Master 2ème année **Année 2007-2008**
Thierry.Dauxois@ens-lyon.fr

Examen du cours "Physique non linéaire"

Mercredi 7 novembre 2007

Modèles d'océan à deux couches

Nous allons considérer l'équation de rm-Boussinesq (pour rotation-modified Boussinesq) qui a été proposée pour décrire les mouvements de l'interface entre deux couches de fluide de densité différentes lorsque l'on tient compte de la rotation de la terre. Au lieu de décrire les ondes de surface, elle décrit donc les ondes internes à l'interface entre les deux couches.

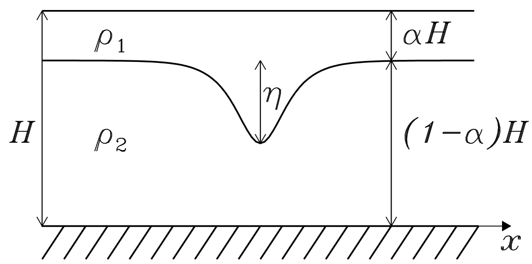

Figure 1: Schéma du modèle à deux couches.

En notant η la déformation de l'interface par rapport à la position d'équilibre, x (resp. t) la variable spatiale (resp. temporelle), l'équation s'écrit

$$\eta_{tt} - \nu^2 \eta_{xx} + \mu\eta + 3\varepsilon(1-2\alpha)(\eta\eta_x)_x = 0, \tag{1}$$

où ont été introduits le paramètre caractérisant l'état non hydrostatique, $\nu = (\alpha(1-\alpha))^{1/2}$, celui contrôlant les effets non linéaires, ε, ainsi que μ qui dépend de la rotation.

1 Équations de Klein-Gordon

1(a) Montrer que l'équation de Klein-Gordon linéaire, étudiée en cours, est un cas particulier très simple de cette équation. On précisera dans cette limite les valeurs des paramètres.
1(b) On cherche les solutions à profil constant se déplaçant à la vitesse c. Déterminer l'équation différentielle ordinaire (ODE) du problème.
1(c) Montrer que l'on peut mettre l'équation sous la forme suivante

$$\eta_\xi^2 = \frac{\frac{4\beta_1\beta_2}{3}\eta^3 - \beta_1\eta^2 + 2A}{(1-2\beta_2\eta)^2} = -\frac{N(\eta)}{(1-2\beta_2\eta)^2}. \tag{2}$$

On pourra combiner les deux équations obtenues en multipliant respectivement l'ODE obtenue à l'équation précédente par $\eta\eta_\xi$ et par η_ξ. On donnera l'expression des constantes β_1 et β_2.
1(d) Écrire l'équation dans le cas où les deux couches sont d'épaisseurs égales. Quelles conclusions en déduisez-vous pour la modélisation ?

2 Recherche de solutions localisées spatialement

2(a) Dans le cas où l'on cherche les solutions localisées, déterminer les déformations de l'interface extrémales.
2(b) En utilisant l'ODE déterminée précédemment, donner l'expression de $\int_{-\infty}^{+\infty} \eta \, d\xi$.
2(c) En déduire qu'il n'existe pas de telles solutions (on pourra procéder à l'aide d'une démonstration par l'absurde).

3 Recherche de solutions périodiques

3(a) Définir le domaine des ondes supersoniques. On s'intéressera uniquement à ces ondes dans les questions suivantes.
3(b) Le paramètre β_1 étant positif, en déduire si la rotation a pour effet d'augmenter ou de diminuer la vitesse de phase ?
3(c) On se place dans le cas $\beta_2 < 0$. Quelle est la couche de fluide la plus épaisse ?
3(d) Proposer une analogie mécanique pour résoudre le problème.
3(e) On appelle $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, les trois solutions de l'équation $N(\eta) = 0$. Après avoir exprimé A en fonction de a_3, déterminer la condition pour avoir trois solutions réelles de cette équation.
3(f) Déterminer la solution $\eta(\xi)$ lorsque $a_1 = a_2$ (racine double). Tracer la solution.
3(g) Quelle est la longueur d'onde limite ? Pourquoi la longueur d'onde ne diverge-t-elle pas ?
3(h) Décrire qualitativement les solutions au-dessus et au-dessous de cette valeur limite ? Discuter brièvement les raisons physiques de cette différence de comportement.

4 Méthode perturbative

On souhaite toujours rechercher les solutions de l'équation (1) se propageant à la vitesse c. Dans cette partie, il s'agit de rechercher les solutions sous la forme d'une série perturbative :

$$\eta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \, \eta_n(\xi) \qquad \text{et} \qquad c = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \, c_n(\xi). \tag{3}$$

On prendra $\eta(0) = 1$ et $\eta_\xi(0) = 0$.
4(a) Est-il nécessaire de préciser d'autres conditions initiales pour déterminer la solution ?
4(b) Résoudre l'équation aux ordres 0, 1 et 2. Donner en particulier l'expression de c_i et η_i avec i =0, 1, ou 2.
4(c) Est-ce la non-linéarité ou le terme dû à la rotation qui modifie la vitesse de phase ?
4(d) Tracer l'allure de $\eta(\xi)$ pour $\mu = 0.5$, $\varepsilon = 0.2$ et $\alpha = 0.25$. Commenter.

Pour en savoir plus, on pourra se référer à la thèse de doctorat de Theo Gerkema soutenue à l'Université d'Utrecht (Pays-Bas) en 1994 et intitulée *Nonlinear dispersive internal tides : generation models for a rotating ocean.*

Correction de l'examen du 7 novembre 2007

1(a) En considérant la limite linéaire ($\varepsilon = 0$) ou le cas où les deux couches sont égales ($\alpha = 1/2$), on retrouve bien l'équation de Klein-Gordon

$$\eta_{tt} - \nu^2 \eta_{xx} + \mu \eta = 0. \tag{4}$$

1(b) En introduisant la variable $\xi = x - ct$ dans l'équation (1), on aboutit à l'équation

$$c^2 \eta_{\xi\xi} - \nu^2 \eta_{\xi\xi} + \mu\eta + 3\varepsilon(1-2\alpha)(\eta\eta_\xi)_\xi = 0, \tag{5}$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$\eta_{\xi\xi} + \beta_1 \eta = 2\beta_2 (\eta\eta_\xi)_\xi, \tag{6}$$

où l'on a introduit $\beta_1 = \mu/(c^2 - \nu^2)$ et $\beta_2 = 3\varepsilon(\alpha - 1/2)/(c^2 - \nu^2)$

1(c) En multipliant l'équation (6) par $\eta\eta_\xi$, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$\begin{aligned} \eta\eta_\xi\eta_{\xi\xi} &= 2\beta_2(\eta\eta_\xi)_\xi \eta\eta_\xi - \beta_1 \eta_\xi \eta^2, & (7)\\ &= \frac{\partial}{\partial_\xi}\left(\beta_2(\eta\eta_\xi)^2 - \frac{\beta_1}{3}\eta^3\right). & (8) \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (6) par η_ξ, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$\begin{aligned} \eta_\xi\eta_{\xi\xi} + \beta_1\eta_\xi\eta &= 2\beta_2(\eta\eta_\xi)_\xi\eta_\xi, & (9)\\ &= 2\beta_2\left(\eta\eta_\xi\eta_{\xi\xi} + \eta_\xi^3\right). & (10)\\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\eta_\xi^2 + \beta_1\eta^2\right) &= 2\beta_2\left((\eta\eta_\xi^2)_\xi - \eta\eta_\xi\eta_{\xi\xi}\right), & (11) \end{aligned}$$

puis en utilisant l'équation (8), en

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\eta_\xi^2 + \beta_1\eta^2\right) = 2\beta_2(\eta\eta_\xi^2)_\xi - 2\beta_2\frac{\partial}{\partial_\xi}\left(\beta_2(\eta\eta_\xi)^2 - \frac{\beta_1}{3}\eta^3\right), \tag{12}$$

qui donne après intégration

$$\frac{1}{2}\left(\eta_\xi^2 + \beta_1\eta^2\right) = 2\beta_2\eta\eta_\xi^2 - 2\beta_2\left(\beta_2(\eta\eta_\xi)^2 - \frac{\beta_1}{3}\eta^3\right) + A, \tag{13}$$

où A est une constante d'intégration. En regroupant les termes, on aboutit à

$$\left(\eta_\xi^2 + \beta_1\eta^2\right) = 4\beta_2\eta\eta_\xi^2 - 4\beta_2\left(\beta_2(\eta\eta_\xi)^2 - \frac{\beta_1}{3}\eta^3\right) + 2A. \tag{14}$$

puis

$$\begin{aligned} \eta_\xi^2\left(1 - 4\beta_2\eta + 4\beta_2^2\eta^2\right) &= \frac{4\beta_1\beta_2}{3}\eta^3 - \beta_1\eta^2 + 2A. & (15)\\ \eta_\xi^2\left(1 - 2\beta_2\eta\right)^2 &= \frac{4\beta_1\beta_2}{3}\eta^3 - \beta_1\eta^2 + 2A, & (16) \end{aligned}$$

qui conduit donc à

$$\eta_\xi^2 = \frac{\frac{4\beta_1\beta_2}{3}\eta^3 - \beta_1\eta^2 + 2A}{(1 - 2\beta_2\eta)^2}, \tag{17}$$

1(d) Le terme non linéaire disparaît, il faudra donc tenir compte d'effets non linéaires d'ordre plus élevés. On montre que le terme suivant dont il faut tenir compte est

$$-\frac{\varepsilon^2}{\nu}\left[1 + \frac{(2\alpha-1)^2}{8\nu^2}\right]\left(\eta^3\right)_x \tag{18}$$

2(a) Supposons donc qu'il existe une solution localisée. On aura donc

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \eta = \lim_{|\xi|\to\infty} \eta_\xi = 0. \tag{19}$$

Cela implique donc que $c = 2A = 0$. L'équation se simplifie donc en

$$\eta_\xi^2 \;=\; \beta_1 \eta^2 \frac{\frac{4\beta_2}{3}\eta - 1}{(1-2\beta_2\eta)^2}, \tag{20}$$

Notons ξ_0 le maximum d'amplitude qui correspondra donc au cas $\eta_\xi(\xi_0) = 0$. La dérivée s'annule d'après l'équation (20) uniquement pour les valeurs $\eta(\xi_0) = 0$ et $\eta(\xi_0) = 3/(4\beta_2)$.

2(b) En intégrant l'équation (6) par rapport à la variable ξ, on aboutit à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi \left[\eta_{\xi\xi} + \beta_1\eta - 2\beta_2(\eta\eta_\xi)_\xi\right] \;=\; 0 \tag{21}$$

$$\Bigg[\eta_\xi\Bigg]_{-\infty}^{+\infty} + \beta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\xi\ \eta - \Bigg[2\beta_2(\eta\eta_\xi)\Bigg]_{-\infty}^{+\infty} \;=\; 0 \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

qui se simplifie pour les solutions localisées, en tenant compte des conditions (19), en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta\ \mathrm{d}\xi = 0. \tag{24}$$

2(c) Selon le signe de β_2, on aura donc des extrema tous inférieurs ou égal à zéro (nonpositif pour $\beta_2 < 0$) ou bien tous supérieurs ou égal à zéro (nonnégatif pour $\beta_2 > 0$). Cependant la propriété $\int_{-\infty}^{+\infty} \eta\ \mathrm{d}\xi = 0$, démontrée précédemment, mène dans les deux cas à une contradiction. On ne peut pas avoir de solutions nonnégatives (ou non positives), dont l'intégrale sur l'espace s'annule. Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il n'y avait pas de solutions localisées.

3(a) La vitesse caractéristique du problème est ν. Le domaine supersonique correspond donc aux vitesses $c > \nu$.

3(b) La relation de dispersion des ondes linéaires de l'ODE est donnée par l'expression $\omega^2 = \nu^2 k^2 + \mu$. Si $\beta_1 > 0$, $\mu > 0$. La vitesse de phase $\omega/k = \sqrt{\nu^2k^2+\mu}/k$ augmente donc, lorsque la rotation augmente.

3(c) $\beta_2 < 0$ implique $\alpha < 1/2$. La couche de fluide supérieure est donc plus fine que l'inférieure.

On se placera désormais dans le cas $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 < 0$.

3(d) Comme d'habitude il est possible d'établir une analogie entre l'équation (2) et un problème de mécanique d'une particule fictive repérée par sa position η, la variable "temporelle" étant ξ et se déplaçant dans le potentiel

$$V(\eta) = -\frac{\frac{2\beta_1\beta_2}{3}\eta^3 - \frac{\beta_1}{2}\eta^2 + A}{(1-2\beta_2\eta)^2}, \tag{25}$$

de telle manière que la conservation de l'énergie mécanique conduise à l'équation $E_c + V(\eta) = 0$.

3(e) Le numérateur de la partie droite de l'équation (2) est un polynôme d'ordre trois. Pour que l'on ait une solution périodique, il est nécessaire que les trois zéros soit réels et simples. Notons $a_1 < a_2 < a_3$ les trois zéros du polynôme.

Éliminons la constante A dans le numérateur $N(\eta) = \frac{2\beta_1\beta_2}{3}\eta^3 - \frac{\beta_1}{2}\eta^2 + A$ en utilisant le fait que

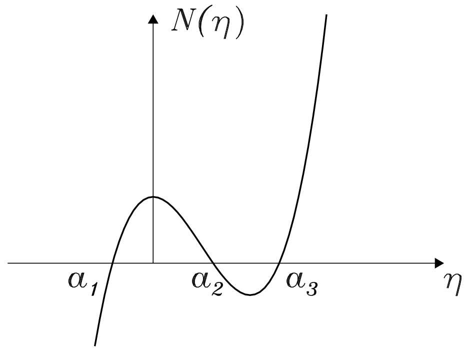

Figure 2: Schéma du modèle à deux couches.

$N(a_3) = 0$. On obtient

$$\begin{aligned} N(\eta) &= \frac{2\beta_1\beta_2}{3}\eta^3 - \frac{\beta_1}{2}\eta^2 - \frac{2\beta_1\beta_2}{3}a_3^3 - \frac{\beta_1}{2}a_3^2 & (26) \\ &= \frac{2\beta_1\beta_2}{3}(\eta^3 - a_3^3) - \frac{\beta_1}{2}(\eta^2 - a_3^2) & (27) \\ &= \frac{\beta_1}{2}(\eta - a_3)\left[\frac{4\beta_2}{3}(\eta^2 + \eta a_3 + a_3^2) - (\eta + a_3)\right] & (28) \\ &= \frac{\beta_1}{2}(\eta - a_3)\left[\frac{4\beta_2}{3}\eta^2 + \left(\frac{4\beta_2}{3}a_3 - 1\right)(\eta + a_3)\right] & (29) \end{aligned}$$

Il y aura trois solutions réelles si le discriminant de l'équation du second degré est positif, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{4\beta_2}{3}a_3 - 1\right)^2 - 4\frac{4\beta_2}{3}\left(\frac{4\beta_2}{3}a_3 - 1\right) & (30) \\ &= \left[\frac{4\beta_2}{3}a_3 - 1 - \frac{16\beta_2}{3}a_3\right]\left(\frac{4\beta_2}{3}a_3 - 1\right) & (31) \\ &= -\left[1 + 4\beta_2 a_3\right]\left(\frac{4\beta_2}{3}a_3 - 1\right) & (32) \\ & & (33) \end{aligned}$$

Comme $a_3 > 0$ et $\beta_2 < 0$, la seconde parenthèse est strictement négative et ne peut pas s'annuler. La condition $\Delta > 0$ pour qu'il y ait 2 solutions réelles est donc $1 + 4\beta_2 a_3 > 0$, i.e. $\beta_2 > -1/(4a_3) = \beta^*$. La solution sera double en $\beta_2 = \beta^*$ et aura pour valeur $a_1 = a_2 = -\left(\frac{4\beta^*}{3}a_3 - 1\right)/(2\frac{4\beta^*}{3}) = -\left(-\frac{1}{3} - 1\right)/(2\frac{4\beta^*}{3}) = 1/(2\beta^*) = -2a_3$.

3(f) Pour cette valeur de β_2, l'équation (2) se simplifie en

$$\begin{aligned} \eta_\xi^2 &= \frac{\frac{4\beta_1\beta^*}{3}(\eta + 2a_3)^2(\eta - a_3)}{(1 - 2\beta^*\eta)^2} & (34) \\ &= -\frac{\frac{\beta_1}{3a_3}(\eta + 2a_3)^2(\eta - a_3)}{\left(1 + \frac{1}{2a_3}\eta\right)^2} & (35) \\ &= -\frac{4a_3\beta_1}{3}(\eta - a_3) & (36) \end{aligned}$$

qui se transforme en

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\eta - a_3}} &= \sqrt{\frac{-4a_3\beta_1}{3}}\mathrm{d}\xi & (37) \\ 2\mathrm{d}(\sqrt{\eta - a_3}) &= \sqrt{\frac{-4a_3\beta_1}{3}}\mathrm{d}\xi & (38) \end{aligned}$$

avant de s'intégrer en

$$\sqrt{\eta - a_3} = \sqrt{\frac{-a_3\beta_1}{3}}(\xi - cste) \tag{39}$$

On choisit la $cste$=0, de manière à ce que $\eta(0) = a_3$ et l'expression est donc $\eta = a_3\left(1 - \frac{\beta_1}{3}\,\xi^2\right)$.

3(g) Comme $\eta = -2a_3$ pour $\xi = 3/\sqrt{\beta_1}$, on en déduit que la longueur d'onde limite est $\lambda_c = 6/\sqrt{\beta_1}$. Le fait que la longueur d'onde ne puisse pas diverger est une conséquence du fait qu'il n'y a pas de solution en onde solitaire, contrairement à ce que l'on avait vu dans le cas de l'équation de KdV.

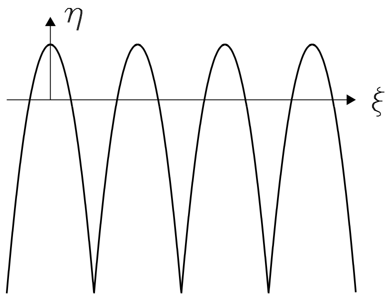

Figure 3: Évolution de la solution lorsque $\beta_2 = \beta$.

3(h) Pour $\beta_2 > \beta^*$, les solutions sont périodiques. La rotation est suffisamment forte pour contrebalancer le terme non linéaire. En revanche lorsque $\beta_2 < \beta^*$, la rotation est trop faible and dans ce régime la solution n'a pas de solution bornée. Dans le premier cas, la rotation est suffisamment forte pour maintenir la cohérence de la marée interne, pas dans le second cas.

4(a) Non, puisqu'il faut deux et seulement deux conditions pour résoudre une équation différentielle ordinaire du deuxième degré.
4(b) À **l'ordre 0**, l'équation à résoudre est

$$(c_0^2 - \nu^2)\eta_{0\xi\xi} + \mu\eta_0 = \mathcal{L}\ \eta_0 = 0, \tag{40}$$

qui définit l'opérateur linéaire et dont la solution est $\eta_0 = A\cos(k\xi) + B\sin(k\xi)$ avec $c_0 = \sqrt{\mu/k^2 + \nu^2}$. En utilisant les conditions initiales précisées dans l'énoncé, on $A = 1$ et $B = 0$. On aboutit donc à

$$\eta_0 = \cos(k\xi). \tag{41}$$

À **l'ordre 1**, l'équation à résoudre est

$$2c_1c_0\eta_{0\xi\xi} + (c_0^2 - \nu^2)\eta_{1\xi\xi} + \mu\eta_1 + \frac{3}{2}(1 - 2\alpha)(\eta_0^2)_{\xi\xi} = 0, \tag{42}$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\ \eta_1 &= -2c_1c_0\eta_{0\xi\xi} - \frac{3}{2}(1 - 2\alpha)(\eta_0^2)_{\xi\xi} && (43)\\ &= 2c_1c_0k^2\cos(k\xi) + \frac{3}{2}(1 - 2\alpha)2k^2\cos(2k\xi). && (44) \end{aligned}$$

Le premier terme de droite est résonnant, il faut donc l'annuler en prenant $c_1 = 0$. Il reste donc

$$\mathcal{L}\ \eta_1 = 3k^2(1 - 2\alpha)\cos(2k\xi), \tag{45}$$

dont la solution de l'équation homogène est toujours $A\cos(k\xi) + B\sin(k\xi)$.

Cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $D\cos(2k\xi)$. En remplaçant dans l'équation, on aboutit à $D = -k^2(1-2\alpha)/\mu$.

La solution complète est donc $A\cos(k\xi) + B\sin(k\xi) - \frac{k^2}{\mu}(1-2\alpha)\cos(2k\xi)$. Comme $\eta_1(0) = 0$ et $\eta_{1\xi}(0) = 0$, on doit avoir $A = \frac{k^2}{\mu}(1-2\alpha)$ et $B = 0$. On aboutit donc à

$$\eta_1(\xi) = \frac{k^2}{\mu}(1-2\alpha)\left[\cos(k\xi) - \cos(2k\xi)\right]. \tag{46}$$

À **l'ordre 2**, l'équation à résoudre est

$$2c_1c_0\eta_{1\xi\xi} + (c_1^2 + 2c_0c_2)\eta_{0\xi\xi} + (c_0^2 - \nu^2)\eta_{2\xi\xi} + \mu\eta_2 + \frac{3}{2}(1-2\alpha)(2\eta_0\eta_1)_{\xi\xi} = 0, \tag{47}$$

qui peut se réécrire comme $c_1 = 0$ sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\,\eta_2 &= -2c_0c_2\eta_{0\xi\xi} - 3(1-2\alpha)(\eta_0\eta_1)_{\xi\xi} && (48)\\
&= 2c_0c_2k^2\cos(k\xi) - \frac{3k^4}{\mu}(1-2\alpha)^2\left[\cos^2(k\xi) - \cos(k\xi)\cos(2k\xi)\right]_{\xi\xi} && (49)\\
&= 2c_0c_2k^2\cos(k\xi) - \frac{3k^4}{\mu}(1-2\alpha)^2\left[\frac{1+\cos(2k\xi) - \cos(k\xi) - \cos(3k\xi)}{2}\right]_{\xi\xi} && (50)\\
&= 2c_0c_2k^2\cos(k\xi) + \frac{3k^4}{2\mu}(1-2\alpha)^2\left[4\cos(2k\xi) - \cos(k\xi) - 9\cos(3k\xi)\right]. && (51)
\end{aligned}$$

Le terme en $\cos(k\xi)$ de droite est résonant, il faut donc l'annuler en prenant $2c_0c_2k^2 - \frac{3k^4}{2\mu}(1-2\alpha)^2 = 0$, qui conduit donc à

$$c_2 = \frac{3k^2}{4c_0\mu}(1-2\alpha)^2 \tag{52}$$

Il reste donc

$$\mathcal{L}\,\eta_2 = \frac{3k^4}{2\mu}(1-2\alpha)^2\left[4\cos(2k\xi) - 9\cos(3k\xi)\right], \tag{53}$$

dont la solution de l'équation homogène est toujours $A\cos(k\xi) + B\sin(k\xi)$. Cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $D\cos(2k\xi) + E\cos(3k\xi)$. En remplaçant dans l'équation, on aboutit à

$$\begin{aligned}
D &= -\frac{2k^4}{\mu^2}(1-2\alpha)^2 && (54)\\
E &= \frac{27k^4}{16\mu^2}(1-2\alpha)^2 && (55)
\end{aligned}$$

La solution complète est donc $A\cos(k\xi) + B\sin(k\xi) + D\cos(2k\xi) + E\cos(3k\xi)$. Comme $\eta_2(0) = 0$ et $\eta_{2\xi}(0) = 0$, on doit avoir $A = \frac{5k^4}{16\mu^2}(1-2\alpha)^2$ et $B = 0$. On aboutit donc à

$$\eta_2(\xi) = \frac{k^4}{16\mu^2}(1-2\alpha)\left[5\cos(k\xi) - 32\cos(2k\xi) + 27\cos(3k\xi)\right]. \tag{56}$$

La solution complète est donc

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{k^2} + \nu^2} + \varepsilon^2\frac{3k^2}{4c_0\mu}(1-2\alpha)^2 \tag{57}$$

et

$$\begin{aligned}
\eta(\xi) &= \cos(k\xi) + \varepsilon\frac{k^2}{\mu}(1-2\alpha)(\cos(k\xi) - \cos(2k\xi))\\
&\quad + \varepsilon^2\frac{k^4}{16\mu^2}(1-2\alpha)\left[5\cos(k\xi) - 32\cos(2k\xi) + 27\cos(3k\xi)\right] + \ldots. && (58)
\end{aligned}$$

4(c) On note que la non-linéarité et la rotation modifient la vitesse de phase.

4(d) La courbe permet de retrouver la solution η

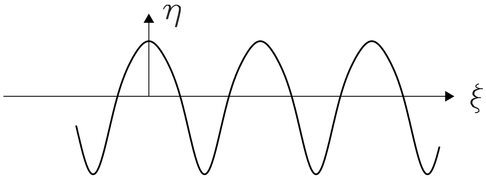

Figure 4: Évolution de la solution.