Magistère des Sciences de la Matière **Thierry Dauxois**

Physique Statistique
T.D. N° 4

I. Le gaz parfait de particules relativistes (Examen de Janvier 1993)

On se propose de calculer la fonction de partition et les propriétés thermodynamiques d'un gaz parfait de particules dans le régime relativiste. Dans ce régime, la relation entre l'énergie ε d'une particule et sa quantité de mouvement $\vec{p}$ est : $\varepsilon(p) = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$, où $p = |\vec{p}|$ et c est la vitesse de la lumière.

1. Ecrire la fonction de partition q pour une particule. Remplacer l'intégration sur $\vec{p}$ par une intégration sur ε; réexprimer cette intégrale en faisant le changement de variables $x = \varepsilon - mc^2$.

2. L'intégrale résultante ne se calcule pas explicitement. On se place d'abord dans le régime faiblement relativiste où $x \ll mc^2$. Dans ces conditions on simplifiera l'intégrand en utilisant un développement en puissances de x/mc^2, limité au premier ordre. Ce développement limité permet une intégration immédiate de l'intégrale sur x. Montrer qu'à l'ordre le plus bas on retrouve la fonction de partition d'un gaz non relativiste. Calculer la première correction à ce résultat classique et montrer qu'elle est proportionnelle au rapport sans dimension $\xi = k_B T/mc^2$.

3. Déduire des résultats précédents la fonction de partition Q_N du gaz, au premier ordre en ξ. Calculer ensuite l'énergie libre F, l'énergie interne U et la chaleur spécifique du gaz C_V toujours au premier ordre en ξ. Montrer que la chaleur spécifique du gaz parfait faiblement relativiste augmente avec la température.

4. Finalement on se place dans la limite ultrarelativiste, où l'énergie de masse est négligeable, et : $\varepsilon(p) \simeq pc$. Calculer les fonctions de partition q et Q_N dans cette limite, et en déduire F, U et C_V. Comparer la valeur obtenue pour C_V au cas non relativiste et commenter.

N.B. : On rappelle que pour n impair, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\, x^{\frac{n}{2}}\, \mathrm{d}x = \frac{n!!}{(2a)^{\frac{(n+1)}{2}}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

II. Etude thermodynamique du rayonnement du corps noir

On considère une enceinte solide fermée, vide, imperméable au rayonnement, parfaitement conductrice et en équilibre thermodynamique à la température T. L'état du système est stationnaire étant donné que l'intérieur de l'enceinte est continuellement traversé par du rayonnement. On dispose ainsi d'un "*corps noir*". L'énergie contenue dans ce système de volume V est $U = u(T)V$.

1. Appliquer la relation thermodynamique $T\,dS = dU + P\,dV$ à ce gaz de photons pour montrer que $u = a\,T^4$. On utilisera l'équation d'état $P = \frac{u}{3}$.

2. Donner à volume constant les expressions de la capacité calorifique du rayonnement, de l'entropie, de l'énergie libre, de l'enthalpie libre ramenées à l'unité de volume.

3. On suppose la paroi de l'enceinte de faible épaisseur et on perce un orifice de surface δS supposée suffisament petite pour ne pas perturber l'équilibre thermodynamique du corps noir. Calculer la puissance totale rayonnée dans tout l'espace par l'élément δS.

4. *Application: calcul de la température de surface de la Terre*
a. La puissance reçue normalement aux rayons du Soleil est, au-dessus de l'atmosphère terrestre, égale à $1.35 \cdot 10^3\,W \cdot m^{-2}$. Calculer l'ordre de grandeur de la constante de Stefan sachant que la température de surface du Soleil depuis la Terre est $5700\,K$ et que l'angle sous lequel on voit le Soleil est de $32\,'$. En déduire la température d'équilibre de la Terre sous l'action du rayonnement solaire. On négligera l'absorption de l'atmosphère et on assimilera la Terre à un corps noir sphérique de température uniforme $T_0\,'$.

b. On veut maintenant tenir compte de l'influence de l'atmosphère pour déterminer la température T_0 du sol terrestre. On assimile l'atmosphère à un écran d'épaisseur négligeable devant le rayon terrestre, de température uniforme T_a, caractérisé par un facteur de transmission τ_S correspondant aux radiations émises par un corps à température élevée (température T_S) et par un facteur de transmission τ_0 pour les radiations émises par un corps "*froid*" (températures T_0 ou T_a). Calculer les températures T_0 et T_a. Application numérique pour $\tau_S = 0.5$, $\tau_0 = 0.1$. Critiquer les hypothèses faites dans ce dernier calcul faisant intervenir l'atmosphère terrestre.

5. *Application : étude d'un four solaire*. Un miroir parabolique concave M, de distance focale $SF = f$, forme dans son plan focal l'image du Soleil , dont le centre est situé sur l'axe du miroir. L'image paraxiale coïncide exactement avec une ouverture pratiquée dans une enveloppe E, convenablement calorifugée, contenant une substance à traiter. On admet qu'il règne dans cette enceinte une température uniforme T_e et que ce "*four solaire*" ne perd de chaleur que par le rayonnement de son ouverture. Déterminer la température d'équilibre T_e du four, en fonction du demi-angle au sommet α du cône des rayons lumineux qui arrivent en F, du facteur de transmission τ de l'ensemble optique (atmosphère, miroir, etc...) et de la température T_S du Soleil. Application numérique pour $\alpha = 15^0$ et $\tau = 0.5$.