Magistère des Sciences de la Matière **Thierry Dauxois**

Physique Statistique
T.D. N° 8

DIAMAGNÉTISME de LANDAU et EFFET DE HAAS–VAN ALPHEN

Le but de ce problème consiste à étudier le magnéstisme qui résulte du mouvement des électrons dans un champ magnétique uniforme B. On procède à quelque simplifications, dont certaines sont brutales, pour aboutir à un modèle aisément calculable:

* On néglige le détail des interactions d'un électron avec les ions et les autres électrons, en les représentant schématiquement par un potentiel moyen constant. Comme ce potentiel équivaut à un changement d'origine de l'échelle des énergies sans conséquence pour le problème étudié, on peut ne pas en tenir compte.

* On ne retient pas l'action du champ magnétique sur le moment magnétique lié au spin de l'électron et on ne conserve que son effet sur le moment magnétique orbital.

* On traite le problème en dimension 2 sauf dans la question 3.

Ces approximations conduisent à un modèle où le hamiltonien d'un électron, réminiscent du hamiltonien en dimension trois où le champ B est dirigé selon l'axe Oz, s'écrit:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y + eB\hat{x})^2\right]$$

la charge de l'électron etant $-e$, sa masse m, le potentiel vecteur ayant pour composantes $(0, -Bx)$. Le métal est assimilé à une boite carrée à deux dimensions de coté L, l'effet du potentiel consistant seulement à annuler la fonction d'onde aux bords de cette boite. En résolvant le problème de mécanique quantique on obtient que les valeurs propres de $\hat{H}$ sont de la forme

$$\varepsilon_n = (2n+1)\ \mu_B B$$

où n est un nombre quantique qui prend des valeurs entières non-négatives (n=0, 1, 2,..) et où $\mu_B = e\hbar/2m$ est le magnéton de Bohr (moment magnétique élémentaire). Chaque niveau est dégénéré et la multiplicité des états quantiques d'énergie ε_n est indépendante de n et donnée par

$$g = 2\frac{eBL^2}{2\pi\hbar}$$

Le facteur 2 représente la multiplicité associée aux deux états possibles du spin.

1. On considère une population d'électrons à l'équilibre thermique emplissant la boite et soumis au champ B. Ces électrons sont traités comme des fermions indépendants, que l'on étudie à l'aide du formalisme grand canonique.

a. Ecrire l'expression du grand potentiel $\Omega(\mu, T, B) = -kTLog\ \Xi$, sans chercher à effectuer la sommation sur n.

b. Ecrire l'expression qui donne la densité d'électrons par unité d'aire $\rho = N/L^2$ en fonction du potentiel chimique et de la température.

c. Ecrire directement l'expression du grand potentiel $\Omega_0(\mu, T)$ à deux dimensions en champ nul. Vérifier qu'elle coïncide avec la limite, obtenue pour B tendant vers zéro, de l'expression trouvée au 1a.

2. On considère une couche très mince de métal à trois dimensions, placée dans un champ magnétique perpendiculaire. Le hamiltonien d'un électron comprend alors, en plus du terme relatif aux directions x et y qui a été analysé dans l'introduction du problème, l'énergie cinétique $\hat{p}_z^2/2m$ dans la direction z. En désignant par ℓ, l'épaisseur de la couche, les fonctions d'ondes doivent s'annuler ici pour $z = 0$ et $z = \ell$.

Ecrire l'équation de Schrödinger du problème et on cherchera des solutions de la forme

$$\psi(x, y, z) = e^{i(k_y y + k_z z)}\phi(x)$$

On reconnaîtra alors un problème classique et on en déduira les niveaux d'énergie de Landau qui dépendent de 2 nombres quantiques n et q. On résoudra selon x et y avec les conditions aux limites périodiques car L est supposée de taille macroscopique.

Montrer que le grand potentiel de la couche se réduit au grand potentiel précédemment calculé, dans un domaine de température que l'on précisera, à condition de modifier le potentiel chimique d'une manière que l'on précisera. Préciser ce domaine de température pour $\ell = 100\mathring{A}$.

3.a. Montrer que la susceptibilité magnétique par unité d'aire est donnée par l'expression

$$\chi = -\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial B^2}_{|B=0,\mu,T}$$

b. A haute température et pour des valeurs fixées de la densité d'électrons et du champ B le paramètre z est petit. Calculer le grand potentiel en ne retenant que les termes de plus bas degrés en z.

c. En déduire la susceptibilité magnétique χ, que l'on exprimera en fonction de ρ et T. Montrer que le système présente du diamagnétisme.

d. Toujours dans la même approximation, en admettant que la susceptibilité totale est la somme de la contribution calculée en c) et de la susceptibilité magnétique due aux spins, en déduire si le métal est diamagnétique ou paramagnétique.

4. *Effet de Haas–Van Alphen.* On se propose d'étudier en fonction du champ B et à basse température, la variation du moment magnétique du système considéré. Pour simplifier, on va se placer à la température absolue zéro, et utiliser l'ensemble canonique en supposant le nombre N d'électrons fixé. Le système est alors dans un macroétat caractérisé par le fait que son énergie est minimale. Parmi les états d'électrons individuels qui servent à bâtir ce macroétat, certains, d'énergie suffisamment basse ($n < \nu$) sont entièrement peuplés; d'autres, plus élevés ($n > \nu$) sont entièrement dépeuplés; les microétats d'énergie ε_ν sont en général partiellement peuplés. On désignera par φ le nombre moyen d'occupation de ces derniers.

a. Calculer φ et ν en fonction de N et de B (on désignera par $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel positif x). Dessiner schématiquement la variation de φ et de ν en fonction de $1/B$ pour une densité ρ donnée.

b. Calculer l'énergie U du macroétat en fonction de B et tracer l'allure de la courbe correspondante.

c. Montrer qu'à cette température nulle, l'aimantation par unité daire est donnée par

$$M = -\frac{1}{L^2}\frac{\partial U}{\partial B}_{|N} \quad .$$

Montrer que M oscille lorsque B varie et représenter schématiquement ces oscillations.

d. Indiquer sans calcul dans quel domaine de température et de champ magnétique on s'attend à observer ces oscillations de M aussi importantes qu'à température nule.

Références:

1. L Landau, Z. Phys. **64** 629 (1930) (Niveaux de Landau).

2. W. J. De Haas et P. M. Van Alphen Leiden Commun. **212** (1931) (Résultats expérimentaux).

3. R. E. Peierls, Z. Phys. **81** 186(1933) (Modèle simplifié).

4. J. M. Luttinger, Z. Phys. **121** 1251 (1961) (Modèle plus réaliste).