# ITECH LYON

## CONCOURS D'ENTREE 1993

## Epreuve de Mathématiques

**Problème I.**

Soit $\alpha$ un nombre réel strictement positif. Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} \, du \quad .$$

**Partie A**

1. Montrer que l'intégrale ci-dessus est convergente.

2. Calculer $F_1(x)$ et $F_{1/2}(x)$.

3. Trouver la limite, quand $x > 0$ tend vers 0, de $F_\alpha(x)$.

4. Montrer que, sur l'intervalle $x > 0$, la fonction $x \to F_\alpha(x)$ est la seule solution de l'équation différentielle :

$$(E_\alpha) \qquad x\frac{dy}{dx} + \alpha y = \frac{1}{1+x}$$

qui ait une limite finie quand la variable $x > 0$ tend vers 0.

5.a. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $F_\alpha(x) \geq \dfrac{1}{\alpha(1+x)}$

b. Montrer que, sur l'intervalle $x > 0$, la fonction $x \to F_\alpha(x)$ est décroissante.

6.a. Si $\alpha > 1$, montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $F_\alpha(x) \leq \dfrac{1}{(\alpha-1)x}$

b. Si $0 < \alpha < 1$, montrer qu'il existe un nombre réel $c_\alpha$, ne dépendant que de $\alpha$, tel que, pour tout $x > 0$, on ait :

$$F_\alpha(x) \leq \frac{c_\alpha}{x^\alpha}$$

7.a. Trouver une relation simple entre $F_\alpha(x)$ et $F_{\alpha+1}(x)$.

b. En déduire la limite, quand $x$ tend vers $+\infty$, de $x\ F_{\alpha+1}(x)$.

## Partie B

1. $b$ étant un nombre réel $> 0$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$ en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples.

2. On pose $\alpha = 1/3$ et $x = 1/8$. Dans l'intégrale définissant $F_\alpha(x)$, avec $\alpha = 1/3$, effectuer le changement de variable $u = t^3$. En déduire que

$$F_{1/3}(1/8) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \mathrm{Log}(3) \quad .$$

3. On suppose que $\alpha$ est un nombre rationnel $p/q$, où $p$ et $q$ sont deux entiers $> 0$. Montrer que, dans ce cas, par un changement de variable convenable dans l'intégrale définissant $F_\alpha(x)$, on ramène la détermination de $F_{p/q}(x)$ au calcul de la primitive d'une fraction rationnelle.

4.a. Montrer que, si $q$ est un entier positif impair, on a pour tout $x > 0$ :

$$\sum_{p=1}^{p=q} (-1)^{p+1}\, x^{p/q}\, F_{p/q}(x) = q\ \mathrm{Log}(1+\sqrt[q]{x}) \quad .$$

b. Calculer $F_{2/3}(1/8)$.

## Partie C

1. Montrer que, si $|x| < 1$, la série :

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{x}{1+\alpha} + \frac{x^2}{2+\alpha} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n+\alpha} + \ldots$$

converge, et que sa somme est solution de l'équation différentielle $(E_\alpha)$.

En déduire une expression de cette somme pour $0 < x < 1$.

2. Quelles sont les sommes des séries :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{8^n(3n+1)} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{8^n(3n+2)} \quad ?$$

**Problème II.**

Dans tout ce qui suit le plan est rapporté à un repère orthonormé $Oxy$ orienté dans le sens direct ; $a$ est une longueur (pour le dessin, on prendra $a = 4$ cm). Pour tout compact $K$, $S(K)$ désigne l'aire intérieure à $K$.

1. Construire, pour $k = 0$ et 1, la courbe $(C_k)$ d'équation polaire :

$$r_k = a \ \cos 3(\theta - \frac{k\pi}{3})$$

K étant le compact dont le bord $b(K)$ est l'arc d'équation polaire :

$$r_0 = a \ \cos 3\theta, \quad \theta \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}],$$

orienté dans le sens des $\theta$ croissants, calculer $S(K)$.

2. Calculer $X = \frac{1}{S(K)} \int_K x \, dxdy$ et $Y = \frac{1}{S(K)} \int_K y \, dxdy$ . Quelle est la signification du point $G$ de coordonnées $(X, Y)$ ?

3. Construire le cercle d'équation polaire $r = a/8$ (on noircira son intérieur $D$). On note $\theta_0$ l'angle polaire du point appartenant à $b(K) \cap D$ situé dans le premier quadrant. On appelle *pétale* $P$, l'ensemble $K - D$ et tous les analogues déduits par rotations (les pétales seront coloriées en jaune). Calculer $S(P)$ en fonction de $\theta_0$.

4. Construire la courbe $T$, dite *tige*, d'équations paramétriques :

$$x = a(1 + \cos(2\phi)), \quad y = -2a\sqrt{2} \ |\cos\phi|$$

Déterminer l'équation cartésienne de la tige. Calculer la longueur de $(T)$. Déterminer le rayon et le centre de courbure en tout point de $(T)$.

5. Pour chaque $k$ réel non nul, on considère la courbe $(\Gamma_k)$ d'équation :

$$y = \frac{1}{ka^3}\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^4$$

On appelle *feuille* (resp. *nervure*), la courbe $(F)$ (resp. $(N)$) déduite de $(\Gamma_3) \cup (\Gamma_{-4})$ (resp. $(\Gamma_{-16})$) par la translation de vecteur $(a, -2a)$, puis la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, où $\varepsilon$ est un nombre strictement positif que l'on choisira.

Construire feuille et nervure (l'intérieur de la feuille sera colorié en vert). Proposer une paramétrisation pour $(\Gamma_k)$. L'ensemble des courbes tracées est dit *fleur*.