Thierry DAUXOIS Année 1998-1999

PHYSIQUE DES PLASMAS - T.D. **n° 1**

COLLISIONS ET FRICTION

I- Conductivité électrique

On considère un gaz ionisé constitué d'électrons de masse m_e et de charge $q_e = -e$ et d'ions de masse m_i et de charge $q_i = Z_i e$. On note n_e et n_i, les densités électronique et ionique.

1. Rappeler l'expression de la fréquence ν de transfert d'impulsion électron-ion. Comment décroî t cette fréquence aux grandes vitesses ?

On supposera dans la suite que le terme logarithme lentement variable qu'elle contient est constant et égal à la valeur qu'il prend pour une vitesse caractéristique de la distribution.

2. En déduire une estimation grossière de la conductivité d'un plasma.

3. On applique maintenant un champ $\vec{E} = E\,\vec{e_x}$ au plasma. On suppose que les ions sont au repos et que la population d'électrons est décrite par une fonction de distribution maxwellienne centrée autour d'une vitesse moyenne $\vec{V_0}(t)$ parallèle à (Ox)

$$f_e(\vec{v},t) = n_e \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e}{2k_B T_e}|\vec{v} - \vec{V_0}(t)|^2\right). \qquad (1)$$

Ecrire l'équation du mouvement à laquelle obéissent les électrons au bout de quelques collisions avec les ions.

4. En déduire l'évolution de la vitesse moyenne de la population électronique, $\vec{V_0}(t)$, sous la forme

$$m\frac{d\vec{V_0}(t)}{dt} = q_e\vec{E} + \vec{F}(\vec{V_0}(t)), \qquad (2)$$

où $\vec{F}(\vec{V_0}(t))$ est une force de friction qui s'exprime sous la forme d'une intégrale faisant intervenir f_e.

5. En utilisant une analogie électrostatique et le théorème de Gauss, montrer que $\vec{F}(\vec{V_0})$ s'exprime simplement en fonction de

$$\mu(X) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\ X \int_0^1 dt\ t^2 \exp(-X^2 t^2)$$
$$\text{avec} \quad X = \frac{|\vec{V_0}|}{a} \quad \text{et} \quad a = \sqrt{\frac{2k_B T_e}{m_e}}. \qquad (3)$$

En déduire la conductivité du plasma lorsque le champ $\vec{E}$ est suffisamment faible.

II- Electrons de conduction et électrons "run away"

1. Un champ électrique $\vec{E} = -E\vec{e_x}$ règne dans le plasma sur une longueur l. Si l'on oublie la dépendance en vitesse de la fréquence ν, à quelle condition le mouvement permanent est-il atteint avant que les électrons aient parcouru la distance l.

Si l'on tient compte maintenant de cette dépendance, indiquer qualitativement le comportement du plasma en présence du champ $\vec{E}$.

2. On modélise pour simplifier la fréquence $\nu(v)$ par la forme suivante

$$\nu(v) = \nu_0 \, \frac{v/v_0}{1 + (v/v_0)^4} \tag{5}$$

où ν_0 et v_0 sont des constantes.

Montrer qu'il existe une valeur critique E_c de l'intensité du champ électrique au delà de laquelle le mouvement des électrons ne peut relaxer vers un régime de conduction.

On introduira le paramètre $\alpha = (m_e \nu_0 v_0)/(2eE)$.

3. Au dessous de cette valeur critique, quelles sont les valeurs possibles de la vitesse en régime permanent ?

En étudiant la stabilité de ces états, montrer que les électrons se partagent en deux catégories en fonction de leur vitesse à l'entrée de la couche où règne le champ.

4. A partir de la relation fondamentale de la dynamique, obtenir une équation différentielle sur la variation spatiale $\epsilon(x)$ de l'énergie cinétique réduite $\epsilon = m_e v^2/(m_e v_0^2)$.

En s'aidant d'une discussion graphique, en déduire que :

- si $E > E_c$, tous les électrons gagnent une énergie correspondant approximativement à la variation d'énergie potentielle à la traversée de la couche.

- si $E < E_c$, au dessous d'une vitesse initiale critique à préciser, les électrons participent à un mouvement de conduction, tandis que les électrons plus rapides gagnent une énergie correspondant approximativement à la variation d'énergie potentielle à la traversée de la couche.

Conclure.

III. Interactions électrons-neutres

Préliminaires : soient deux populations de particules interagissant par un potentiel $U(r) = -k/r^n$. Comment se généralise la formule de Rutherford pour la diffusion aux petits angles (c'est-à-dire lorsque l'énergie potentielle de la collision est négligeable devant l'énergie cinétique) ? Pour quelles valeurs de n la fréquence de transfert d'impulsion diverge-t-elle ?

On suppose que des électrons interagissent avec des molécules neutres polarisables de densité numérique $n_\star$. Le passage d'un électron au voisinage d'une molécule induit un moment dipolaire proportionnel au champ de l'électron, qui se traduit par une énergie potentielle d'interaction de la forme $U = -k/r^4$.

1. Définir le paramètre de couplage des électrons avec les molécules. A quelle condition les interactions lointaines sont-elles dominantes ?

On note $b_0 = (k/m_e v_-^2)^{1/4}$, où v_- désigne la vitesse de l'électron par rapport à la molécule. Montrer qu'il existe une relation entre le paramètre d'impact b et l'angle de déflexion χ du vecteur quantité de mouvement, de la forme $b = b_0 g(\chi)$ (on ne cherchera pas à calculer cette fonction g).

En déduire que la fréquence ν de transfert de quantité de mouvement est indépendante de v_-. Donner une estimation grossière de ν.

2. Montrer que la fréquence de diffusion angulaire $\nu_s \equiv \frac{1}{v_-^2}\langle\frac{\Delta v_\perp^2}{\Delta t}\rangle$ est telle $\nu_s \simeq 2\nu$.

3. a. On suppose que la distribution des électrons est homogène et isotrope, i.e. $f_e(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_e(|\vec{v}|, t)$. En tenant compte de ces symétries, donner la forme générale de l'équation de Fokker-Planck à laquelle obéit la fonction de distribution des électrons.

b. Les neutres sont en équilibre à la température $T^\star$. Sachant que les électrons vont relaxer vers un état d'équilibre global avec les neutres, en déduire la valeur du coefficient de diffusion Γ dans l'espace des impulsions.

4. Si l'on revient à une description stochastique du mouvement des électrons dans cette population de molécules, on peut alors écrire

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\nu\vec{p} + \vec{F}(t) \tag{6}$$

où $\vec{F}(t)$ est la force aléatoire subie par l'électron lors des collisions individuelles avec les molécules.

Qu'est-ce qui permet de considérer cette force comme un bruit à temps de corrélation court.

Quel est le lien entre $\vec{F}(t)$, ν et Γ ? En estimant $\langle\vec{F}^2\rangle$ et en utilisant l'estimation précédente de ν, donner un ordre de grandeur du temps de corrélation de la force. Conclure quant à la validité de la théorie de Fokker-Planck.