Magistère des Sciences de la Matière **Thierry Dauxois**

Physique Statistique
T.D. N° 8

I. Emission et Absorption, Coefficients d'Einstein.

On considère N atomes identiques (un gaz par exemple) placés dans une enceinte maintenue à la température T. Chaque atome possède deux niveaux d'énergie électronique E_1 et E_2 ($E_2 > E_1$, on note $\varepsilon = E_2 - E_1$). Du point de vue de leurs fonctions d'onde électroniques "internes" ces atomes peuvent être considérés comme discernables (l'indiscernabilité est prise en compte dans les translations). Par ailleurs, l'enceinte contient un rayonnement thermique d'équilibre qui intéragit avec les atomes. Deux processus d'intéraction sont en compétition :

a) Si un atome est dans l'état E_1, il peut absorber un photon d'énergie $h\nu = \varepsilon$ et passer dans l'état E_2. A priori ce processus est d'autant plus probable que le nombre de photons disponibles au voisinage de l'atome est plus élevé. On peut donc poser que la probabilité d'excitation par unité de temps est $P_{12} = Bu(\nu)$ où $u(\nu)$ est la densité de rayonnement à la fréquence $\nu = \frac{\varepsilon}{h}$ et B un coefficient d'"absorption induite".

b) Si un atome est dans l'état E_2, il peut retomber "spontanément" dans son état fondamental E_1 en émettant un photon $h\nu = \varepsilon$. La probabilité par unité de temps de cet événement qui n'est tributaire d'aucune énergie extérieure est une certaine constante A indépendante a priori de l'état du rayonnement dans l'enceinte : $P_{21} = A$.

1. Ecrire les équation régissant l'évolution des nombres N_1 et N_2 d'atomes qui possèdent respectivement les énergies E_1 et E_2.

2. Quelle est la distribution d'énergie des atomes à l'équilibre thermique, telle qu'on l'obtient à partir de l'évolution décrite à la question précédente ? Est-elle compatible avec celle que l'on prévoit pour l'équilibre de ces N atomes à la température T ?

3. Pour lever la difficulté précédente, Einstein a proposé l'existence d'un processus supplémentaire : le passage de E_2 à E_1, provoqué par la présence d'un photon $h\nu = \varepsilon$ au voisinage de l'atome, avec émission d'un photon $h\nu$ (émission stimulée). Ainsi, comme pour l'absorption induite, la probabilité par unité de temps de ce processus sera de la forme $P'_{21} = B'u(\nu)$.

Ecrire les équations décrivant l'évolution résultant des trois processus et déterminer l'équilibre entre atomes et rayonnement.

4. A quelle condition, l'équilibre matière et rayonnement peut-il être compatible avec l'équilibre canonique des N atomes à la température T ?

5. L'émission induite de $h\nu$ a (pour des raisons simples mais qui vont au-delà de cet exercice) les mêmes caractéristiques (direction, polarisation,...) que celles du photon qui a induit l'émission alors que l'émission spontanée conduit à une émission de direction (etc,...) aléatoire.

On envoie sur N atomes un faisceau de photons dirigé selon l'axe des x; n photon arrivent sur les atomes par unité de temps. A quelle condition le flux sortant sera-t-il plus intense que le flux entrant (on suppose que la surface est suffisamment petite pour que chaque photon incident puisse interagir avec chacun des atomes) ?

6. Déterminer la valeur de la longueur d'onde du rayonnement pour laquelle il y a "équipartition" entre le processus spontané et l'induit pour l'émission à la température ambiante. Quelle température devrait conduire à cette égalité pour $\lambda = 1\mu m$?

II. Rayonnement fossile à $3\,K$

1. Pour du rayonnement à l'équilibre dans une cavité, calculer la densité moyenne des photons, leur distance moyenne, leur impulsion moyenne et leur longueur d'onde moyenne. Conclusions ?

2. Il est possible de mesurer le spectre des rayons cosmiques dans une gamme étendue de fréquences. Ce spectre a une forme assez bien reproduite dans la totalité de sa gamme de fréquences par la loi de Planck. Expérimentalement, on observe que le maximum est situé à une fréquence $\nu_m = 1.8 \cdot 10^{11}\ Hz$. Calculer la température T de ce rayonnement. Quelle est sa signification physique ?

3. L'Univers dans sa totalité "*baigne*" dans ce rayonnement d'équilibre. En déduire sa dilatation à partir du moment où sa température est passée au-dessous de $3000\,K$ si le nombre de photons est resté pratiquement constant. On considère généralement qu'au-dessous de cette température, l'interaction rayonnement-matière devient faible.

4. Quelle est la densité de photons dans l'Univers ?

On donne les intégrales :

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad , \quad \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2.404 \quad , \quad \int_0^\infty \frac{x^2 e^x dx}{(e^x - 1)^2} = \frac{\pi^2}{3}$$