Thierry.Dauxois@ens-lyon.fr
Tel : 04 72 72 81 38

Année 2001-2002

# INSTABILITES ET PHENOMENES NON LINEAIRES

## TUTORAT n° 3

**Jeudi 8 Novembre**

## BALADE AUTOUR DES LYAPUNOV

Il existe plusieurs définitions du chaos déterministe mais une propriété réalise le consensus général et peut être considérée comme une condition nécessaire d'apparition du chaos : c'est la sensibilité des trajectoires aux conditions initiales, ou autrement dit la divergence des trajectoires avec conditions initiales voisines. Ceci se traduit par l'existence des exposants de Lyapunov définis dans le cours de la manière suivante. Le plus grand exposant de Lyapunov est par définition :

$$\lambda(x_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \lim_{||\delta x_0||\to 0} \ln \frac{||\delta x_t||}{||\delta x_0||} \quad .$$

Comme c'est une notion difficile et que les calculs analytiques ne sont que très rarement possibles, on va s'intéresser ici au cas plus simple d'une application $x_{n+1} = f(x_n)$. Quel est le critère de stabilité d'un point fixe d'une application ? Quelle définition naturelle de l'exposant de Lyapunov proposez vous ? Montrer que celui-ci est invariant par changement de variable, c'est à dire qu'en étudiant la dynamique à partir d'une observable $Y = h(x)$ où $h$ est un difféomorphisme (application inversible et différentiable), la série temporelle $Y_{n+1} = g(Y_n)$ donne le même exposant de Lyapunov.

Dans la suite on va s'intéresser à l'application circonflexe (ou tent map)

$$f(x) = \Delta(x) = r\left(1 - 2\left|\frac{1}{2} - x\right|\right)$$

Etudier les points fixes et leur stabilité. Expliquer comment les caractéristiques du chaos, *étirement et repliement*, apparaissent dans cette transformation ? Quel est le domaine des valeurs de $r$ intéressant ? On s'aidera avant tout de dessins.

**Exposant de Lyapunov**. Etudier le $n$ième itéré $\Delta^n(x)$ de l'intervalle $[0, 1]$. En déduire alors tout simplement la valeur de l'exposant de Lyapunov $\lambda = \ln(2r)$. Montrer par conséquent que celui-ci agit comme un paramètre d'ordre qui indique l'apparition de chaos. Pousser l'analogie avec les phénomènes critiques.

**Mesure invariante**. Par analogie avec l'équation de Liouville, généraliser la définition de mesure invariante présentée en cours pour une application $f$. En déduire l'opérateur de Frobenius-Perron qui relie la densité $\rho_n(x)$ après $n$ itérations à la densité $\rho_{n+1}(x)$. En déduire la mesure invariante. Montrer qu'il existe une solution évidente mais qui n'a pas de sens physique. Déterminer la mesure invariante de l'application circonflexe.

La **Fonction de corrélation** est une autre mesure de la dynamique, i.e. de l'irrégularité des séquences d'itérés et. Elle donne notamment des renseignements sur l'importance des déviations des itérés de leur valeur moyenne. Elle est définie de la manière suivante

$$C(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \hat{x}_{i+m}\, \hat{x}_i$$

$$\text{où} \quad \hat{x}_i = f^i(x_0) - x^\star \quad \text{et} \quad x^\star = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f^i(x_0).$$

Pourquoi $C(m)$ n'est il pas fonction de $x_0$ ? Calculer $C(m)$ en fonction de la mesure invariante. Quelle est sa valeur dans le cas de l'application circonflexe. Conclusion.

Considérons maintenant l'*application logistique* au point de Ulam :

$$x_{n+1} = f_4(x_n) = 4x_n(1 - x_n)$$

A partir de la transformation de l'application logistique en application circonflexe, déterminer la mesure invariante et l'exposant de Lyapunov de $f_4$. Montrer qu'en utilisant un changement de variable astucieux, on peut résoudre l'application logistique sans utiliser l'application circonflexe. En déduire l'exposant de Lyapunov. Montrer que dans ces nouvelles variables, en notation binaire, l'application logistique revient tout simplement à déplacer la virgule.

**Estimation numérique**. Comme nous l'avons dit, le calcul d'un exposant de manière analytique n'est possible que dans des cas tout à fait exceptionnels. En général, il faut utiliser une résolution numérique. Proposer une méthode pour calculer le plus grand exposant de Lyapunov uniquement en prenant garde que qu'il faut éviter les nombres trop grands ou trop petits ! Proposer ensuite une méthode pour calculer le plus petit exposant de Lyapunov uniquement, puis tous les exposants de Lyapunov. Application au cas de l'attracteur de Lorenz.