

Examen du cours “Physique non linéaire”

Jeudi 6 novembre 2008

Instabilités Spatio-Temporelles

Dans le cadre de la convection de Rayleigh-Bénard, considérons l'équation

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \mu A + \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} - |A|^2 A. \quad (1)$$

qui décrit l'évolution spatio-temporelle de l'amplitude des rouleaux ($\mu \in \mathbb{R}^+$). La variable temporelle est notée T et la spatiale X .

1 Seuil de l'instabilité

- 1(a) Quel est le nom de cette équation ?
- 1(b) Donner deux situations physiques dans lesquelles elle apparaît
- 1(c) À quelle condition la solution stationnaire $A = Q e^{iqX}$ est-elle solution de l'équation (1) ? $Q \in \mathbb{R}$.
- 1(d) Tracer dans le plan (q, μ) la zone d'existence de ces solutions.
- 1(e) Etudier la stabilité de ces solutions en cherchant en étudiant le comportement des fonctions r et ϕ définies par

$$A(X, T) = (Q + r(X, T)) \exp i [qX + \phi(X, T)]. \quad (2)$$

- 1(f) Montrer que dans la limite des grandes longueurs d'ondes, il existe deux types de modes : des modes d'amplitudes qui sont amortis et des modes de phases qui ne le sont pas toujours.
- 1(g) Tracer dans le plan (μ, q) l'allure des variations du taux de croissance avec le nombre d'onde.
- 1(h) Tracer le diagramme de l'instabilité distinguant dans le plan (q, μ) la zone où les rouleaux sont stables et celle où ils sont instables.
- 1(i) Pourquoi parle-t-on d'instabilité secondaire ?

2 Sens de l'instabilité

- 2(a) Montrer que si l'on note L la taille du domaine, la fonction

$$\mathcal{L} = \int_0^L dX \left[\left| \frac{\partial A}{\partial X} \right|^2 - \mu |A|^2 + \frac{1}{2} |A|^4 \right] \quad (3)$$

est une fonctionnelle de Lyapunov associée à l'équation (1).

- 2(b) Montrer que pour la solution $A = Q e^{iqX}$, \mathcal{L} peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{L} = \int_0^L dX \ell(q). \quad (4)$$

On donnera l'expression de $\ell(q)$ en fonction de μ et q .

- 2(c) Tracer cette fonction $\ell(q)$ pour une valeur de μ fixée.
- 2(d) Proposer une analogie avec un phénomène de physique statistique permettant d'illustrer cette instabilité.

3 Compression et Dilatation

3(a) De façon à déterminer le processus de changement du nombre d'onde, on propose d'utiliser la transformation de Madelung $A(X, T) = R(X, T) e^{i\phi(X, T)}$. Introduire cette expression dans l'équation (1) et séparer parties imaginaires et réelles.

3(b) Montrer que la recherche des solutions stationnaires de l'équation correspondant à la partie imaginaire conduit à une loi de conservation analogue à la conservation d'un pseudo-moment angulaire que l'on donnera.

3(c) En introduisant la condition ci-dessus dans l'équation correspondant à la partie réelle, proposer une méthode pour trouver les solutions stationnaires. On ne demande pas la solution explicite.

3(d) A quelle condition existe-t-il des solutions bornées ?

3(e) Tracer dans le plan $(R, dR/dX)$ l'allure du portrait de phase.

3(f) Tracer quelques solutions $R = R(X)$ en les repérant sur le portrait de phase.

4 Question Bonus

Lors d'une campagne d'expérience à la plateforme Coriolis de Grenoble, nous avons obtenu le vendredi 19 septembre 2008 les enregistrements suivants.

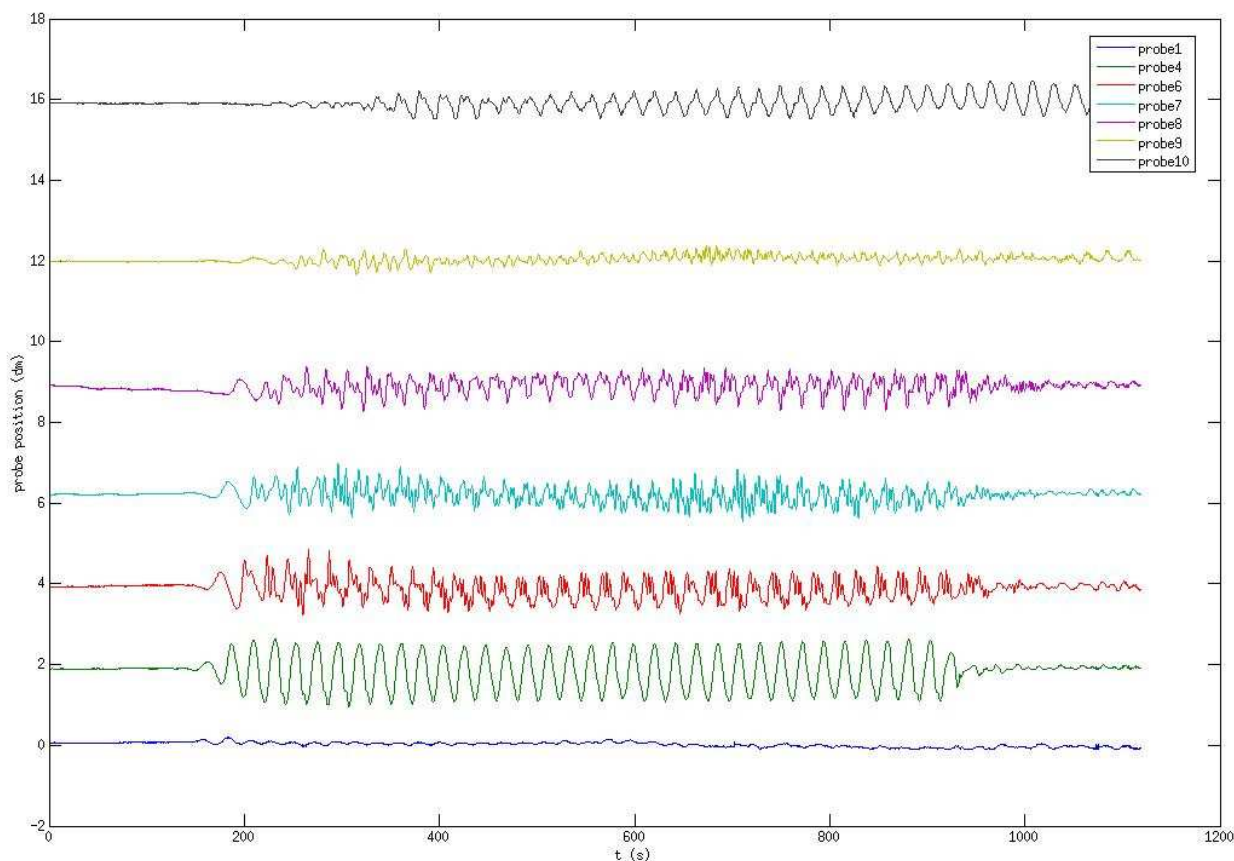


FIG. 1 – Enregistrements par différentes sondes acoustiques du niveau d'une couche d'eau appelée thermocline. Cette couche, située quelques centimètre sous le niveau de la surface, est excitée à une extrémité par un processus que l'on ne décrit pas ici. Chaque courbe reproduit l'évolution temporelle d'une sonde. Les différentes sondes sont de plus en plus éloignées de la zone d'excitation (située entre les 2 enregistrements les plus bas) au fur et à mesure que l'on "monte" dans la figure.

Commenter.

Correction de l'examen du 6 Novembre 2008

1(a) Équation de Ginzburg-Landau.

1(b) Convection de Rayleigh-Bénard, Instabilités de Kelvin-Helmholtz,...

1(c) En remplaçant cette solution dans l'équation, on note immédiatement qu'il faut $Q^2 = \mu - q^2$.

1(d) Pour que cette solution existe, il faut $Q^2 > 0$, et par conséquent $\mu > q^2$. La zone possible se situe donc au dessus de la parabole $\mu = q^2$ (cf. Fig. 2).

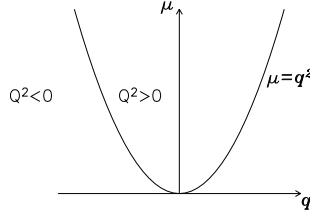


FIG. 2 – Zone d'existence des solutions.

1(e) En introduisant cette expression dans l'équation (1) et en séparant partie réelle et imaginaire, on aboutit au système d'équations

$$\frac{\partial r}{\partial T} = \mu(Q + r) + \frac{\partial^2 r}{\partial X^2} - (Q + r) \left(q + \frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 - (Q + r)^3 \quad (5)$$

$$(Q + r) \frac{\partial \phi}{\partial T} = 2 \frac{\partial r}{\partial X} \left(q + \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + (Q + r) \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}. \quad (6)$$

En linéarisant en r et ϕ , on obtient

$$\frac{\partial r}{\partial T} = \mu(Q + r) + \frac{\partial^2 r}{\partial X^2} - (Q + r)q^2 - 2qQ \frac{\partial \phi}{\partial X} - Q^3 - 3Q^2r \quad (7)$$

$$Q \frac{\partial \phi}{\partial T} = 2q \frac{\partial r}{\partial X} + Q \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}. \quad (8)$$

En utilisant $Q^2 = \mu - q^2$, on aboutit à

$$\frac{\partial r}{\partial T} = -2Q^2r + \frac{\partial^2 r}{\partial X^2} - 2qQ \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} = 2 \frac{q}{Q} \frac{\partial r}{\partial X} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}. \quad (10)$$

Ces deux équations admettent des solutions de la forme $r = r_0 \exp(\eta T + iKX) + c.c.$ et $\phi = \phi_0 \exp(\eta T + iKX) + c.c.$. En effet, en reportant ces solutions dans les deux équations, on note que le système est bien satisfait pourvu que l'on impose des relations liant r_0 et ϕ_0 .

$$(\eta + 2Q^2 + K^2)r_0 + 2qQiK\phi_0 = 0 \quad (11)$$

$$-2 \frac{q}{Q} iK r_0 + (\eta + K^2)\phi_0 = 0. \quad (12)$$

Ce système homogène n'aura de solution non nulle pour r_0 et ϕ_0 qu'à la condition que son déterminant soit nul, i.e.

$$(\eta + 2Q^2 + K^2)(\eta + K^2) + 2qQiK^2 \frac{q}{Q} iK = 0, \quad (13)$$

qui a pour solution

$$\eta_{\pm}(K) = -(Q^2 + K^2) \pm \sqrt{Q^4 + 4K^2q^2}. \quad (14)$$

La somme des solutions étant négatives, l'une au moins est négative. Le produit des deux solutions étant $P = K^2(2Q^2 + K^2 - 2q^2)$, il y aura une solution positive (et donc instable) lorsque $(2Q^2 +$

$K^2 - 4q^2 > 0$. Une condition suffisante est donc que $Q^2 < 2q^2$ qui correspond à $\mu < 3q^2$. La solution $A = Q e^{iqX}$ est donc stable si $\mu > 3q^2$.

1(f) Dans la limite des grandes longueurs d'ondes, la solution η_- s'écrit

$$\eta_-(K) = - \left[Q^2 + K^2 + \sqrt{Q^4 + 4q^2 K^2} \right] = -2Q^2 + O(K^2), \quad (15)$$

qui sera toujours amortie. Ce sont les modes d'amplitude. La solution η_+ s'écrit quant-à-elle

$$\eta_+(K) = - \left[Q^2 + K^2 - \sqrt{Q^4 + 4q^2 K^2} \right] = -K^2 \left(1 - \frac{2q^2}{Q^2} \right) + O(K^4), \quad (16)$$

qui ne sera pas toujours amortie. Ce sont les modes de phase, qui sont presque marginaux ($K \ll 1$). On peut réécrire cette expression sous la forme

$$\eta_+(K) = - \frac{\mu - 3q^2}{\mu - q^2} K^2 - \frac{2q^4}{(\mu - 2q^2)^3} K^4 + O(K^6) \quad (17)$$

qui conduit à une instabilité lorsque $\frac{\mu - 3q^2}{\mu - q^2} < 0$ i.e. lorsque $q^2 < \mu < 3q^2$.

1(g)

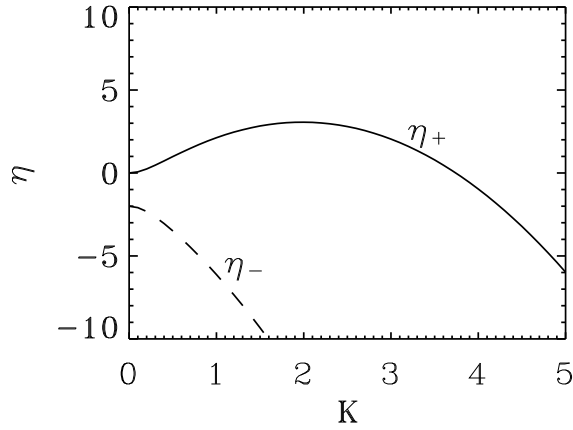


FIG. 3 – Taux de croissance. La courbe continue représente η_+ . La courbe tiretée correspond à η_- .

1(h) Les motifs générant la première instabilité apparaissent à l'intérieur de la parabole extérieure $\mu = q^2$, mais ce motif n'est stable qu'à l'intérieur de la parabole intérieure $\mu = 3q^2$. A l'extérieur de la parabole extérieure, il n'y a pas de rouleaux, mais conduction de la chaleur.

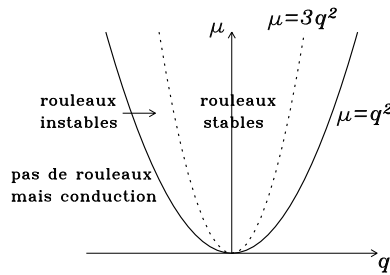


FIG. 4 – Diagramme de l'instabilité d'Eckhaus.

1(i) C'est une instabilité secondaire car elle apparaît (ou pas) après l'instabilité de Rayleigh-Bénard de formation des rouleaux. On appelle cette instabilité, instabilité d'Eckhaus.

2(a) Dérivons la fonctionnelle de Lyapunov par rapport au temps

$$\frac{d\mathcal{L}}{dT} = \int_0^L dX \frac{\partial}{\partial T} \left[\left| \frac{\partial A}{\partial X} \right|^2 - \mu |A|^2 + \frac{1}{2} |A|^4 \right] \quad (18)$$

$$= \int_0^L dX \left[\frac{\partial A}{\partial X} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial X \partial T} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial X} \frac{\partial^2 A}{\partial X \partial T} - \mu \left(A \frac{\partial \bar{A}}{\partial T} + \frac{\partial A}{\partial T} \bar{A} \right) + \left(A^2 \bar{A} \frac{\partial \bar{A}}{\partial T} + A \frac{\partial A}{\partial T} \bar{A}^2 \right) \right]. \quad (19)$$

Intégrons par partie les deux premiers termes :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dT} &= \left[\frac{\partial A}{\partial X} \frac{\partial \bar{A}}{\partial T} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial X} \frac{\partial A}{\partial T} \right]_0^L - \int_0^L dX \left[\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} \frac{\partial \bar{A}}{\partial T} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial X^2} \frac{\partial A}{\partial T} + \mu \left(A \frac{\partial \bar{A}}{\partial T} + \frac{\partial A}{\partial T} \bar{A} \right) - \left(A^2 \bar{A} \frac{\partial \bar{A}}{\partial T} + A \frac{\partial A}{\partial T} \bar{A}^2 \right) \right] \\ &= 0 - \int_0^L dX \left[\frac{\partial \bar{A}}{\partial T} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \mu A - A^2 \bar{A} \right) + \frac{\partial A}{\partial T} \left(\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial X^2} + \mu \bar{A} - A \bar{A}^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$= -2 \int_0^L dX \left| \frac{\partial A}{\partial T} \right|^2. \quad (21)$$

en utilisant Eq. (1) et sa complexe conjuguée. On a une fonctionnelle de Lyapunov puisque $\frac{d\mathcal{L}}{dT} < 0$.

2(b) En substituant $A = Q e^{iqX}$ dans (3), on aboutit à

$$\mathcal{L} = \int_0^L dX \left[|Qiqe^{iqX}|^2 - \mu |Qe^{iqX}|^2 + \frac{1}{2} |Qe^{iqX}|^4 \right] = \int_0^L dX \ell(q) \quad (22)$$

$$\text{avec} \quad \ell(q) = q^2 Q^2 - \mu Q^2 + \frac{1}{2} Q^4 = -\frac{(\mu - q^2)^2}{2}. \quad (23)$$

2(c) La dérivée de $\ell(q)$ conduit à $\ell'(q) = (\mu - q^2)2q$. La fonction $\ell(q)$ s'annule donc en $q = 0$ et $q = \pm\sqrt{\mu}$. Comme $Q^2 = \mu - q^2$ doit être positif, on doit se restreindre à l'intervalle $[-\sqrt{\mu}, +\sqrt{\mu}]$. La figure 5 montre bien que le minimum correspond à $q = 0$.

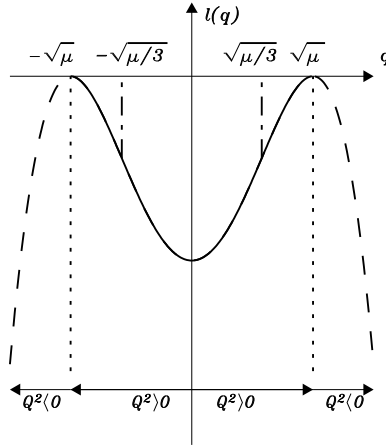


FIG. 5 – Allure de la fonction $\ell(q)$.

2(d) On remarque que le point d'inflexion $\ell''(q) = 0 = -2(3q^2 - \mu) \Rightarrow q = \pm\mu/\sqrt{3}$ correspond au seuil de l'instabilité d'Eckhaus. On a donc $\ell''(q) > 0$ pour $q^2 < 3\mu$ et $\ell''(q) < 0$ pour $q^2 > 3\mu$.

On peut faire l'analogie avec le problème de physique statistique en considérant $\ell(q)$ comme une énergie libre et la zone $\ell''(q) < 0$ à une zone de compressibilité négative qui n'est pas physiquement admissible. L'instabilité d'Eckhaus correspond à une zone de compressibilité négative des patterns périodiques.

3(a) Substituons $A = R e^{i\phi}$ dans l'équation (1) et séparons parties imaginaires et réelles.

$$\frac{\partial R}{\partial T} = \mu R + \frac{\partial^2 R}{\partial X^2} - R \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 - R^3 \quad (24)$$

$$R \frac{\partial \phi}{\partial T} = 2 \frac{\partial R}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial X} + R \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}. \quad (25)$$

3(b) Les solutions stationnaires de l'équation vérifient d'après la seconde équation

$$0 = 2 \frac{\partial R}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial X} + R \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}. \quad (26)$$

En multipliant par R et en intégrant, on aboutit à

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(R^2 \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) = 0 \quad i.e. \quad R^2 \frac{\partial \phi}{\partial X} = \text{cste} = h. \quad (27)$$

On trouve par conséquent une loi analogue à la conservation d'un moment angulaire qui résulte de l'invariance par rotation de l'équation d'amplitude. Cette contrainte empêche le nombre d'onde de changer tout en gardant la même amplitude.

3(c) Si l'on introduit cette nouvelle égalité dans la partie réelle, on aboutit à

$$\frac{\partial^2 R}{\partial X^2} = -\mu R + R^3 + R \left(\frac{h}{R^2} \right)^2 \quad (28)$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$\frac{\partial^2 R}{\partial X^2} = -\frac{\partial V}{\partial R} \quad \text{avec} \quad V(R) = \frac{\mu}{2} R^2 - \frac{1}{4} R^4 + \frac{h^2}{2} \frac{1}{R^2}. \quad (29)$$

Le temps étant noté X , on retrouve le mouvement d'une particule fictive, de masse unité, repérée par sa position R , qui se déplace dans le potentiel effectif $V(R)$.

Comme $R^2 \frac{dV(R)}{dR} = \frac{\mu}{2} R^4 - \frac{1}{4} R^6 + \frac{h^2}{2}$, définissons $S = R^2$ qui conduit à $F(S) = S^3 - \mu S^2 + h^2$. Les extrema du potentiel sont solutions de $F(S) = 0$ (condition nécessaire, pas suffisantes). Pour que $F(S)$ ait une solution dans R^+ , il faut que $dF/dS = S(3S - 2\mu)$ s'annule en $S_m \in R^+$ et que $F(S_m) < 0$. Comme $F(0) = h^2 > 0$ et que $F(2\mu/3) = h^2 - 4\mu^3/27$, la condition est $h^2 \geq 4\mu^3/27$.

3(d) Les extrema locaux correspondent aux solutions stationnaires $\frac{\partial^2 R}{\partial X^2} = 0$. On a donc $h^2 = R_{\pm}^4 (\mu - R_{\pm}^2)$. Il existe des solutions bornées à condition que $V(R_+) > V(R_-)$.

3(e) et (f)

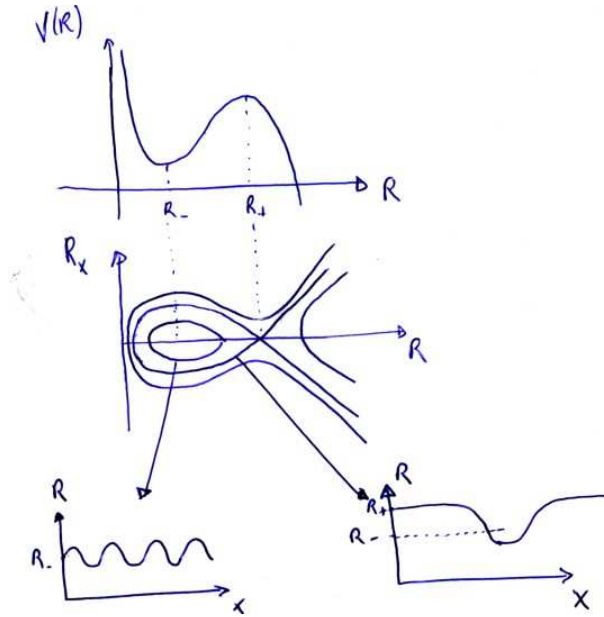


FIG. 6 – Potentiel $V(R)$ et portrait de phase dans le plan (R, R_X) .