Thierry DAUXOIS **Année 1998-1999**

PHYSIQUE DES PLASMAS - T.D. n° 4

L'EQUATION DE LANGEVIN

On s'intéresse au mouvement d'une particule mésoscopique de masse m dans un fluide porteur à l'équilibre thermodynamique caractérisé par la température T. La particule est soumise à une force d'origine extérieure $\vec{F}_{\text{ext}}$ ainsi qu'à l'action des molécules du fluide. La force exercée par celles-ci se décompose en une composante moyenne $-\xi m\vec{v}$ et une composante fluctuante $\vec{R}(t)$ de valeur moyenne nulle. On note $<>$ la valeur moyenne prise sur un ensemble statistique d'échantillons (on parlera de moyenne sur les réalisations de $\vec{R}$).

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule s'écrit:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\xi m\vec{v} + \vec{R}(t) + \vec{F}_{\text{ext}}.$$

L'équation précédente a été introduite par Langevin en 1907 et de façon générale, sert à modéliser le couplage des degrés de liberté "rapides" (ceux du fluide porteur constitué de particules microscopiques) avec des degrés de liberté "lents" (ceux de la particule mésoscopique). On suppose en effet que l'échelle temporelle des variations de la force fluctuante est très inférieure à l'échelle sur laquelle la vitesse varie: la fonction d'autocorrélation $<\vec{R}(t).\vec{R}(t')>=C(t-t')$ n'est différente de zéro que pour des intervalles de temps $|t-t'|$ inférieurs à un temps de corrélation τ_c, lui-même très inférieur au temps ξ^{-1} caractéristique du mouvement du corpuscule.

1. On note $\vec{v}_0$ la vitesse du corpuscule à l'instant t_0. Pour une réalisation donnée de la force fluctuante, donner l'expression de la vitesse $\vec{v}(t)$. En déduire la mobilité dans le cas d'une force constante.

2. **Théorème de fluctuation-dissipation**. Comment la vitesse et la force fluctuante sont elles corrélées ? On pourra écrire

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{m}e^{-\xi t}\int_{-\infty}^{t}\left[\vec{R}(t') + \vec{F}_{\text{ext}}(t')\right]e^{\xi t'}dt'.$$

On se place dans la situation où $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$. Calculer la vitesse quadratique moyenne $<\vec{v}^2(t)>$. En notant d la dimension de l'espace, en déduire la relation de fluctuation-dissipation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C(v)dv = 2dmk_BT\xi$$

3. **Etude du phénomène de diffusion**. La force extérieure est toujours nulle. On se place en outre dans le cas extrême d'une séparation totale entre les échelles de temps τ_c et ξ^{-1}. Dans cette limite $\tau_c \to 0$, comment s'expriment $< \vec{R}(t).\vec{R}(t') >$ et $< \vec{R}(t).\vec{v}(t') >$?

A l'instant t_0, le corpuscule est en $\vec{r}_0$. Où se trouve-t-il à l'instant t ? En exprimant le déplacement moyen carré $< (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 >$, montrer que le mouvement est diffusif, avec un coefficient de diffusion $D = \frac{k_B T}{m\xi}$.

Interpréter le résultat précédent en terme de marche aléatoire.

4. **Fluctuations de vitesse**. A l'instant initial, la vitesse de la particule est fixée à $\vec{v}_0$. Calculer $< \vec{v}(t).\vec{v}_0 >$, la valeur moyenne portant sur toutes les réalisations de $\vec{R}$ compatibles avec $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$. En moyennant ensuite sur $\vec{v}_0$, montrer que

$$\begin{aligned} << \vec{v}(t)\vec{v}_0 >>_{\vec{v}_0} &\equiv dZ(t - t_0) \\ &= \frac{dkT}{m}\, e^{-\xi(t-t_0)} \qquad \text{pour } t > t_0. \end{aligned}$$

Quelle relation existe-t-il entre la fonction d'autocorrélation des vitesse $Z(t)$ et le coefficient de diffusion D ? On suppose une fois encore $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ dans cette équation.

5. **Réponse à une force extérieure**. On soumet le système à une force sinusoidale $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{f}\ \exp(\mathrm{i}\omega t)$. Quelle est la mobilité $\mu(\omega)$ du corpuscule ? Retrouver la relation d'Einstein $D = \mu(0) k_B T$.