ , un seul extremum  $\theta^*$  lorsque  $T = T_c$  et enfin 2 extrema lorsque  $T < T_c$ . En  $\theta = T$ , l'intensité  $I = 0$  et  $dI/d\theta \rightarrow \infty$ , alors que lorsque  $\theta \rightarrow \infty$ ,  $I \sim \sqrt{\lambda\theta/R(\infty)}$

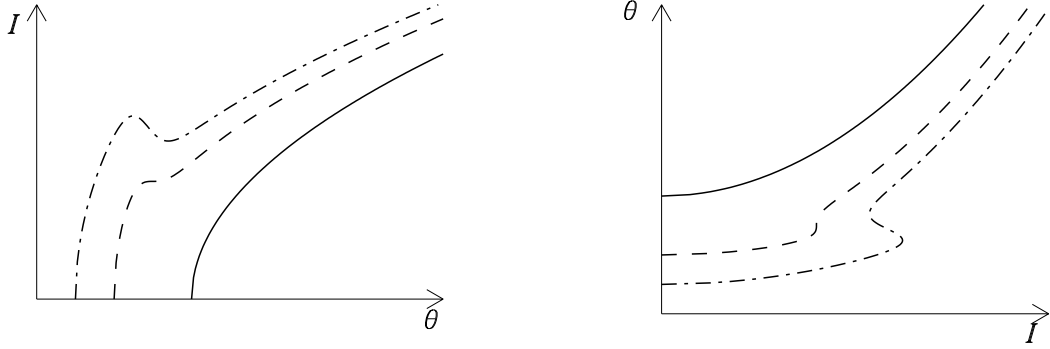


Figure 5: Évolution du courant  $I$  en fonction de la température homogène  $\theta$  dans les trois cas différents:  $T > T_c$  (courbe continue),  $T = T_c$  (courbe tiretée) et  $T < T_c$  (courbe pointillée). La figure  $\theta(I)$  de droite est celle que l'on déduit directement en intervertissant les axes.

À partir de la relation  $V = R(\theta) I$  et de l'équation (11), on aboutit à

$$V(\theta) = \sqrt{\lambda(\theta - T)R(\theta)}. \quad (14)$$

qui permet d'obtenir

$$2V\frac{dV(\theta)}{d\theta} = \lambda R(\theta) + \lambda(\theta - T)R'(\theta) > 0 \Rightarrow \frac{dV(\theta)}{d\theta} > 0, \quad (15)$$

puisque  $R'(\theta) > 0$ . La fonction  $V(\theta)$  est donc strictement croissante. Comme on a en outre  $\frac{dV(\theta)}{dI} = \frac{dV}{d\theta} \frac{d\theta}{dI}$ , cela met en évidence que  $\frac{dV(\theta)}{dI} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dI} = 0$ . Par conséquent, si l'on trace  $I(V)$ , les extrema définis par  $\frac{dI}{dV} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{d\theta} = 0$ . On aura donc les même extrema que la fonction  $I(\theta)$ .

En  $V = 0$ , on a  $I = 0$  et  $\frac{dI}{dV} = \frac{1}{R(T)}$ . Lorsque  $V \rightarrow \infty$ ,  $I = \frac{V}{R(\infty)}$ . On est en mesure désormais de tracer les isothermes et donc tracer le courant  $I$  en fonction de la tension  $V$  comme le montre la figure 6 à gauche. On en déduit immédiatement la caractéristique demandée Courant-Tension à droite.

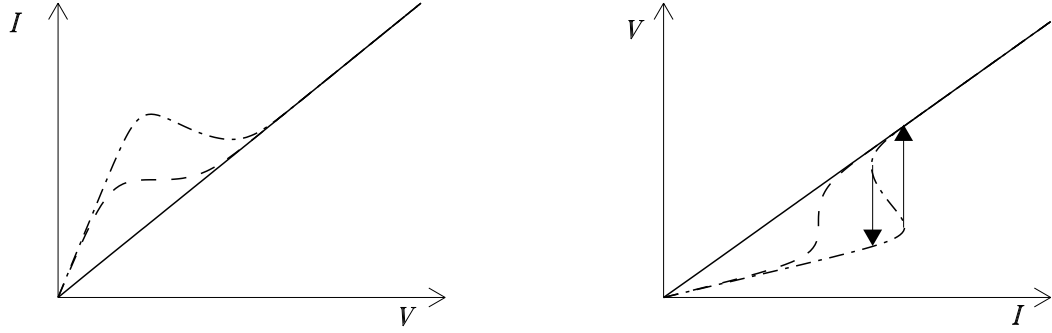


Figure 6: Courbe Tension-Courant à gauche et Courant-Tension à droite.

Dans le cas des températures faibles ( $T < T_c$ ), on obtient donc une courbe courant/tension comme représentée sur la figure 7. On reconnaît l’hystérésis et même l’équivalent de la courbe spinodale de la transition liquide-vapeur lorsque l’on trace les isothermes dans le plan  $(P, V)$ .

L’équivalent du palier de Maxwell, représenté par la courbe tiretée révèle l’intérêt d’un tel dispositif : la lampe fonctionne avec un courant constant dans un domaine étendu de tension.

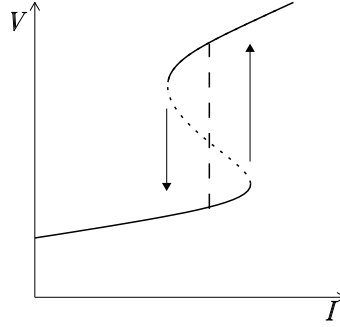


Figure 7: Courbe de coexistence de “phase”. Les portions continues correspondent aux portions stables alors que les portions pointillées sont instables. La ligne tiretée correspond au palier de Maxwell.

(d) Revenons au problème spatio temporel désormais. Les solutions stationnaires sont données par l’équation

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \lambda(\theta - T) - R(\theta)I^2 = -\frac{dU}{d\theta}. \quad (16)$$

où

$$U = \int_T^\theta [R(\theta)I^2 - \lambda(\theta - T)] d\theta \quad (17)$$

$$= I^2 \int_T^\theta R(\tau) d\tau + \lambda \left( T\theta - \frac{\theta^2}{2} \right) + U_0. \quad (18)$$

L’équation (16) correspond à l’équation du mouvement d’une particule fictive de coordonnée  $\theta$ , de “masse”  $k$  se déplaçant au cours du “temps”  $x$  dans le potentiel  $U$ .

La température  $T$  le courant  $I$  étant fixés, on peut déterminer l’allure de  $U(\theta)$  et donc déterminer les valeurs stationnaires graphiquement.  $U(\theta)$  représente l’aire algébrique contenue entre la courbe  $R(\theta)$  et la “droite de charge” (cf. Fig. 8).

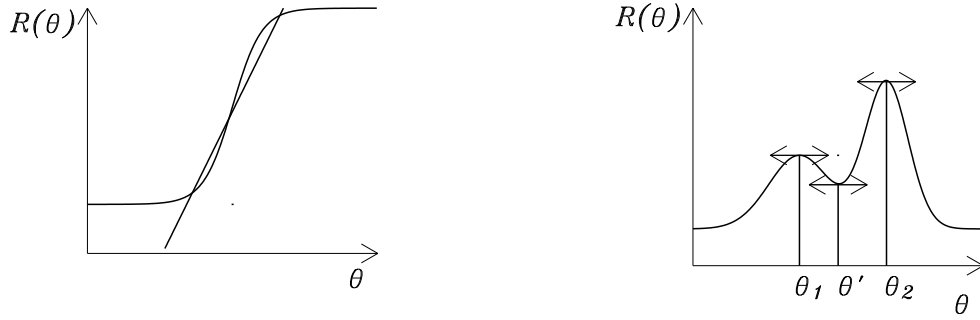


Figure 8:

Les trajectoires dans l'espace des phases  $(\theta, \theta_x)$  correspondent à

$$\partial_x \theta = \theta_x \quad (19)$$

$$\partial_x \theta_x = -\frac{1}{k} \frac{dU}{d\theta} = \frac{1}{k} [-R(\theta)I^2 + \lambda(\theta - T)]. \quad (20)$$

Les valeurs stationnaires  $(\theta_1, \theta', \theta_2)$  correspondent à des points fixes puisque  $\theta_x = 0$ . Pour tracer l'espace des phases, on fait l'analyse linéaire au voisinage de ces positions en posant  $\theta = \theta_i + \eta$  et  $\theta_x = \xi$  qui conduit à

$$\partial_x \eta = \xi \quad (21)$$

$$\partial_x \xi = \frac{1}{k} \left[ \lambda - I^2 \frac{dR}{d\theta} \Big|_{\theta_i} \right] \eta \equiv \alpha_i \eta. \quad (22)$$

Les valeurs propres sont donc

$$\partial_x \eta = \xi = \sigma \eta \quad (23)$$

$$\partial_x \xi = \alpha_i \eta = \sigma \xi, \quad (24)$$

qui conduisent à  $\sigma^2 = \alpha_i$ . Si  $\alpha_i > 0$ ,  $\sigma = \pm\sqrt{\alpha_i}$ , 1 racine positive et 1 négative, alors que si  $\alpha_i < 0$ , 2 racines imaginaires pures, complexes conjuguées. Pour  $\theta = \theta_1$  et  $\theta = \theta_2$ ,  $\alpha > 0$ , on a 2 racines réelles opposées : points hyperboliques. Pour  $\theta = \theta'$ ,  $\alpha' < 0$ , on a 2 racines complexes conjuguées : on a un centre.

Pour le tracé des orbites, on peut s'aider de l'existence du potentiel  $U$ . Comme le système est conservatif, l'énergie  $U$  est conservée lors du mouvement de la particule.

Les cas  $U(\theta_1) < U(\theta_2)$  et  $U(\theta_1) > U(\theta_2)$  sont symétriques.

(e) Lorsque  $U(\theta_1) = U(\theta_2) = U_p$ , il existe des orbites qui connectent les points  $(\theta_1, 0)$  et  $(\theta_2, 0)$  : on parle d'orbites hétéroclines. C'est le seul cas de connexion spatiale entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  : la solution qui connecte ces 2 points correspond à un kink (ou paroi de domaine).

On a donc

$$\frac{1}{2}k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + U(\theta) = E \quad (25)$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$\frac{1}{2}k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 = U_p - U(\theta) \quad (26)$$

lorsque  $E = U_p$ . On aboutit à

$$x = \sqrt{\frac{k}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{U_p - U(\theta)}} \quad (27)$$

Le palier de Maxwell est donné par la relation  $U(\theta_1) = U(\theta_2)$  qui se réécrit sous la forme

$$\int_T^{\theta_1} [R(\theta)I^2 - \lambda(\theta - T)] d\theta = \int_T^{\theta_2} [R(\theta)I^2 - \lambda(\theta - T)] d\theta. \quad (28)$$

c'est-à-dire

$$0 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [R(\theta)I^2 - \lambda(\theta - T)] d\theta \quad (29)$$

$$= I^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} R(\theta) d\theta - \lambda(\theta_2 - \theta_1) \left[ \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} - T \right]. \quad (30)$$

En l'absence de fluctuations, l'état du fil passe brutalement de la partie inférieure de la courbe à la partie supérieure. En présence de fluctuations, il est plus favorablement énergétiquement de partitionner le fil en deux parties : une fraction  $x$  du filament est à la température  $\theta_1$  et une fraction  $(1 - x)$  est à  $\theta_2$ . La fraction  $x$  est définie par  $[xR(\theta_1) + (L - x)R(\theta_2)] = U$ . Il y a donc un palier comme pour la transition liquide-vapeur, et donc des portions de filament à la température  $\theta_2$  et d'autre à la température  $\theta_1$ , comme les bulles de vapeur dans le liquide en ébullition.

(f) Si l'on cherche des solutions de l'équation (1) sous la forme  $\theta(\xi = x - ct)$  avec  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \theta(\xi) = \theta_{2,1}$ , on a

$$C \left( -c \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = \underbrace{R(\theta)I^2 - \lambda(\theta - T)}_{\frac{\partial U}{\partial \theta}} + k \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}. \quad (31)$$

On donc le terme d'inertie, plus celui du à la dissipation et enfin le terme potentiel. En présence de dissipation, le potentiel ne peut se faire que des grandes valeurs d'énergie potentielle vers les petites : l'énergie potentielle est convertie en énergie dissipée.

En multipliant par  $\theta_\xi$  et en intégrant de 0 à  $L$ , on a

$$U(\theta_2) - U(\theta_1) + \frac{k}{2} \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)_{|L}^2 - \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)_{|0}^2 \right] + Cc \int_0^L \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = 0. \quad (32)$$

La longueur  $L$  sera supposée grande et nettement supérieure à la taille caractéristique de la paroi. On a donc  $\theta(0) = \theta_1$  et  $\theta(L) = \theta_2$ , alors que  $\theta'(0) = \theta'(L) \simeq 0$ . On en déduit que le terme entre crochets est nul. Cela permet d'aboutir à la l'expression de la vitesse

$$c = -\frac{1}{C} \frac{U(\theta_2) - U(\theta_1)}{\int_0^L \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 d\xi}. \quad (33)$$

Comme la capacité  $C$  est positive et que l'intégrale d'un terme positif est forcément positive, on a : si  $U(\theta_2) > U(\theta_1)$ , la vitesse  $c$  est négative et la paroi va de  $\theta_2$  vers  $\theta_1$ . Alors que si  $U(\theta_2) < U(\theta_1)$ ,  $c$  sera positive et la paroi ira de  $\theta_1$  vers  $\theta_2$ . On retrouve que lorsque  $U(\theta_2) = U(\theta_1)$ , la vitesse est nulle et le kink liant les 2 points stables est statique. On en déduit que la paroi se déplace de la position de plus grande énergie "potentielle" vers la position de plus petite énergie.

(g) Calculons la dérivée de  $\mathcal{S}$  par rapport au temps :

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int_0^L \left[ k \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} - U'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] dx \quad (34)$$

$$= k \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_0^L - \int_0^L k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \int_0^L U'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} dx \quad (35)$$



Le premier terme tout intégré est nul si  $L$  est bien supérieure à la taille du front. On a donc

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = - \int_0^L \left[ k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + U'(\theta) \right] \frac{\partial \theta}{\partial t} dx \quad (36)$$

$$= -C \int_0^L \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx \quad (37)$$

qui est bien négatif. La quantité  $\mathcal{S}$  est donc bien décroissante.

Cette fonction  $\mathcal{S}$  est clairement minorée par

$$S \geq - \max [U(\theta_1), U(\theta_2)] L, \quad (38)$$

puisque la partie “cinétique de la densité Lagrangienne” est positive. Ceci est vrai pour toutes les valeurs de  $L$ . On connaît donc un état d'équilibre globalement stable : c'est l'état homogène  $\theta(x, t) = \theta_i$  qui maximise l'énergie  $U$  (l'autre n'est que métastable). C'est vers cet état homogène que la température converge si la température du filament  $\theta$  n'est pas initialement homogène.

(h) Plaçons nous dans le cas, où l'on a une paroi  $\theta_0$  reliant  $\theta_1$  à  $\theta_2$ . L'équation (1) qui peut se réécrire sous la forme

$$C \frac{\partial \theta}{\partial t} = U'(\theta) + k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (39)$$

conduit au premier ordre en  $\psi$  à

$$C \frac{\partial \psi}{\partial t} = U''(\theta) \psi + k \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (40)$$

Ce n'est pas une équation de Schrödinger, car il manque le préfacteur  $i$  devant la dérivée temporelle. La fonction  $A(x)$  est donc  $U''(\theta)/C$ .

Si l'on pose  $\psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-\alpha_n t}$ , on a

$$-\alpha_n \psi_n = A(x) \psi_n + \frac{k}{C} \psi_n'' \quad (41)$$

qui peut se réécrire

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{C}{k} [\alpha_n - (-A(x))] \psi_n = 0. \quad (42)$$

En faisant l'analogie avec le cas de l'équation de Schrödinger

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi_n = 0, \quad (43)$$

on voit que l'équivalent du potentiel est donc  $-A(x) = -U''(\theta)/C$ .

La paroi sera stable que si toutes les valeurs propres  $\alpha_n$  sont positives. Comme  $\alpha_0$  est la plus petite, il faut donc que  $\alpha_0 > 0$

La formulation de l'invariance par translation est non triviale mais intéressante. Si  $\theta_0(x)$  est solution,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\theta(x + x_0)$  est aussi solution ; prenons  $x_0 = \varepsilon$  infinitésimal. On peut écrire que  $\theta_0(x + \varepsilon) = \theta_0(x) + \varepsilon \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + \dots$  est de la forme  $\theta_0 + \psi$ , où  $\psi$  est petit. La solution  $\theta_0(x + \varepsilon)$  vérifie l'équation (1), donc nécessairement  $\frac{\partial \theta_0}{\partial x}$  est solution de l'équation (3) avec la valeur propre 0 puisque l'on a  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \right) = 0$ .

Cela peut se vérifier directement de la manière suivante. Si l'on dérive l'égalité

$$k \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + U'(\theta_0) = 0 \quad (44)$$

par rapport à la variable  $x$ , on a

$$k \frac{\partial^3 \theta_0}{\partial x^3} + U''(\theta_0) \frac{\partial \theta_0}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[ k \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U''(\theta_0) \right] \frac{\partial \theta_0}{\partial x} = 0. \quad (45)$$

On vérifie donc bien que  $\frac{\partial\theta_0}{\partial x}$  est solution de l'équation (41) avec la valeur propre zéro.

Comme  $\theta_0$  a la forme d'un kink allant de  $\theta_1$  à  $\theta_2 > \theta_1$ , on a  $\frac{\partial\theta_0}{\partial x} > 0$  sur l'intervalle  $] -\infty, +\infty[$ .  $\frac{\partial\theta_0}{\partial x}$  est donc la fonction propre de l'opérateur  $\partial_{xx} + A(x)$  associés à la valeur propre zéro qui n'a pas de nœud. C'est donc bien la fonction propre de l'état fondamental et la plus petite valeur propre est  $\alpha_0 = 0$ . Par conséquent,  $\forall n \neq 0, \alpha_n > 0$  et donc tous les modes décroissent dans le temps : la paroi est donc stable.

(i) Si on a la forme proposée dans l'énoncé avec un kink suivi d'un antikink, la fonction  $\frac{\partial\theta_0}{\partial x}$  est toujours associée à la valeur propre 0, mais elle a un zéro (nœud) : cette valeur propre correspond donc à la fonction d'onde  $\psi_1(x)$  du premier état excité, associée à la valeur propre  $\alpha_1 = 0$ . Comme les valeurs propres sont classées par ordre croissant, on a forcément  $\alpha_0 < \alpha_1 = 0$  : il existe donc un mode instable. Cette situation du kink suivi de l'antikink est donc instable : la "bulle" est instable et collapse ou s'étend comme le ferait une bulle de vapeur.