**Magistère des Sciences de la Matière** **Thierry Dauxois**

**Physique Statistique**
**T.D. N° 1**

**I.** Une enceinte de volume $V$ contient $N$ particules sans interaction mutuelle. Soit $n$ le nombre de particules contenues dans une partie de volume $v$ de l'enceinte. Les particules sont supposées indiscernables. On suppose que la probabilité qu'une certaine particule soit dans $v$ est égal à $v/V$, à l'équilibre thermique du système.

1. Trouver la loi de distribution $f(n)$ du nombre $n$.

2. Calculer $\overline{n}$ et $\overline{(n-\overline{n})^2}$. Pour ces calculs on pourra définir une fonction génératrice $F(x) = \sum_{n=0}^{N} f(n)\ x^n$.

3. En utilisant la formule de Stirling, montrer que, lorsque $N$ et $n$ sont grands, $f(n)$ est approximativement gaussienne.

4. Montrer que dans la limite où $v/V \to 0$ et $V \to \infty$, avec $N/V$ =cste, $f(n)$ prend la forme d'une distribution de Poisson $\overline{f}(n) = e^{-\overline{n}}\ (\overline{n})^n/n!$

**II.** Les niveaux d'énergie d'un oscillateur de fréquence $\nu$ sont donnés par :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}h\nu, \frac{3}{2}h\nu, ..., (n+\frac{1}{2})h\nu, ....$$

Soit $M$ un entier. Si le système contenant $N$ oscillateurs a pour énergie totale

$$E = \frac{1}{2}Nh\nu + Mh\nu \qquad ,$$

trouver le poids statistique $W_M$ et déterminer la relation entre la température du système et l'énergie.

**III.** Un gaz parfait contenant $N$ masses ponctuelles est contenue dans un volume $V$.

1. Montrer que le volume de la sphère unité dans l'espace à $n$ dimensions est

$$C_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1) \qquad \text{où} \qquad \Gamma(m) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ x^{m-1}\ \mathrm{d}x \qquad .$$

2.Trouver le nombre d'états $\Omega_0(E)$ et l'équation d'état.

**IV.** Considérons une boite remplie d'un gaz. Celle-ci est constituée de parois fixes et d'un piston mobile pour la paroi supérieure; on place une masse $m$ sur le piston. En considérant l'ensemble du système, y compris la masse, comme un système isolé, déduire de l'ensemble microcanonique la relation :

$$p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S \quad .$$

Appliquer cette formule à un gaz idéal de molécules monoatomiques et démontrer l'équation d'état : $p = \frac{2}{3}\frac{E}{V}$.

**V.** Considérons une chaîne unidimensionnelle de $n$ segments de longueur $a$. Soit $x$ la distance entre les deux extrémités. Déterminer l'entropie de la chaîne en fonction de $x$ ainsi que la relation entre la température $T$ de la chaîne et la force de tension qui est nécessaire pour maintenir la distance $x$, en supposant que les segments peuvent tourner librement.

**VI.** Quelle est la surface d'énergie constante dans l'espace des phases d'un oscillateur de fréquence $\nu$ ? Trouver le volume de $\Gamma_0(E)$ dans l'espace des phases d'énergie $\leq E$. Une balle de masse $m$ est tirée lentement vers le haut à travers un petit trou. Déterminer le travail effectué sur le système pendant ce processus adiabatique ainsi que le changement d'énergie et de fréquence de ce pendule, en supposant les oscillations du pendule faibles. En déduire que le nombre d'état est un invariant adiabatique.

**VII.** La pression qu'exerce un gaz sur les parois d'une enceinte peut être obtenue à partir de la valeur moyenne temporelle des impulsions lors des collisions contre la paroi. Calculer la pression $P$ et montrer la relation de Bernoulli : $P = \frac{2n\bar{\varepsilon}}{3}$ où $n$ est le nombre moyen de molécules par unité de volume et $\bar{\varepsilon}$ la valeur moyenne de l'énergie cinétique par molécule.