

## Examen du cours “Physique non linéaire et Instabilités”

Mercredi 4 novembre 2009

*Les différentes parties sont indépendantes*

### 1 Méthode des caractéristiques

1(a) Trouver la solution non linéaire de l'équation  $u_t + (1 + u)u_x = 0$  aux temps  $\alpha^{-1}$  et  $2\alpha^{-1}$  sachant que l'on part d'un profil initial de la forme

$$u(x, 0) = \begin{cases} \alpha x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \alpha(2 - x) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

1(a) Tracer l'allure de l'onde aux trois instants 0,  $\alpha^{-1}$  et  $2\alpha^{-1}$ .

1(b) Représenter les caractéristiques.

1(c) Quel est l'instant d'apparition du choc ?

## Synchronisation dans les réseaux d'oscillateurs

### 2 Oscillateur auto-entretenu

On considère le système suivant décrivant l'évolution dynamique de deux variables couplées  $x$  et  $y$

$$\dot{x} = -\omega_0 y + \mu x - \alpha(x^2 + y^2)x \quad (2)$$

$$\dot{y} = +\omega_0 x + \mu y - \alpha(x^2 + y^2)y. \quad (3)$$

2(a) Déterminer la signification physique des trois termes à droite du signe égal qui sont caractérisés respectivement par les 3 paramètres  $\omega_0$ ,  $\mu$  et  $\alpha$ .

2(b) Déterminer l'équation de Landau-Stuart vérifiée par la variable complexe  $a = x + iy$ .

2(c) Montrer que si l'on introduit la phase  $A$  et l'amplitude  $\theta$  de  $a$ , on aboutit à 2 équations découplées.

2(d) Discuter la dynamique de ce système selon la condition initiale.

2(e) Justifier que l'on pourra supposer dans la suite que l'oscillateur peut être décrit par l'équation de la phase uniquement.

### 3 Couplage d'oscillateurs avec ses plus proches voisins

Considérons une situation où les oscillateurs sont ordonnés sur une chaîne ou un réseau, les éléments ne communiquant qu'avec leurs plus proches voisins. Il existe de nombreux exemples dans les systèmes fabriqués par l'homme : réseau de lasers, série de jonctions Josephson, ...

Considérons le couplage de  $N$  oscillateurs identiques dont la dynamique de la phase  $\theta$  est donnée par l'équation  $\dot{\theta} = \omega$ . On suppose que le couplage d'un oscillateur  $\theta_1$  à son voisin  $\theta_2$  rajoute un terme  $\varepsilon g(\theta_2 - \theta_1)$  à droite de l'équation,  $\varepsilon$  caractérisant l'intensité du couplage et  $g$  étant une fonction réelle.

3(a) L'exemple le plus simple d'une structure spatiale régulière est une chaîne, où chaque élément interagit avec ses deux voisins. Déterminer l'équation d'évolution de l'oscillateur  $k$  de pulsation  $\omega_k$ .

3(b) Donner l'équation vérifiée par les différences de phase  $\psi_k = \theta_{k+1} - \theta_k$ .

3(c) Dans le cas  $g(\psi) = \sin(\alpha - \psi)$ , montrer que l'interaction est la somme de deux contributions que l'on discutera brièvement.

3(d) Considérons désormais le cas d'un réseau homogène avec  $\sin \alpha = -1$  et  $\omega_k = \omega, \forall k$ . Comment peut-on se ramener à l'équation

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \cos \psi_{k+1} - \cos \psi_{k-1} \quad ? \quad (4)$$

3(e) Si l'on note  $a$  la distance entre oscillateurs, montrer que, dans le cadre de l'approximation des milieux continus, l'équation régissant la dynamique dans le régime des amplitudes intermédiaires s'écrit

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi^n}{\partial x} + \delta \frac{\partial^3 \psi^m}{\partial x^3} = 0. \quad (5)$$

Donner  $n, m, \beta$  et  $\delta$ .

3(f) Discuter cette équation.

3(g) Que peut on dire sur les ondes linéaires solutions de cette équation ?

3(h) On souhaite déterminer les solutions localisées de l'équation non linéaire se propageant à la vitesse  $v$ . Montrer que par une procédure standard on aboutit à une équation du type

$$\psi^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi}{ds} \right)^2 + V(\psi) \right] = 0. \quad (6)$$

On prendra  $a = 1$  et à un moment, on pourra multiplier l'équation par  $\psi \psi_s$  où  $s = x - vt$ . Donner l'expression de  $V(\psi)$ .

3(i) Déterminer les solutions localisées de cette équation. Les dessiner.

3(j) Montrer qu'il existe des solutions compactons.

3(k) Quel est le lien entre l'amplitude et la largeur du compacton ?

3(l) Discuter le régime des grandes vitesses.

## 4 Couplage global d'oscillateurs

Étudions la synchronisation d'un grand nombre d'oscillateurs qui interagissent tous, les uns avec les autres en étudiant le modèle introduit par Y. Kuramoto en 1984

$$\frac{d\theta_k}{dt} = \omega_k + \varepsilon \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N \sin(\theta_\ell - \theta_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (7)$$

4(a) Pourquoi Kuramoto a-t-il introduit le préfacteur  $1/N$  ?

4(b) On introduit le paramètre d'ordre complexe  $Z = \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N \exp(i\theta_\ell) = K e^{i\Phi}$ . Que vaut le module  $K$  si les phases sont aléatoires ? Si elles sont proches ?

4(c) Représenter sur un cercle les deux situations, synchronisée et non synchronisée, en indiquant les positions typiques des  $N$  phases  $\theta_k$ .

4(d) Réécrire l'équation (7) de manière concise en utilisant le paramètre d'ordre.

4(e) Expliquer pourquoi cette équation peut faire croire que les oscillateurs sont découplés. Justifier que ce n'est cependant pas le cas.

4(f) Expliquer pourquoi la phase  $\theta_k$  est tirée vers la phase moyenne  $\Phi$ , plutôt que vers la phase d'un oscillateur particulier. Quelle est la quantité qui contrôle la force du couplage ? Expliquer le comportement physique auquel on peut s'attendre ?

4(g) En cherchant des solutions avec le module  $K$  constant et la phase  $\Phi$  en rotation uniforme à la pulsation  $\Omega$ , déterminer la condition de synchronisation.

4(h) Quel est le comportement du paramètre d'ordre si l'on étudie le système à l'aide de simulations numériques ?

Pour en savoir plus, on pourra se référer à A. Pikovsky *Synchronization of regular and chaotic oscillators*, dans T. Dauxois, S. Ruffo, L. Cugliandolo (Eds.), *Long-Range Interacting Systems*, Oxford University Press (2009).

# Correction de l'examen du 4 Novembre 2009

## 1 Méthode des caractéristiques

1(a) En développant la dérivée particulière, on a

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = -(1+u)u_x + u_x \frac{dx}{dt} = u_x \left[ \frac{dx}{dt} - (1+u) \right]. \quad (8)$$

Sur la courbe  $\frac{dx}{dt} = 1+u$ ,  $u$  sera donc constant. La courbe est donc finalement une droite puisque l'on a  $x = (1+u)t + x_0$ .

Si l'on connaît la condition initiale  $f(x_0) = u(x_0, 0)$ , on a  $u(x, t) = f(x - (1+u)t)$

i) Ici  $f(x_0) = \alpha x_0$  si  $0 \leq x_0 < 1$  i.e.  $u(x, t) = \alpha[x - (1+u)t] \rightarrow u(x, t) = \alpha(x-t)/(1+\alpha t)$  si  $0 \leq \frac{x-t}{1+\alpha t} < 1$ .

ii) Ici  $f(x_0) = \alpha(2-x_0)$  si  $1 \leq x_0 < 2$  i.e.  $u(x, t) = \alpha[2-x+(1+u)t] \rightarrow u(x, t) = \alpha(2-x+t)/(1-\alpha t)$  si  $1 \leq \frac{x-t-2\alpha t}{1-\alpha t} < 2$ .

À l'instant  $t = 1/\alpha$ , on a pour  $0 \leq \frac{x-1/\alpha}{1+\alpha/\alpha} < 1$  i.e.  $1/\alpha \leq x < 2 + 1/\alpha$  on a  $u = \alpha(x - 1/\alpha)/(1 + \alpha/\alpha) = \alpha(x - 1/\alpha)/2$ . La partie initialement descendante devient verticale puisque le dénominateur s'annule : c'est donc un choc pour l'autre partie du triangle.

À l'instant  $t = 2/\alpha$ , on a pour  $0 \leq \frac{x-2/\alpha}{1+\alpha 2/\alpha} < 1$  i.e.  $2/\alpha \leq x < 3 + 2/\alpha$  on a  $u = \alpha(x - 2/\alpha)/(1 + \alpha 2/\alpha) = \alpha(x - 2/\alpha)/3$ . Pour l'autre partie,  $u(x, t) = \alpha(2 - x + 2/\alpha)/(1 - \alpha 2/\alpha) = \alpha(x - 2 - 2/\alpha)$

1(b)

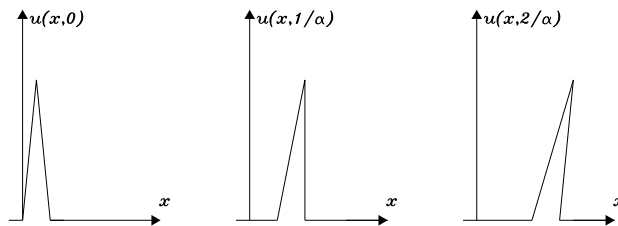


FIGURE 1 – Evolution de la condition initiale  $u(x, 0)$ .

1(d) Le choc a lieu à l'instant  $t = \alpha^{-1}$  puisque la vitesse  $u$  devient multivaluée.

## 2 Oscillateur auto-entretenu

2(a) Signification physique des différents termes

- Le premier terme correspond à une force de rappel (oscillation linéaire) :  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ .
- Le deuxième à une source d'énergie :  $\dot{\vec{x}} = \mu \vec{x}$ .
- Le dernier à une saturation non linéaire :  $\ddot{\vec{x}} = (\mu - \alpha \vec{x}^2) \vec{x}$ .

2(b) En introduisant la variable complexe  $a = x + iy$ , on aboutit à

$$\frac{da}{dt} = i\omega_0 a + (\mu - \alpha |a|^2) a. \quad (9)$$

2(c) À partir de  $a = A \exp(i\theta)$ , en séparant parties réelle et imaginaire, on aboutit à

$$\dot{\theta} = \omega_0 \quad (10)$$

$$\dot{A} = (\mu - \alpha A^2) A. \quad (11)$$

2(d) Quelque soit la condition initiale, le système va tendre vers un cycle limite qui est donné par  $A = |a| = \sqrt{\mu/\alpha}$ . La phase tourne uniformément avec la vitesse  $\omega_0$  autour du cycle limite.

2(e) Le cycle limite est stable puisque si l'on considère  $A = \sqrt{\mu/\alpha} + \beta(t)$ , on obtient  $\dot{A} = \dot{\beta} = -2\mu\beta + \mathcal{O}(\beta^2)$  ce qui montre que la perturbation  $\beta$  décroît : la variable d'amplitude  $A$  relaxe vers la

valeur sur le cycle limite. En revanche, la phase est neutralement stable : une perturbation ne croit ni ne décroît jamais.

### 3 Couplage d'oscillateurs auto-entretenus au plus proches voisins

3(a) On obtient l'équation

$$\frac{d\theta_k}{dt} = \omega_k + \varepsilon g(\theta_{k+1} - \theta_k) + \varepsilon g(\theta_{k-1} - \theta_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (12)$$

3(b) L'équation s'écrit

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \omega_{k+1} - \omega_k + \varepsilon [g(\psi_{k+1}) + g(-\psi_k) - g(-\psi_{k-1}) - g(\psi_k)]. \quad (13)$$

3(c) Le cas  $g(\psi) = \sin(\alpha - \psi)$  conduit à

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \omega_{k+1} - \omega_k + \varepsilon \cos \alpha [\sin \psi_{k+1} + \sin \psi_{k-1} - 2 \sin \psi_k] + \varepsilon \sin \alpha [\cos \psi_{k-1} - \cos \psi_{k+1}]. \quad (14)$$

- un terme dissipatif (diffusif) proportionnel à  $\cos \alpha$ .
- un terme conservatif proportionnel à  $\sin \alpha$ .

Les situations purement dissipatives ( $\sin \alpha = 0$ ) et purement conservatives ( $\cos \alpha = 0$ ) ont été largement discutées dans la littérature ; le cas général peu.

3(d) Par un simple changement de variable temporelle, on aboutit à l'équation sans paramètre (4).

3(e) L'approximation des milieux continus s'écrit

$$\psi_{k\pm 1} = \psi(x = (k \pm 1)a) = \psi(x = ka) \pm a\psi_x + \frac{a^2}{2}\psi_{xx} \pm \frac{a^3}{6}\psi_{xxx} + \dots \quad (15)$$

On a alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \cos \left( \psi + a\psi_x + \frac{a^2}{2}\psi_{xx} + \frac{a^3}{6}\psi_{xxx} + \dots \right) - \cos \left( \psi - a\psi_x + \frac{a^2}{2}\psi_{xx} - \frac{a^3}{6}\psi_{xxx} + \dots \right) \quad (16)$$

En utilisant le développement  $\cos \psi \approx 1 - \psi^2/2$ , on aboutit alors à

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left( \psi + a\psi_x + \frac{a^2}{2}\psi_{xx} + \frac{a^3}{6}\psi_{xxx} + \dots \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \psi - a\psi_x + \frac{a^2}{2}\psi_{xx} - \frac{a^3}{6}\psi_{xxx} + \dots \right)^2 \quad (17)$$

$$= -2a\psi\psi_x - a^3\psi_x\psi_{xx} - \frac{a^3}{3}\psi\psi_{xxx} + \dots \quad (18)$$

$$= -a \frac{\partial \psi^2}{\partial x} - \frac{a^3}{6} \frac{\partial^3 \psi^2}{\partial x^3} + \dots \quad (19)$$

En se limitant à l'ordre le plus bas, on a finalement l'équation (5), avec  $n = m = 2$ ,  $\beta = a$  et  $\delta = a^3/6$ .

3(f) Cette équation ressemble beaucoup à l'équation de Korteweg-de Vries, mais le terme dispersif avec la dérivée d'ordre trois est non linéaire. Rosenau et Hyman (Phys. Rev. Lett. **70**, 564–567 (1993)) ont été les premiers à réaliser que cet ingrédient permettait l'existence de solutions fortement localisées.

3(g) C'est une équation onde non linéaire avec une propriété tout à fait remarquable : il n'y a pas de solutions en ondes planes linéaires, lorsque l'on considère de faibles perturbations de l'état homogène  $\psi = 0$  – toute perturbation est par essence non linéaire. On parle de vide sonique.

3(h) Posons  $a = 1$  (ou passons à la variable sans dimension  $y = x/a$ ). On utilise l'ansatz habituel  $\psi(x, t) = \psi(x - vt) = \psi(s)$  qui donne après intégration

$$-v\psi + \psi^2 + \frac{1}{6} \frac{d^2 \psi^2}{ds^2} = \text{Cste} . \quad (20)$$

La constante est prise égale à zéro puisque l'on cherche une solution localisée. En multipliant par  $\psi\psi_s$ , on a alors

$$-v\psi^2\psi_s + \psi^3\psi_s + \frac{1}{12} \frac{d\psi^2}{ds} \frac{d^2\psi^2}{ds^2} = 0, \quad (21)$$

qui donne après intégration

$$-v\frac{1}{3}\psi^3 + \frac{1}{4}\psi^4 + \frac{1}{12} \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi^2}{ds} \right)^2 = \text{Cste} = 0, \quad (22)$$

c'est à dire l'équation (6) avec  $V(\psi) = \frac{3}{4}\psi^2 - v\psi$ .

3(i) Outre la solution triviale  $\psi = 0$ , l'équation (6) a comme solution

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\psi}{ds} \right)^2 + V(\psi) = 0, \quad (23)$$

qui n'est rien d'autre qu'une équation de conservation de l'énergie d'une particule demassue unité, non dissipative, se déplaçant dans le potentiel parabolique  $V(\psi)$ . L'équation du mouvement correspondante est

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + \frac{3}{2}\psi = v \quad (24)$$

qui a pour solution  $\psi = 2v/3 + A \cos(\sqrt{3/2}s)$ . Comme la solution passe par zéro, on a  $A = 2v/3$  qui conduit à  $\psi(s) = \frac{4v}{3} \cos^2 \sqrt{\frac{3}{8}}s$ .

3(j) Cette solution s'annule, et peut coïncider avec la solution triviale  $\psi = 0$  : cette non unicité posent des problèmes pour la résolution de l'équation différentielle dans son sens habituel. Ici, la non unicité de la solution est directement reliée au fait que le terme avec la plus grande dérivée dans l'équation (5) est non linéaire et devient singulier en  $\psi = 0$ . On peut donc combiner les deux solutions en une solution de type onde solitaire

$$\psi(s) = \begin{cases} \frac{4v}{3} \cos^2 \sqrt{\frac{3}{8}}s & \text{if } s < \sqrt{\frac{2}{3}}\pi, \\ 0 & \text{if } s > \sqrt{\frac{2}{3}}\pi, \end{cases} \quad (25)$$

qui aura un support compact et que l'on appelle *compacton*.

3(k) Il est intéressant de noter que la largeur de cette onde ne dépend pas de son amplitude, alors que la vitesse est proportionnelle à l'amplitude.

3(l) Pour les grandes vitesses, l'onde n'est plus d'amplitude intermédiaire. Comme nous avons obtenu la forme du compacton dans la limite des amplitudes intermédiaires, il n'est plus justifié d'utiliser cette expression. Une autre méthode analytique est possible. L'intégration numérique appropriée de l'équation complète, pour des grandes amplitudes, est tout à fait possible et donne des résultats similaires [Rosenau & Pikovsky (2005) *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 174102; Pikovsky & Rosenau (2006), *Physica D*, **218**, 56–69. Ahnert & Pikovsky (2008), *Chaos*, **18**(3), 037118.]

## 4 Couplage global d'oscillateurs

4(a) Il faut renormaliser le couplage comme lorsque l'on étudie en mécanique statistique l'approximation de champ moyen. Sinon plus le système est grand plus la force est importante.

4(b) Si les phases sont aléatoirement réparties sur le cercle unité,  $K \simeq 0$  : c'est l'état non désynchronisé. Au contraire, dans l'état synchronisé toutes les phases seront proches du même point, et l'on aura  $K \simeq 1$ .

4(c) Dessin

4(d) En développant le sinus, on obtient

$$\frac{d\theta_k}{dt} = \omega_k + \varepsilon \frac{1}{N} \sum_l (\sin \theta_l \cos \theta_k - \sin \theta_k \cos \theta_l) \quad (26)$$

$$= \omega_k + \varepsilon \cos \theta_k \left( \frac{1}{N} \sum_l \sin \theta_l \right) - \varepsilon \sin \theta_k \left( \frac{1}{N} \sum_l \cos \theta_l \right) \quad (27)$$

$$= \omega_k + \varepsilon \cos \theta_k X - \varepsilon \sin \theta_k Y \quad (28)$$

$$= \omega_k + \varepsilon \cos \theta_k K \cos \Phi - \varepsilon \sin \theta_k K \sin \Phi \quad (29)$$

$$= \omega_k + \varepsilon K \sin(\theta_k - \Phi). \quad (30)$$

4(e) Cette équation peut effectivement faire croire que les oscillateurs sont découplés. Il n'en est cependant rien, puisque les équations sont couplées à travers le module et la phase du paramètre d'ordre  $Z$ . On pourrait envisager d'essayer d'écrire l'équation d'évolution du paramètre d'ordre  $Z$ , mais l'équation  $\dot{Z} = \dots$  ne dépend pas que de  $Z$  et n'est donc pas fermée.

4 (f) De manière plus spécifique, la phase  $\theta_k$  est donc tirée vers la phase moyenne  $\Phi$ , plutôt que vers la phase d'un oscillateur particulier. Par ailleurs, la force de couplage est directement proportionnelle à la cohérence  $K$ . Cette proportionnalité crée un feedback positif entre le couplage et la cohérence. Lorsque la population devient plus cohérente,  $K$  croît et le couplage effectif  $K\varepsilon$  augmente, ce qui a tendance à collecter encore plus d'oscillateurs dans le groupe d'oscillateurs synchronisés.

4 (g) En prenant donc  $\Phi = \Omega t$ , l'équation (30) conduit à

$$\frac{d\theta_k}{dt} = \omega_k + \varepsilon K \sin(\theta_k - \Omega t). \quad (31)$$

On est donc ramené à l'équation d'un oscillateur forcé de manière périodique. Il y a donc deux situations possibles.

Si le forçage est suffisant, i.e.  $\varepsilon K > |\omega_k - \Omega|$ , on est à l'intérieur de la langue d'Arnold, et le système est synchronisé :  $\theta_k = \Omega t + \psi_k$ , avec  $\omega_k + \varepsilon K \sin \psi_k = 0$ . Ces oscillateurs seront accrochés sur la fréquence  $\Omega$ . Au contraire, les oscillateurs avec  $\varepsilon K < |\omega_k - \Omega|$ , ne seront pas synchronisés :  $\dot{\theta}_k \neq \Omega$ . Ils tourneront autour du cercle de manière non uniforme. Cette explication due à Kuramoto explique donc simplement pourquoi le système se divise en deux groupes.

4 (h) Les simulations montrent que pour toute valeur de  $K$  inférieure à une valeur critique  $K_c$ , les oscillateurs agissent comme s'ils étaient découplés : les phases se distribuent de manière uniforme autour du cercle, et cela à partir de n'importe quelle condition initiale. Par la suite  $K(t)$  oscille pour atteindre zéro avec des fluctuations d'ordre  $N^{-1/2}$  comme on peut l'attendre.

En revanche, lorsque  $K > K_c$ , cet état incohérent devient instable et  $K(t)$  croît de manière exponentielle du fait de la nucléation d'un petit cluster d'oscillateurs qui se synchronisent. Le module du paramètre d'ordre sature à une valeur  $K_\infty < 1$  avec toujours des fluctuations d'ordre  $N^{-1/2}$ .

La population des oscillateurs se divisent en deux groupes, ceux près du centre de la distribution qui se synchronisent sur la pulsation  $\Omega$ , alors que ceux près des queues tournent à leur pulsation propre. Plus on augmente  $K$ , plus le nombre d'oscillateurs synchronisés augmentent.