Thierry.Dauxois@ens-lyon.fr
Tel : 04 72 72 81 38 **Année 2001-2002**

INSTABILITES ET PHENOMENES NON LINEAIRES

TUTORAT n° 4 du Jeudi 22 Novembre

INTERACTION DE SOLITONS DANS DES FIBRES OPTIQUES COUPLÉES

Dans les systèmes de communication à fibres optiques utilisant les solitons, on envisage un traitement purement optique de l'information. Une des méthodes actuelles utilise les interactions entre deux solitons circulant dans des fibres adjacentes (fibres à coeur double) couplées par le champ évanescent qui règne à l'extérieur de chacune des fibres.

Si on écrit le champ électrique dans une fibre non-linéaire d'axe z sous la forme $\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E_0}(x,y)\phi(z,t)e^{i(k_0 z-\omega_0 t)} + c.c.$, où $\vec{E_0}(x,y)$ dépend du mode de propagation dans la fibre et $\phi(z,t)$ décrit la variation de l'amplitude au cours de la propagation. En se plaçant dans le repère en mouvement (i.e. $\tau = t - z/v_g$), l'équation d'évolution de l'amplitude $\psi(z,\tau)$ est

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{1}{2}\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} + \frac{\chi^{(3)}\omega_0^2}{2k_0c^2}|\psi|^2\psi = 0 \qquad \text{où } \beta = \frac{\partial\left(V_g^{-1}\right)}{\partial\omega}$$

est le coefficient négatif de dispersion de vitesse de groupe v_g, $\chi^{(3)}$ le coefficient de susceptibilité diélectrique non linéaire et c la vitesse de la lumière.

Montrer qu'un choix approprié d'échelles de temps et de l'unité d'amplitude du champ électrique permet d'éliminer tous les paramètres. On vérifiera également que cette équation peut être obtenue à partir d'un principe variationnel appliqué à une action que l'on explicitera.

On considère maintenant le système de deux fibres identiques couplées. En utilisant les mêmes notations que précédemment, écrire les deux équations déterminant $\psi_1(z,\tau)$ et $\psi_2(z,\tau)$, les facteurs d'amplitude des champs électriques dans chacunes des deux fibres, en modélisant le couplage par un terme proportionnel à l'amplitude de l'onde dans la fibre voisine et à ε le coefficient de couplage dont l'expression dépend de la géométrie du coupleur et du mode de propagation choisi. Justifier que l'on considère ε comme petit. Etendre le formalisme variationnel au cas de 2 champs et donner l'expression du nouveau lagrangien $\mathcal{L}$.

Pour étudier la dynamique et la stabilité des interactions soliton-soliton pour deux impulsions lumineuses se propageant chacune dans une des fibres du coupleur, on utilise une méthode de coordonnées collectives en cherchant une solution sous la forme

$$\psi_1(z,\tau) = \eta \ \text{sech} \ \eta(\tau - y) \ e^{i[v(\tau-y)+\sigma]} \quad \text{et} \quad \psi_2(z,\tau) = \eta \ \text{sech} \ \eta(\tau + y) \ e^{i[-v(\tau+y)+\overline{\sigma}]}$$

où les quantités η, y, v, σ, $\overline{\sigma}$ sont des fonctions de z que l'on cherche à déterminer. On montrera comment le lagrangien obtenu peut-être utilisé pour définir un lagrangien effectif A :

$$A = 4\eta\left[\frac{d\overline{\sigma}}{dz} + \frac{d\sigma}{dz} - 2v\frac{dy}{dz} + v^2 - \frac{1}{3}\eta^2\right] + \varepsilon\frac{8\pi\eta\cos(\Delta\sigma)\ \sin(2vy)}{\sinh(2y\eta)\ \sinh(\pi v/\eta)} \quad \text{où} \quad \Delta\sigma = \overline{\sigma} - \sigma,$$

Montrer que les variations de A par rapport à σ et $\overline{\sigma}$ conduisent à des équations qui ne sont compatibles que si $\Delta\sigma = 0 \pmod{\pi}$. Déduire du lagrangien effectif les équations donnant les variations des autres paramètres. Commenter les équations obtenues en montrant en particulier dans quelle mesure elles correspondent au sens physique attribué aux différentes fonctions inconnues. Comment faudrait-il généraliser l'étude pour pouvoir traiter des cas où $\Delta\sigma$ prend d'autres valeurs ?

Etablir la stabilité linéaire de la propagation simultanée de deux solitons centrés à chaque instant à la même valeur de z. Décrire qualitativement les comportements que l'on observera dans chaque cas. Comment pourrait-on envisager d'utiliser ces résultats en traitement optique du signal ?

En considérant seulement le cas d'une fibre unique, montrer qu'on peut établir un hamiltonien gouvernant l'équation d'évolution du champ dans la fibre. En déduire, pour le système des deux fibres, l'expression d'une "énergie" conservée. Indiquer enfin, *sans calcul*, comment cette expression pourraît être utilisée pour faire une étude de la stabilité de la paire de solitons qui soit valable au delà du cas linéaire.

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 x \, dx = 2$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{\cosh \beta x \, + \, \cos\gamma} \, dx = \frac{\pi}{\beta} \frac{\sinh\left(\frac{a\gamma}{\beta}\right)}{\sin\gamma \, \sinh\left(\frac{a\pi}{\beta}\right)}$ $\quad (a > 0, \ \beta, \gamma \in \mathrm{C}\ )$

Pour celles et ceux qui veulent en savoir un peu plus : A la carte, Servez vous !

Les solitons dans les fibres optiques sont certainement une des applications fondamentales des solitons et un cas exemplaire où une idée d'un "théoricien du non linéaire" est en passe de déboucher sur un marché de millions de dollars ! La prochaine liaison transatlantique sera très vraisemblablement une fibre à solitons. Une présentation générale peut se trouver dans la référence : A. Hasegawa, Yuji Kodoma, *Solitons in Optical Communications*, Clarenton Press, Oxford (1995).

1) Le calcul complet pour obtenir l'équation de SNL pour une seule fibre optique est long et assez technique. Il est présenté dans les références suivantes : Alan Newell and Jerome Moloney, *Nonlinear Optics*, Addison Wesley (1992) ou Yuji Kodama and A. Hasegawa, *Nonlinear Pulse propoagation in a monomode dielectric guide*, IEEE journal of Quantum Electronics QE **23**, 510-524 (1987).

2) L'équation SNL pour la fibre optique a été proposée en 1973 par Hasegawa et Tappert, Appl. Phys. Lett. **23**, 142,171 (1973).

3) Les premières observations expérimentales de solitons dans les fibres optiques n'ont été obtenues qu'en 1980 par Mollenauer (Phys. Rev. Lett. **45**, 1095 (1980)). Il a fallu surmonter en effet des problèmes techniques : disposer de fibres monomodes et être dans les conditions où l'équation de SNL prévoit des solitons.

4) On peut trouver des solutions dites "soliton noir" (décroissance localisée de l'amplitude d'une onde plane) de l'équation de SNL. Hasegawa, Tappert, *Transmission of stationnary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers : II Normal dispersion*, Appl. Phys. Lett. **23**, 171 (1973) ou Y. S. Kivshar, IEEE Journal of Quantum Electronics **24**, 250 (1990).