Magistère des Sciences de la Matière **Thierry Dauxois**

Physique Statistique
T.D. N° 7

NAINES BLANCHES

Les naines blanches sont des étoiles dont l'une des propriétés remarquables est la petitesse de leur dimension, de l'ordre de quelques rayons terrestres, alors que leur masse est comparable à celle du soleil. On va étudier un modèle simple en considérant un gaz d'électrons libres dans le potentiel gravitationnel de l'étoile.

I. Considérations préliminaires.

On considère un système de fermions constitué par N particules sans interactions, de spins $\frac{1}{2}$, contenues dans une boite de volume Ω. Les particules sont des électrons dont le nombre par unité de volume est $\frac{N}{\Omega} = 10^{38}$ m^{-3}.

1. Les particules sont des électrons dont le nombre par unité de volume est $\frac{N}{\Omega} = 10^{38}$ m^{-3}.

a. Calculer la valeur de l'impulsion p_F correspondant au niveau de Fermi dans l'hypothèse où la température du système est $T = 0^o$ K. En déduire que les électrons qui se trouvent au niveau de Fermi sont ultra-relativistes, c'est à dire que $p_F \gg m_e c$ (m_e: masse au repos de l'électron). Calculer la position du niveau de Fermi pour $T = 0^o$ K (on prendra pour zéro des énergies l'énergie au repos des particules).

b. Le système est à température T_o non-nulle ($kT_o = 5.10^4$ eV). Montrer qualitativement qu'il est légitime de faire l'approximation $T_o = 0^o$ K dans les calculs de la pression P et de l'énergie moyenne U du système. On rappelle que l'énergie d'une particule de masse m et d'impulsion p est $(\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2)$ en conformité avec l'origine des énergies adoptée.

2. Les fermions sont maintenant des protons de masse $m_p \simeq 2.10^3\ m_e$ dont le nombre par unité de volume est $\frac{N}{\Omega} = 10^{38}$ m^{-3}.

a. Montrer qu'à température T_o, telle que $kT_0 = 5.10^4$ eV, le système de protons est décrit par la statistique de Maxwell-Boltzmann.

b. Comparer qualitativement l'énergie moyenne des protons à la température T_o avec celle des électrons se trouvant à la même température.

Même question pour les pressions exercées respectivement par les protons et les électrons sur les parois de la boite. Ces évaluations pourront se faire sans calculs. Quelle approximation pourra-t-on faire si on considère un système comportant N électrons et N protons sans interactions à la même température ?

II. Etude de l'équilibre d'une naine blanche

On considère le milieu constituant la naine blanche comme totalement ionisé, ie composé de noyaux et d'électrons non liés. L'énergie cinétique moyenne des électrons y est suffisamment élevée pour qu'on puisse négliger devant elle, l'énergie cinétique des noyaux et les interactions électrostatiques entre les différentes particules du système. La présence des noyaux a cependant pour effet de réaliser la neutralité électrique du système en tout point et de déterminer la masse totale de l'étoile. Le but de cette étude est d'établir que les naines blanches ne sont stables que si leur masse totale obéit à une certaine condition que l'on va chercher à déterminer. Dans toute cette partie on se place dans l'approximation où la température du système est nulle. On examinera deux situations limites : celle où tous les électrons de l'étoile sont non-relativistes et celle où les électrons au niveau de Fermi sont ultra-relativistes ($p_F \gg m_e c$).

1.a. Dans le cas non-relativiste, effectuer le calcul de la densité d'énergie cinétique interne $\frac{U}{\Omega}$ et de la pression électronique P de l'étoile en fonction de la densité électronique $n = \frac{N}{\Omega}$.

b. Donner sans effectuer les intégrations les expressions générales relativistes de la densité d'énergie interne $\frac{U}{\Omega}$ et de la pression électronique P de l'étoile en fonction de $x = \frac{p}{m_e c}$.

c. On se place dans le cas ultra-relativiste et on pose $x = \frac{p}{m_e c} \gg 1$. Effectuer le développement limité des expressions à intégrer du 1.b en fonction de $\frac{1}{x}$ et calculer $\frac{U}{\Omega}$. On conservera les 3 premiers termes de l'expression obtenue en fonction de $x_F = \frac{p_F}{m_e c}$.

2. On cherche à déterminer l'équilibre de l'étoile en supposant sa densité uniforme. Dans ce but, on va étudier la façon dont cet équilibre dépend de la masse M et du rayon R de l'étoile, et on fera ensuite varier le rayon, la masse de l'étoile étant fixée. On rappelle que l'énergie gravitationnelle de l'étoile est dominée par la masse des noyaux et qu'elle est égale à $-\frac{3}{5}\ \frac{GM^2}{R}$.

a. Donner l'expression de $x_F = \frac{p_F}{m_e c}$ en fonction de R et de M. Exprimer l'énergie totale de l'étoile et indiquer la condition d'équilibre qui déterminera son rayon $R_o(M)$.

b. Calculer R_o en fonction de la masse de l'étoile, dans le cas non-relativiste et le cas ultra-relativiste. Montrer que dans le cas non-relativiste on a une relation du type $R_o.M^{1/3}$ =constante. Déterminer la relation correspondant au cas où les électrons du niveau de Fermi sont ultra-relativiste ($x_F \gg 1$).

c. Discuter les relations précédentes et exprimer dans le cas ultra-relativiste, la masse caractéristique qui apparaît en fonction de la masse du soleil $M_S = 0.53(\frac{\hbar c}{G})^{3/2}\ \frac{1}{m_p^2}$.

3. On ne suppose plus la densité uniforme et on cherche un autre type d'approximation plus réaliste en considérant l'équilibre de l'étoile dans le champ gravitationnel inhomogène créé par la masse des noyaux.

a. Ecrire l'équilibre en chaque point de l'étoile en imposant une condition au potentiel chimique μ. On sait que pour $T = 0^o$ K, μ est l'énergie que l'on doit fournir au système pour lui ajouter un électron mais on remarquera que la préservation de la neutralité électronique conduit à associer un proton à chaque électron. On néglige l'énergie cinétique des protons et on admet qu'ils contribuent seuls à l'énergie gravitationnelle de l'étoile. μ dépend alors d'une façon que l'on déterminera, de l'énergie potentielle gravitationnelle $m_p \phi_G$ et de $\mu_e(\vec{r})$ potentiel chimique des électrons, calculé en l'absence de champ gravitationnel.

b. Le potentiel de gravitation ϕ_G satisfait à l'équation $\Delta\phi_G = G\rho(\vec{r})$ où $\rho(\vec{r})$ est la densité massique de l'étoile et G la constante de gravitation. On suppose que l'étoile possède la symétrie sphérique. Etablir l'équation qui détermine le potentiel $\mu_e(r)$ dans les deux cas non-relativiste et ultra-relativiste (la solution de cette équation ne peut être obtenue que numériquement).

4. En réalité, une naine blanche est constituée de noyaux plus complexes que les protons. En outre ces étoiles étant à très forte densité, différentes réactions nucléaires peuvent s'y produire. En particulier, la capture d'un électron par un nucléon du noyau peut se produire avec formation d'un neutron à l'intérieur du noyau et émission d'un neutrino. Ce dernier, qui a un couplage très faible avec les autres particules, quitte rapidement l'étoile et sera négligé dans le bilan d'équilibre thermodynamique. Soit ε, la variation de l'énergie de liaison nucléaire due à la capture et V_z l'énergie de liaison d'un noyau de numéro atomique z ($\varepsilon = V_{z-1} - V_z$). On supposera la densité de l'étoile uniforme comme à la question 2.

a. Ecrire en fonction du potentiel chimique μ_e des électrons, l'équilibre déterminé par la réaction nucléaire: noyau (z) + électron $\rightarrow$ noyau (z-1) + neutron + neutrino.

b. En déduire la valeur de la densité électronique dans le cas où les électrons au niveau de Fermi sont ultra-relativistes et en tenant compte de la possibilité de la réaction nucléaire précédente. Que se passe-t-il lorsque, par la suite d'une brusque augmentation de la densité de matière de l'étoile cette réaction commence ? Discuter qualitativement les phénomènes qui peuvent se produire et quels constituants deviennent dominants.

III. Cristallisation d'un plasma stellaire.

La région centrale des naines blanches est essentiellement constituée, pense-t-on, de noyaux de carbones 12 et d'électrons. On évalue les ordres de grandeur de la température et de la masse volumique respectivement à $T_o \simeq 10^8$ K et $\rho_o \simeq 10^{11}$ kg/m^3. On va voir que ces données sont proches des conditions où ce plasma peut apparaître comme un cristal de noyaux de carbones immergé dans une mer de Fermi électronique, réalisant ainsi un système qui présente de grandes analogies avec les métaux. Le but de cette partie est d'étudier les conditions dans lesquelles existe un tel état cristallin et d'en établir le diagramme de phase.

On dira que cette matière est cristallisée si les noyaux de carbone ont des positions d'équilibre disposées selon un réseau régulier, autour desquelles ils oscillent avec une amplitude qui croît avec la température. On prendra pour ordre de grandeur de la distance entre sites voisins $d = (\frac{\Omega}{N})^{1/3}$.

Lorsqu'un noyau est écarté d'un petit déplacement $\vec{r}$ de sa position d'équilibre, les forces de Coulomb exercées par les voisins et le fond continu d'électrons le ramènent à cette position et l'on admettra que cette force de rappel est de la forme $\vec{F} = -\alpha\vec{r}/d^3$. Pour des raisons dimensionnelles, α est de la forme $\alpha = \lambda \frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_o}$, où λ est une constante numérique égale à 1.5.

Un critère empirique permet de décider si la phase cristalline est réalisée, c'est la règle de Lindemann que l'on admettra et adoptera: la fusion se produit lorsque le déplacement quadratique moyen $\Delta = \sqrt{< \vec{r}^{\,2} >}$ dépasse une certaine fraction γ de la distance intersite d. La valeur de ce rapport est ici estimée à $\gamma = 0.3$ (ce qui est très supérieur aux valeurs que l'on trouve dans les cristaux ordinaires). Le laplacien en coordonnées sphériques est $\Delta\phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}\right)$.

1. En considérant chaque noyau comme un oscillateur harmonique isotrope à trois dimensions, de pulsation ω que l'on explicitera, écrire son Hamiltonien H, ses niveaux d'énergie et sa fonction de partition $Z_1(\beta, \omega)$ que l'on écrira à l'aide de fonctions hyperboliques.

2. Calculer Δ à l'aide de $Z_1(\beta, \omega)$ (on pourra reconnaître que $< \vec{r}^{\,2} >$ s'exprime à l'aide d'une dérivée de $\log Z_1$ en revenant à l'expression explicite de H).

3. Par application de la règle de Lindemann, écrire l'équation de la courbe de fusion limitant, dans le plan (T, ρ), la zone où le plasma est cristallisé. Il sera commode, pour la suite d'écrire l'équation de cette courbe sous forme numérique $f(A\rho^aT^b) = (B\rho)^c$.

4. Caractériser, dans le plan (T, ρ), la région où la statistique classique s'applique. Tracer qualitativement l'allure de la courbe de fusion dans ce domaine classique.

5. Indiquer, dans le plan (T, ρ) le point qui correspond à la limite $\beta\hbar\omega \to \infty$. Tracer par continuité l'ensemble de la courbe de fusion en précisant la nature des phases dans les différents domaines.

6. Dans quel état se trouve la matière de l'étoile considérée ? Quelle différence marquante existe-t-il entre le diagramme de phase obtenu pour la région de cristallisation et celui des matériaux ordinaires à des pressions et des températures de laboratoire ? Expliquer l'origine de cette différence.

Références:

1. G. Fontaine et F. Wesemael, La recherche **16**, 464 (1985). (les naines blanches).

2. R. Canal and E. Schatzman, Astron. and Astrophys. **46**, 229 (1976). (Evolution vers une naine blanche d'une étoile binaire).

3. W. D. Arnett et R. G. Couch, Astrophys. J. **196**, 791 (1975). (Evolution vers une naine blanche d'une étoile simple).

4. G. Chabrier, Astrophys. J. **414**, 695 (1993). (Diagramme de phase en tenant compte des effets quantiques).