

Triangulations aléatoires vérifiant une propriété de Markov spatiale

Thomas BUDZINSKI

Mémoire de M2, réalisé sous la direction de Nicolas CURIEN

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Construction de l'UIPT | 2 |
| 1.1 | Définitions de base | 2 |
| 1.2 | Préliminaires combinatoires | 4 |
| 1.3 | Convergence vers l'UIPT | 5 |
| 1.4 | Propriété de Markov spatiale | 8 |
| 2 | Etude de l'UIPT par le peeling | 8 |
| 2.1 | Le processus de peeling | 8 |
| 2.2 | Croissance de l'UIPT | 10 |
| 2.3 | Percolation sur l'UIPT | 13 |
| 3 | Triangulations markoviennes du demi-plan | 15 |
| 3.1 | L'UIHPT | 15 |
| 3.2 | Classification des triangulations markoviennes du demi-plan | 16 |
| 3.3 | Étude des H_α par le peeling | 20 |
| 3.4 | Les H_α comme limites locales | 22 |
| 4 | Cas des triangulations du plan | 22 |
| 4.1 | Triangulations markoviennes du plan | 22 |
| 4.2 | Croissance des T_κ | 24 |
| 4.3 | Marche aléatoire simple sur T_κ | 26 |
| 4.4 | Les T_κ comme limites locales ? | 31 |

Introduction

L'étude des cartes planaires aléatoires est un sujet de recherche très récent, dont le but est de construire des surfaces aléatoires. En dehors de l'aspect purement esthétique, la principale motivation vient des physiciens, qui y voient un modèle de "gravité quantique" dans un espace-temps à deux dimensions. Une carte planaire est un graphe plongé dans la sphère, considéré à homéomorphisme préservant l'orientation près. Typiquement, on cherche à étudier les propriétés d'une carte uniforme parmi les triangulations à n sommets quand n tend vers l'infini. Ce passage à la limite peut se faire de deux manières différentes :

- les limites d'échelle, comme dans le théorème de Donsker : en renormalisant les distances par $n^{1/4}$, on obtient à la limite un espace métrique compact continu aléatoire homéomorphe à la sphère appelé *carte brownienne*.

- les limites locales : on ne renormalise pas et on obtient à la limite une carte aléatoire discrète infinie.

La première approche repose essentiellement sur des bijections avec des arbres, le lecteur intéressé pourra consulter [18]. On s'intéressera dans ce mémoire à la seconde, pour laquelle les techniques utilisées sont souvent différentes mais reposent toujours sur des formules de dénombrement.

L'UIPT (Uniform Infinite Planar Triangulation) a été introduite par Angel et Schramm dans [7], comme la limite locale quand n tend vers $+\infty$ de triangulations à n sommets de la sphère, choisies uniformément. Mieux encore, [7] montre que l'UIPT vérifie une propriété de Markov spatiale : conditionnellement à ce qu'elle contienne une sous-triangulation finie t , la loi du reste de la carte ne dépend que du bord de t , et peut être décrite de manière explicite.

Cette propriété de Markov spatiale permet d'explorer et de construire l'UIPT face par face de manière markovienne. C'est le processus de "peeling" (épluchage), décrit par Angel dans [2]. Ce procédé permet de réaliser des simulations, mais aussi d'étudier les propriétés géométriques de l'UIPT. En particulier, Angel montre que le volume de la boule de rayon r croît comme r^4 à corrections logarithmiques près, et que la probabilité critique pour la percolation est presque sûrement égale à $\frac{1}{2}$. Le peeling est l'outil de base de la plupart des travaux réalisés sur l'UIPT, comme par exemple [9] sur la marche aléatoire, [4] sur la percolation et [12] sur la structure conforme.

L'efficacité de cet outil conduit naturellement à se demander quelles sont les triangulations du plan qui vérifient une telle propriété de Markov spatiale. Cette question est étudiée par Angel et Ray dans [6] dans le cas des triangulations du demi-plan, où la formulation est un peu plus simple puisqu'un demi-plan reste un demi-plan si on lui retire une sous-triangulation finie sans trous. Ils montrent que ces triangulations aléatoires forment une famille (H_α) indexée par un paramètre $\alpha \in [0, 1[$. On observe une transition de phase, le cas critique correspondant à la version semi-planaire de l'UIPT. Les régimes sous-critique et surcritique sont étudiés par Ray dans [20].

Enfin, le cas des triangulations du plan est étudié par Curien dans [13]. Cette fois, seul le cas surcritique subsiste : on obtient une nouvelle fois une famille (T_κ) à un paramètre $\kappa \in]0, \frac{2}{27}]$, l'UIPT correspondant au cas $\kappa = \frac{2}{27}$. Pour $\kappa < \frac{2}{27}$, les graphes sont de nature "hyperbolique" : Curien montre que presque sûrement (T_κ) croît exponentiellement, et que la marche aléatoire a une vitesse strictement positive.

1 Construction de l'UIPT

1.1 Définitions de base

Commençons par donner les définitions de base qu'on utilisera tout au long de ce mémoire :

Définition 1.1. – Une *carte planaire* c est un plongement d'un graphe connexe, non orienté G dans la sphère S^2 tel que :

1. Les sommets de G sont envoyés sur des points deux à deux distincts de la sphère.
2. Les arêtes de G sont envoyées sur des chemins continus qui ne peuvent s'intersecter qu'en des sommets.

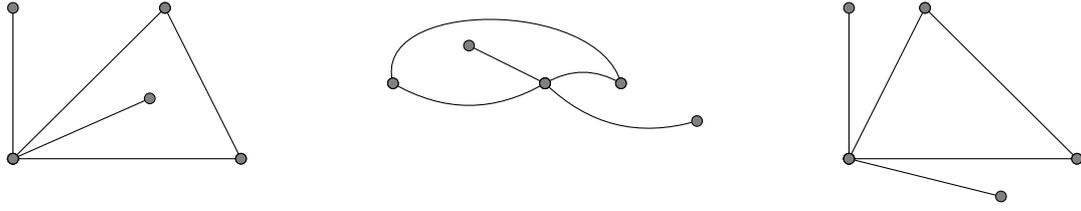


FIGURE 1 – Les deux premières cartes sont isomorphes. La dernière est différente même si le graphe sous-jacent est le même, par exemple car elle a une face à 3 arêtes. Notons que dans la carte de gauche, les 2 faces sont des 5-gones, puisqu'à chaque fois une arête est parcourue deux fois en faisant le tour de la face.

- On notera $|c|$ le nombre de sommets de c , quand celui-ci est fini.
- Une *face* est une composante connexe de c homéomorphe au disque unité. On dit qu'une face est un *m-gone* si son bord intersecte exactement m demi-arêtes. Un *triangle* est un 3-gone.
- Une *triangulation* t est la donnée d'une carte planaire c et d'un ensemble de faces triangulaires de c , telles que l'union des adhérences de ces faces soit connexe. Cette union est appelée *support* de t , et notée $S(t)$. Les faces de t qui ne sont pas dans le support sont appelées *faces externes*.
- On dit que t est une *triangulation de la sphère* si $S(t) = S^2$. On dit que t est une *triangulation du plan* si $S^2 \setminus S(t)$ est un singleton. On dit que t est une *triangulation d'un m-gone* si $S^2 \setminus S(t)$ est un m -gone simple (i.e dont les sommets sont deux à deux distincts).
- Une triangulation t est dite *localement finie* si tout compact de $S(t)$ intersecte un nombre fini de sommets, arêtes et faces.
- On dit que deux triangulations t_1 et t_2 sont *isomorphes* s'il existe un homéomorphisme de $S(t_1)$ dans $S(t_2)$ préservant l'orientation, qui envoie t_1 sur t_2 .

Dans la suite, on identifiera toujours deux cartes isomorphes.

Remarques 1.2. – Un même graphe planaire peut donner plusieurs cartes différentes, comme on peut le voir sur la figure 1.

- Une carte peut être vue comme un recollement de polygones le long de leurs arêtes. Il existe donc naturellement des définitions purement combinatoires équivalentes à la définition "topologique" qu'on a donné ici.
- L'hypothèse "localement finie" implique que le graphe sous-jacent soit localement fini. De plus, une triangulation localement finie de la sphère ou d'un m -gone est forcément finie, et une triangulation localement finie du plan est dénombrable.

La formule d'Euler donne une relation entre les nombres de sommets, de faces et d'arêtes et se montre aisément par récurrence sur le nombre de faces. On l'utilisera plusieurs fois par la suite :

Proposition 1.3. – Soit c une carte planaire, et v , e , f les nombres de sommets, d'arêtes et de faces de c . Alors $v - e + f = 2$.

- Si de plus c est une triangulation de la sphère, alors $f = 2v - 4$ et $e = 3v - 6$.

On s'intéresse à une classe particulière de triangulations :

Définition 1.4. – Une *triangulation enracinée* est une triangulation munie d'une arête orientée distinguée. On notera ρ le sommet de départ de l'arête racine et on l'appellera *sommet racine*.



FIGURE 2 – A gauche, une triangulation de la sphère à 7 sommets, 10 faces et 15 arêtes. La racine est en rouge. La carte de droite n'est pas une triangulation de la sphère car la face contenant le point à l'infini a quatre côtés.

- Une triangulation est *de type II*, ou *2-connexe* si le graphe sous-jacent n'a pas de boucle, c'est-à-dire d'arête reliant un sommet à lui-même, mais peut avoir des arêtes multiples.

L'enracinement donne un point de départ pour construire une carte "face par face", ce qui sera fondamental dans la suite, sans pouvoir obtenir la même carte de deux manières différentes. L'interdiction des boucles permet de simplifier l'écriture de certains résultats, et les arêtes multiples seront indispensables pour construire des cartes avec une propriété de Markov spatiale. A la fin de la section 3.2, on évoquera brièvement ce que deviennent les résultats en se passant de ces hypothèses.

Dans toute la suite de ce mémoire, sauf indication contraire, "triangulation" signifiera "triangulation enracinée de type II, localement finie". On note donc \mathcal{T} l'ensemble de ces triangulations. Comme on va s'intéresser à des problèmes de convergence, on définit une distance sur \mathcal{T} :

Définition 1.5. – Soit $t \in \mathcal{T}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. La boule de rayon r de t , notée $B_r(t)$, est la triangulation formée par les faces dont au moins un des sommets est à distance inférieure ou égale à $r - 1$ de ρ , ainsi que tous leurs sommets et leurs arêtes.

- Soient t et t' dans \mathcal{T} . Soit r le plus grand entier tel que $B_r(t) = B_r(t')$. On pose $d(t, t') = \frac{1}{1+r}$.

Proposition 1.6. d est une distance qui fait de \mathcal{T} un espace métrique complet séparable.

Démonstration. On vérifie facilement que d est ultramétrique, donc est bien une distance. La séparabilité vient du fait que les triangulations de la sphère sont denses et forment un ensemble dénombrable.

De plus, si (t_n) est une suite de Cauchy, alors pour tout r , les boules $B_r(t_n)$ sont constantes à partir d'un certain rang, égales à A_r . Les A_r sont de plus compatibles au sens où $B_r(A_{r'}) = A_r$ pour $r' \geq r$, donc on peut construire une triangulation A dont la boule de rayon r soit A_r pour tout r , et notre suite de Cauchy converge vers A . \square

Notons enfin que (\mathcal{T}, d) n'est pas compact. En effet, si une suite (t_n) de triangulations est telle que le degré de la racine dans t_n vaut n , on a $d(t_m, t_n) = 1$ pour tous $m \neq n$, donc (t_n) n'a pas de valeurs d'adhérence. Cependant, on peut cependant caractériser les compacts de \mathcal{T} de manière assez simple :

Proposition 1.7. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$. Alors \mathcal{A} est relativement compacte si et seulement si il existe une suite d'entiers (n_r) telle que pour tous $t \in \mathcal{A}$ et $r \in \mathbb{N}^*$, on ait $|B_r(t)| \leq n_r$.

Quand on parlera de "limite locale", il s'agira de limite pour cette distance d .

1.2 Préliminaires combinatoires

On introduit d'abord quelques notations concernant les triangulations finies :

Définition 1.8. – On note \mathcal{T}_n l'ensemble des triangulations de la sphère à n sommets, et μ_n la mesure de probabilité uniforme pour cet ensemble.

- Pour $p \geq 0$, on note $\varphi_{n,p}$ le nombre de triangulations d'un p -gone avec n sommets intérieurs, dont l'arête racine est sur le bord.

Remarques 1.9. – Le cas $p = 2$ et $n = 0$ est un peu particulier : il semblerait que $\varphi_{0,2} = 0$, mais une triangulation d'un p -gone servira essentiellement dans la suite à "remplir un trou". Or, une manière évidente de "remplir" un 2-gone sans sommet intérieur consiste à recoller les deux arêtes. Cela justifie la convention $\varphi_{0,2} = 1$ qu'on prendra dans toute la suite.

- On notera que $|\mathcal{T}_n| = \phi_{n-3,3}$ puisqu'une triangulation de la sphère à n sommets n'est autre qu'une triangulation d'un triangle avec $n - 3$ sommets intérieurs (rappelons que les triangulations sont supposées sans boucle, donc les trois sommets de la face racine sont distincts).

L'outil de base pour toute l'étude des limites locales de triangulations de la sphère est le théorème d'énumération des triangulations qui suit. C'est Tutte qui a rendu possible l'énumération de cartes par des méthodes calculatoires (utilisation de fonctions génératrices), avec des idées introduites dans [22]. Une preuve complète se trouve dans [16].

Théorème 1.10.

$$\varphi_{n,p+2} = \frac{2^{n+1}(2p+1)!(2p+3n)!}{p!^2 n!(2p+2n+2)!}$$

La formule de Stirling montre que $\varphi_{n,p+2} \sim C_{p+2} \left(\frac{27}{2}\right)^n n^{-5/2}$ avec :

$$C_{p+2} = \frac{\sqrt{3}(2p+1)!}{4\sqrt{\pi}p!^2} \left(\frac{9}{4}\right)^p \sim C9^p \sqrt{p}$$

Une autre classe de mesures sur des triangulations finies jouera un rôle important dans la suite :

Définition 1.11. Soient $p \geq 2$ et $t \leq \frac{2}{27}$. Une *triangulation libre de paramètre κ* d'un p -gone est une triangulation de loi ν_p où ν_p attribue à chaque triangulation (enracinée au bord) à n sommets intérieurs du p -gone un poids $\frac{\kappa^n}{Z_p^{(\kappa)}}$, où $Z_p^{(\kappa)} = \sum_{n \geq 0} \varphi_{n,p} \kappa^n$.

D'après les calculs d'équivalents, on sait que $Z_p^{(\kappa)}$ est fini ssi $\kappa \leq \frac{2}{27}$. Le calcul de la fonction de partition est une étape intermédiaire dans la démonstration de 1.10. Il figure aussi dans [16] :

Théorème 1.12. Si $\kappa = \theta(1 - 2\theta)^2$ alors :

$$Z_{p+2}^{(\kappa)} = \frac{(2p)!(1 - 2\theta)^{-(2p+2)}((1 - 6\theta)p + 2 - 6\theta)}{p!(p+2)!}$$

En particulier, dans le cas critique $\kappa = \frac{2}{27}$, on note :

$$Z_{p+2} = Z_{p+2}^{(2/27)} = \frac{(2p)!}{p!(p+2)!} \left(\frac{9}{4}\right)^{p+1}$$

1.3 Convergence vers l'UIPT

Pour énoncer le théorème principal de [7], il nous manque une dernière définition :

Définition 1.13. On dit qu'un graphe G n'a qu'un bout si pour tout H sous-graphe fini, $G \setminus H$ n'admet qu'une seule composante connexe infinie. Une carte n'a qu'un bout si le graphe sous-jacent n'a qu'un bout.

Remarque 1.14. Une triangulation t du plan n'a qu'un bout, puisqu'en retirant un compact à $S^2 \setminus \{x\}$, on garde un voisinage de x . Réciproquement, une triangulation infinie qui n'a qu'un bout est une triangulation du plan car $\setminus S(t)$ est un ouvert simplement connexe de S^2 distinct de S^2 , donc est homéomorphe à $S \setminus \{x\}$.

Théorème 1.15. (μ_n) converge faiblement pour la distance d , vers une mesure μ supportée par les triangulations du plan.

L'espace (\mathcal{T}, d) étant séparable et complet, il est naturel de commencer par montrer la tension. On note donc T_n une triangulation aléatoire de loi μ_n : d'après la proposition 1.7, la tension revient à montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, la suite $(|B_r(T_n)|)$ est tendue. On commence par le cas $r = 1$:

Lemme 1.16. On note D_ρ le degré de ρ . Il existe c tel que pour tous n et k :

$$\tau_n(D_\rho = k) \leq c \left(\frac{5}{3\sqrt{3}} \right)^k$$

Démonstration. Soient f_1, \dots, f_{D_ρ} les faces triangulaires qui touchent ρ , numérotées dans le sens trigonométrique en partant de l'arête racine et, pour $s < D_\rho$, soit $T_n^{(s)}$ la triangulation formée par les faces de f_1 à f_s avec leurs sommets et leurs arêtes. On montre que, conditionnellement à $T_n^{(s)}$, la probabilité que $D_\rho = s + 1$ est minorée par une constante strictement positive.

On note $n' = n - |T_n^{(s)}|$ et p le périmètre de $T_n^{(s)}$: la probabilité que $D_\rho = s + 1$ est supérieure ou égale à la probabilité qu'une face contienne ρ et les deux arêtes "libres" issues de ρ dans $T_n^{(s)}$. Cette probabilité vaut $\frac{\varphi_{n', p-1}}{\varphi_{n', p}} \geq \frac{2}{27}$ si $p > 2$, en utilisant 1.10. Or, en ajoutant les triangles un par un, on a $p > 2$ au moins une fois sur deux, donc la probabilité d'avoir au moins s arêtes issues de ρ se majore par $\left(\frac{25}{27}\right)^{(s-1)/2}$. \square

Pour "propager" la tension, on utilise le lemme suivant, dont la preuve est facile :

Lemme 1.17. μ_n est invariante par réenracinement selon une marche aléatoire. Autrement dit, si T_n est de loi μ_n , si x est un voisin de ρ dans T_n choisi de manière uniforme et \vec{e} une arête orientée issue de x choisie de manière uniforme, alors T_n avec pour racine \vec{e} suit aussi une loi μ_n .

Idée de la démonstration. On commence par montrer l'invariance par réenracinement sur une arête uniforme, puis on utilise le fait que la mesure uniforme sur les arêtes est stationnaire pour la marche aléatoire. \square

On peut maintenant obtenir la tension, par récurrence sur r :

Lemme 1.18. Pour tous r et n , on pose $M_r(n) = \max\{D_v | v \in B_r(T_n)\}$. Alors pour tout r , la suite $(M_r(n))$ est tendue par rapport à n .

Idée de la démonstration. Le cas $n = 0$ a déjà été traité.

Si le résultat est vrai au rang r , on note (X_t) une marche aléatoire simple sur T_n issue de ρ . On sait que $D_{X_{r+1}}$ a la même loi que D_ρ . De plus, pour tout x sommet de $B_{r+1}(T_n)$,

$\mathbb{P}(X_{r+1} = x) \geq \frac{1}{M_r^{r+1}}$. Autrement dit $D_{X_{r+1}}$ a une queue exponentielle et $X_{r+1} = x$ avec probabilité pas trop petite pour tout x , le tout uniformément en n . On en déduit le résultat au rang $r + 1$. \square

Comme $|B_r| \leq M_r^r$, on en déduit :

Théorème 1.19. La famille de mesures (μ_n) est tendue.

Avant de montrer la convergence en loi, on a besoin du résultat suivant (on rappelle qu'une triangulation n'a qu'un bout si le complémentaire d'une partie finie n'a qu'une composante connexe infinie) :

Proposition 1.20. Soit μ la limite d'une sous-suite de (μ_n) , et T de loi μ . Presque sûrement, T n'a qu'un bout.

Idee de la démonstration. Cela revient à montrer que pour tout k , la probabilité sous μ_n qu'il existe un cycle de longueur k passant par la racine et séparant deux parties de volume supérieur à a tend vers 0 quand $a \rightarrow +\infty$, et ce uniformément en n . On dit qu'un tel cycle est (k, a) -séparant. Un couple (t, c) où $t \in \mathcal{T}_n$ et c est un cycle (k, a) -séparant de t peut être vu comme deux triangulations d'un k -gone, chacune avec au moins a sommets internes, enracinées sur leurs bords respectifs et recollées le long de leurs bords. On peut donc dénombrer ces couples à l'aide de 1.10. Après quelques calculs, on trouve que l'espérance du nombre de cycles (k, a) -séparants de T_n se majore par $C(k)a^{-3/2}$, d'où le résultat. \square

Notons que T est p.s. une triangulation infinie à un bout. Elle est donc une triangulation du plan.

La convergence en loi des boules finies va jouer le même rôle que celle des marginales finidimensionnelles pour la convergence des processus. On va donc montrer la convergence des probabilités d'événements du type $t \subset T$, où t est une triangulation (déterministe) finie. Il sera plus commode de choisir des t qui ne peuvent apparaître qu'une fois dans T :

Définition 1.21. Une triangulation finie t est dite *rigide* si aucune triangulation ne contient deux copies différentes de t telles que la racine coïncide.

Lemme 1.22. Une triangulation est rigide dès qu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- Tout sommet de t touche au moins un triangle du support de t .
- Dans le graphe dual de t , les triangles du support forment un graphe connexe.
- Aucune arête ne sépare deux faces externes.

En particulier, pour toute triangulation t du plan, la boule $B_r(t)$ est rigide pour tout $r \geq 1$.

La convergence en loi va ainsi découler de la proposition suivante :

Proposition 1.23. Soit t une triangulation rigide finie, et μ la limite d'une sous-suite de (μ_n) . On suppose que t a m sommets (en comptant ceux du bord), et que le bord de t est constitué de k polygones simples de périmètres p_1, \dots, p_k . Alors, en posant $\alpha = \frac{2}{27}$:

$$\mu(t \subset T) = \frac{\alpha^{3-m}}{C_1} \left(\prod_{i=1}^k Z_{m_i} \right) \sum_{i=1}^k \frac{C_{m_i}}{Z_{m_i}}$$

De plus, la probabilité $t \subset T$ et que la i -ème face externe soit la face infinie correspond au i -ème terme de la somme, soit :

$$\alpha^{3-m} \frac{C_{p_i}}{C_3} \prod_{j \neq i} Z_{p_j}$$

Démonstration. On note $Q(t, m_2, \dots, m_k)$ l'événement où $t \subset T$ et la partie de T correspondant à la i -ème face externe de t contient m_i sommets. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m_1 = n - m - \sum_{i=2}^k m_i$. On a alors :

$$\mu_n(Q) = \frac{\prod_{i=1}^k \varphi_{m_i, p_i}}{\varphi_{n-3, 3}}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$\frac{\varphi_{m_1, p_1}}{\varphi_{n-3, 3}} \sim \frac{C_{p_1} m_1^{-5/2} \alpha^{m_1}}{C_3 (n-3)^{-5/2} \alpha^{n-3}} \rightarrow \frac{C_{p_1} \alpha^{-m - \sum_{i>1} m_i}}{C_3 \alpha^{-3}}$$

donc $\mu(Q) = \alpha^{3-n} \frac{C_{p_1}}{C_3} \prod_{i>1} \varphi_{m_i, p_i} \alpha^{-m_i}$.

Notons maintenant $R_i(t)$ l'événement où $t \subset T$ et où toutes les faces externes sauf éventuellement la i -ème contiennent un nombre fini de sommets. On a $R_1(t) = \bigcup_{n_2, \dots, n_k < +\infty} Q(t, m_2, \dots, m_k)$ d'où :

$$\mu(R_1) = \alpha^{3-m} \frac{C_{p_1}}{C_3} \sum_{m_2, \dots, m_k < +\infty} \prod_{i=2}^k \varphi_{m_i, p_i} \alpha^{-m_i} = \alpha^{3-m} \frac{C_{p_1}}{C_3} \prod_{i=2}^k Z_{p_i}$$

et on a une formule similaire pour R_j avec $j > 1$, ce qui prouve la deuxième partie de la proposition.

De plus, on sait que $\mu(R_i \cap R_j) = 0$ car $\mu(|T| < +\infty) = 0$ et on a $\mu(\{t \subset T\} \setminus \bigcup_i R_i(t)) = 0$ car T n'a qu'un bout μ -p.s. d'après 1.20, d'où la première partie. \square

Démonstration du théorème 1.15. D'après 1.19, il suffit de montrer que (μ_n) n'admet qu'une valeur d'adhérence. Or, d'après 1.22, les boules de rayon r sont toujours rigides donc 1.23 fixe $\mu(B_r(T) = t)$ pour tout t . Or, par le lemme de classe monotone, les $\mu(B_r(T) = t)$ caractérisent entièrement μ , d'où le théorème. \square

On notera dans la suite μ la mesure limite, et on appellera *UIPT* une triangulation de loi μ , et on la notera T .

1.4 Propriété de Markov spatiale

La propriété de Markov "temporelle" habituelle pour un processus discret X revient à dire que, conditionnellement à ce qu'il s'est passé jusqu'au temps n , la loi de ce qu'il se passe après n ne dépend que de X_n . L'UIPT vérifie une propriété analogue : conditionnellement à ce que T contienne une triangulation rigide t , la loi du reste de T ne dépend que du bord de t , et peut être décrite de manière explicite. On réutilise les notations $R_i(t)$ et $Q(t, m_2, \dots, m_k)$ définies dans la preuve de 1.23.

Théorème 1.24. Soit t une triangulation rigide finie. On suppose que le bord de t est constitué de k polygones simples de périmètres p_1, \dots, p_k . Conditionnellement à R_i , on note T_j la partie de T correspondant à la j -ième face externe. Alors :

- Les triangulations T_j sont indépendantes.
- T_i a la loi d'une UIPT d'un p_i -gone, c'est-à-dire la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de la mesure uniforme sur les triangulations d'un p_i -gone avec n sommets internes.
- Si $j \neq i$, alors T_j a la loi d'une triangulation libre d'un p_j -gone.

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose $i = 1$. D'après la preuve de 1.23, pour tous m_2, \dots, m_k on a :

$$\mu(\forall j > 1, |T_j| = m_j | R_1) = \prod_{j=2}^k \frac{\varphi_{m_j, p_j} \alpha^{-m_j}}{Z_{p_j}}$$

donc les $|T_j|$ avec $j \neq i$ sont indépendantes et ont la loi du volume de triangulations libres de p_j -gones. De plus, conditionnellement à $Q(t, m_2, \dots, m_k)$, les différents $(k - 1)$ -uplets de triangulations des p_j -gones sont équiprobables sous μ_n pour tout n , donc aussi sous μ , donc les T_j avec $j > 1$ sont bien des triangulations libres indépendantes.

Enfin, conditionnellement à R_1 et aux T_j avec $j > 1$, la loi de T_1 sous μ est la limite de la loi uniforme d'un p_1 -gone, de taille $m_1 = n - |t| - \sum_{i>1} m_i$ quand m_1 tend vers l'infini. En particulier, cette loi limite existe. De plus, elle ne dépend ni de $|t|$ ni des m_i car $m_1 \rightarrow +\infty$ dans tous les cas, donc T_1 est bien indépendante des autres T_j et a la loi d'une UIPT d'un p_1 -gone. \square

2 Etude de l'UIPT par le peeling

2.1 Le processus de peeling

Le "peeling", ou épluchage, est une manière d'explorer l'UIPT introduite par Angel dans [2]. L'idée est d'explorer l'UIPT face par face : la propriété de Markov spatiale garantit que l'exploration est markovienne, et les transitions peuvent se calculer explicitement grâce aux résultats combinatoires de la partie précédente. Cet outil permet de réaliser des simulations numériques, mais également d'obtenir des informations de nature géométriques sur l'UIPT.

On s'intéresse donc à une UIPT d'un p -gone :

Proposition 2.1. On note x_0, \dots, x_{p-1} les sommets du p -gone dans l'ordre trigonométrique et on appelle y le troisième sommet du triangle qui touche l'arête (x_0, x_{p-1}) .

1. Avec probabilité $\frac{C_{p+1}}{\alpha C_p}$, le sommet y n'est pas sur le bord.
2. Avec probabilité $\frac{Z_{p-i} C_{i+1}}{C_p}$, on a $y = x_i$ et la face (x_0, x_{p-1}, x_i) sépare l'UIPT du p -gone en deux triangulations : T_1 infinie, de bord de longueur $i + 1$ et T_2 , de bord de longueur $p - i$. De plus, conditionnellement à cet événement, T_1 est une UIPT d'un $(i + 1)$ -gone et T_2 est une triangulation libre d'un $(p - i)$ -gone.
3. Avec probabilité $\frac{Z_{i+1} C_{p-i}}{C_p}$, on a $y = x_i$, mais cette fois T_1 est finie et T_2 infinie. Conditionnellement à cet événement, T_1 est une triangulation libre d'un $(i + 1)$ -gone et T_2 est une UIPT d'un $(p - i)$ -gone.

Démonstration. Le fait qu'une exactement des deux triangulations T_1 et T_2 est infinie découle du fait que l'UIPT n'a qu'un bout. Les lois de T_1 et T_2 conditionnellement à la position de y et au choix de la triangulation qui est infinie sont données par 1.24. Il ne reste donc plus qu'à calculer les probabilités des différents événements envisagés.

Or, soit t une triangulation finie d'un p -gone : d'après 1.24, une UIPT d'un p -gone peut être vue comme une UIPT conditionnée à contenir t . Or, si T est une UIPT, 1.23 donne :

- la probabilité que T contienne t
- la probabilité que T contienne t en ajoutant un triangle (x_0, x_{p-1}, y) avec $y \neq x_i$ pour tout i .
- la probabilité qu'elle contienne t en ajoutant le triangle (x_0, x_{p-1}, x_i) et, dans ce cas, la probabilité que T_1 soit infinie.

On en déduit immédiatement les probabilités données par la proposition. \square

Le peeling consiste à découvrir l'UIPT de la manière suivante : on part d'un simple triangle, on choisit une arête et on l'"épluche", c'est-à-dire qu'on découvre la face extérieure au triangle qui touche cette arête et, si on forme ainsi deux composantes connexes, on découvre aussi la composante connexe finie. On obtient alors un p -gone avec $p \in \{2, 3, 4\}$ et on recommence...

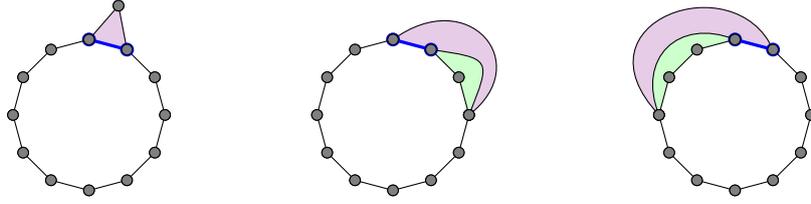


FIGURE 3 – Les trois cas décrits par la proposition 2.1. En bleu, l'arête épluchée et en violet, la face adjacente. En vert, la composante connexe finie qu'on remplit par une triangulation libre. On a $i = 9$ sur le deuxième dessin et $i = 3$ sur le troisième.

On notera T_n la triangulation découverte après n étapes d'épluchage. La proposition précédente garantit que cette exploration est markovienne. On remarque également qu'à chaque étape, le bord de T_n est un polygone simple.

Un avantage important du peeling est sa très grande souplesse : on peut à chaque étape choisir la prochaine arête à éplucher, de manière déterministe ou en faisant intervenir une source indépendante d'aléatoire. La seule contrainte est qu'à chaque étape, la prochaine arête à éplucher doit être indépendante de l'extérieur de la partie qu'on n'a pas encore découverte.

Ainsi, pour étudier la croissance de l'UIPT on la découvrira "couche par couche", en découvrant les sommets par distance à la racine croissante. L'étude de modèles probabilistes sur l'UIPT demandera de l'explorer différemment, par exemple selon une marche aléatoire ou en suivant des interfaces de percolation.

Remarque 2.2. La technique peut s'adapter à d'autres classes de cartes planaires comme les quadrangulations, mais le nombre de cas à traiter augmente alors assez vite, ce qui rend son utilisation plus compliquée...

2.2 Croissance de l'UIPT

Le but de cette partie est d'obtenir des résultats presque sûrs sur la croissance de $|B_r(T)|$, et en particulier de montrer le résultat suivant, issu de [2] :

Théorème 2.3. Il existe c tel que presque sûrement, pour r assez grand :

$$\frac{r^4}{(\ln r)^c} \leq |B_r(T)| \leq r^4 (\ln r)^c$$

On note P_n la longueur du bord de T_n . Le processus (P_n) est appelé *processus de peeling* de l'UIPT. 2.1 montre que (P_n) est une chaîne de Markov, et permet de calculer ses transitions. Si on note $X_n = P_{n+1} - P_n$ et $q_{i,p} = \mathbb{P}(X_n = i | P_n = p)$, on a :

$$q_{1,p} = \frac{C_{p+1}}{\alpha C_p} = \frac{2p-1}{3p-3}$$

et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$q_{-i,p} = 2 \frac{C_{m-i} Z_{i+1}}{C_p} = \frac{2(2i-2)!}{(i-1)!(i+1)!} \cdot \frac{(p-2)!^2 (2p-2i-3)!}{(p-i-2)!^2 (2p-3)!}$$

Remarque 2.4. La loi de (P_n) ne dépend pas des choix d'arêtes à éplucher. Les résultats qui portent uniquement sur (P_n) sont donc vrais quelque soit la méthode d'exploration choisie.

On peut remarquer que, quand $p \rightarrow +\infty$, on a :

$$q_{1,p} \rightarrow q_1 = \frac{2}{3}$$

et, pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$q_{-i,p} \rightarrow q_{-i} = \frac{2(2i-2)!}{(i-1)!(i+1)!4^i}$$

On peut également faire les remarques faciles suivantes :

- La loi limite de X_n est équilibrée, i.e $\sum_{i \in -\mathbb{N}^* \cup \{1\}} i q_i = 0$.
- La loi limite a une queue lourde. Plus précisément, on a $q_{-k} \sim Ck^{-5/2}$. En particulier, la loi limite n'admet pas de second moment.
- $(q_{1,p})$ est décroissante et $(q_{-k,p})$ est croissante en p pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. La loi de X_n sachant $P_n = p$ est donc d'espérance positive pour tout n .

(M_n) ressemble donc à une marche aléatoire équilibrée, biaisée positivement pour des petites valeurs, ce qui lui permet de rester positive. Angel montre dans [2] le résultat suivant :

Théorème 2.5. Il existe une constante c tel que presque sûrement, pour n assez grand :

$$\frac{n^{2/3}}{(\ln n)^c} \leq P_n \leq n^{2/3} (\ln n)^c$$

Même si ce fait n'est pas utilisé dans la démonstration d'Angel, Curien remarque dans [13] que (P_n) est une marche aléatoire dont les pas ont la loi décrite par les q_i , conditionnée à rester positive (plus précisément, c'est la limite locale quand $N \rightarrow +\infty$ d'une marche conditionnée à rester positive au moins jusqu'au temps N). Par conséquent, le processus P_n doit rester du même ordre de grandeur qu'une marche aléatoire dont les pas ont la loi (q_i) . Cette loi n'admet pas de second moment, ce qui nous prive du théorème central limite. Cependant, elle est dans le domaine d'attraction d'une loi stable totalement asymétrique d'indice $\frac{3}{2}$, ce qui suggère que P_n doit être de l'ordre de $n^{2/3}$. On pourra trouver dans la section 2.7 de [15] un énoncé plus précis sur la convergence en loi vers des variables stables.

Cette argument donne l'origine de l'exposant $\frac{2}{3}$. Cependant, les énoncés classiques de convergence vers des variables stables sont des analogues du théorème central limite, alors qu'ici on cherche plutôt un analogue de la loi du logarithme itéré. On donne les grandes lignes de la preuve d'Angel :

Idée de la démonstration du théorème 2.5. La preuve de la majoration est similaire à celle de la loi du logarithme itéré classique : on applique l'inégalité de Markov à des exponentielles de sommes partielles en ajustant tous les paramètres comme il faut. Pour remédier à l'absence de second moment, au lieu de majorer e^x pour x petit par $1+x+cx^2$, on le majore par $1+x+c|x|^{3/2}$.

D'autre part, des calculs de fonctions génératrices permettent d'obtenir de manière exacte la probabilité que la chaîne de Markov (P_n) , en partant d'une valeur p_1 , ne repasse jamais par une valeur $p_2 < p_1$. Elle vaut $\prod_{j=2}^{p_2} \frac{p_1-j}{p_1+1/2-j}$. En particulier, la chaîne (P_n) est transiente. Or, à chaque étape P_n a une certaine probabilité de faire un "grand" pas en arrière. L'idée est de montrer que si P_n reste trop longtemps dans un intervalle, elle finit avec forte probabilité par redescendre "très bas", ce qui contredit le calcul précédent. \square

Il est maintenant temps de préciser l'ordre dans lequel on effectue les opération de peeling : l'idée est d'explorer l'UIPT "couche par couche", en tournant autour de la racine dans le sens trigonométrique, comme sur la figure 4. Plus précisément, on démarre avec le triangle situé à gauche de l'arête racine, puis on épiluche l'arête racine à droite. A chaque étape suivante, si tous

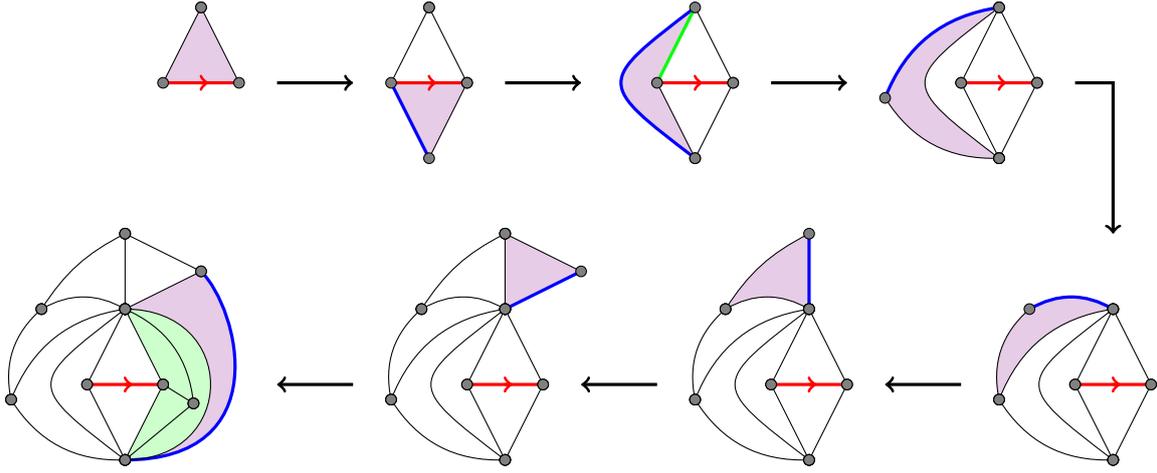


FIGURE 4 – Illustration de l'ordre d'épluchage choisi pour étudier la croissance. En rouge, l'arête racine. En violet, la face qu'on vient de découvrir. En vert, l'éventuel $(i + 1)$ -gone rempli. En bleu, la prochaine arête à éplucher.

les sommets au bord sont à distance r de la racine, on épluche n'importe quelle arête du bord. Sinon, en notant x_0, x_1, \dots, x_{p-1} les sommets du bord numérotés dans le sens trigonométrique, quitte à décaler la numérotation, on peut supposer qu'il existe i tel que x_0, \dots, x_i sont à distance $r + 1$ de la racine et x_{i+1}, \dots, x_{p-1} à distance r . On épluche alors l'arête (x_i, x_{i+1}) .

La prochaine étape est d'estimer le nombre d'étapes nécessaires pour découvrir la boule de rayon r . On note donc τ_r le plus petit temps tel que tous les sommets du bord de T_{τ_r} soient à distance r de la racine. Remarquons que T_{τ_r} n'est pas $B_r(T)$, car on ne contrôle pas les distances à la racine des sommets dans les triangulations libres qu'on ajoute.

Définition 2.6. Si t est une triangulation infinie et $t' \subset t$, on note \bar{t}' et on appelle *enveloppe de t'* la réunion de t' et de toutes les composante connexes finies de son complémentaire.

On a ainsi $T_{\tau_r} = \overline{B_r(T)}$. Toujours dans [2], Angel montre le résultat suivant :

Théorème 2.7. Il existe c tel que presque sûrement, pour r assez grand :

$$\frac{r^3}{(\ln r)^c} \leq \tau_r \leq r^3 (\ln r)^c$$

On a donc à corrections logarithmiques près $|\partial \overline{B_r(T)}| = P_{\tau_r} \approx r^2$.

Idee de la démonstration. Tous les sommets qui sont sur le bord à l'instant τ_{r+1} sont à distance $r + 1$ de la racine, donc n'étaient pas dans T_{τ_r} , donc ils sont apparus entre τ_r et τ_{r+1} , et un au plus apparaît par étape de peeling, d'où $\tau_{r+1} - \tau_r \geq P_{\tau_{r+1}}$.

D'autre part, le temps τ_{r+1} correspond au moment où tous les sommets de $\partial \overline{B_r(T)}$ ont été "avalés". À chaque étape entre τ_r et τ_{r+1} , le premier sommet du bord dans l'ordre trigonométrique qui est à distance r de la racine a une probabilité minorée par une constante $c > 0$ d'être avalé, donc les temps nécessaires pour "avaler" les différents sommets se majorent par des variables géométriques i.i.d., ce qui donne p.s $\tau_{r+1} - \tau_r \leq c' P_{\tau_r} + c'' \ln \tau_r$ pour r assez grand. On a donc $\tau_{r+1} - \tau_r$ de l'ordre de $P_{\tau_r} \approx \tau_r^{2/3}$ (à corrections logarithmiques près) donc τ_r est de l'ordre de r^3 . \square

On s'intéresse maintenant à la croissance de l'enveloppe de $|B_r(T)|$:

Théorème 2.8. Il existe c tel que presque sûrement, pour r assez grand :

$$\frac{r^4}{(\ln r)^c} \leq |\overline{B_r(T)}| \leq r^4 (\ln r)^c$$

On peut voir apparaître l'exposant 4 comme suit : notons Y_n le nombre de sommets ajoutés à la triangulation à l'étape n . Par calcul sur les fonctions génératrices, l'espérance du nombre de sommets intérieurs d'une triangulation libre d'un p -gone est de l'ordre de p^2 , donc $\mathbb{E}[Y_n|X_n]$ est de l'ordre de X_n^2 . On a donc :

$$\mathbb{E}[Y_n|P_n] \approx \sum_{k=1}^{P_n} k^2 \mathbb{P}(X_n = -k) \approx \sum_{k=1}^{P_n} \frac{k^2}{k^{5/2}} \approx P_n^{1/2} \approx n^{1/3}$$

donc $|T_n|$ est de l'ordre de $n^{4/3}$ et $|\overline{B_r(T)}| = |T_{\tau_r}| \approx (r^3)^{4/3} = r^4$.

Idée de la démonstration. La majoration repose sur la comparaison avec des variables stables : à l'aide des formules d'énumération, on montre que le nombre de sommets internes d'une triangulation libre d'un p -gone est dominé avec grande probabilité par $p^2(aS_{3/2} + b)$ où $S_{3/2}$ est une variable stable totalement asymétrique d'indice $\frac{3}{2}$. En conditionnant sur (X_n) , on se ramène ainsi à majorer des termes de la forme $\sum |X_n|^\gamma$. Mais $\mathbb{P}(|X_n|^\gamma \geq \lambda) = O(\lambda^{-3/(2\gamma)})$, ce qui permet de majorer les sommes en dominant les $|X_n|^\gamma$ par des variables stables.

Pour la minoration, on sait que $\mathbb{P}(|X_n| \geq \lambda)$ est de l'ordre de $\frac{1}{\lambda^{3/2}}$, donc on montre qu'il existe des $|X_n|$ de l'ordre de $n^{2/3} \approx r^2$, de sorte que Y_n est de l'ordre de r^4 . \square

Comme $|B_r(T)| \leq |\overline{B_r(T)}|$, on en déduit immédiatement la majoration du théorème 2.3. La minoration est plus délicate : le nombre d'étapes de peeling étant en r^3 , la plupart des sommets de $\overline{B_r(T)}$ ont été ajoutés en tant que sommets internes d'une triangulation libre. On ne contrôle donc pas directement leur distance à la racine. Il faut donc s'assurer qu'une triangulation libre contient suffisamment de sommets pas trop éloignés du bord. C'est ce qu'assure le lemme suivant :

Lemme 2.9. Il existe $c > 0$ et C tels que pour tout p , avec probabilité supérieure ou égale à c , une triangulation libre d'un p -gone contient au moins cp^2 sommets internes, à distance du bord inférieure à $\sqrt{p}(\ln p)^C$.

Une fois ce lemme prouvé, le théorème 2.3 vient rapidement : pour les mêmes raisons que dans la preuve de 2.8, on peut trouver avant τ_r un certain nombre de termes $|X_n|$ de l'ordre de r^2 , et le lemme assure qu'au moins un contient $c(X_n^2)^2 \approx cr^4$ sommets dont la distance au bord est au plus de l'ordre de $\sqrt{|X_n|} \approx r$, donc ces sommets sont dans une boule de rayon de l'ordre de r , d'où le résultat.

Idée de la preuve du lemme 2.9. Le lemme revient à majorer la distance au bord d'un point uniformément choisi dans une triangulation libre. On considère pour cela une triangulation pointée libre \tilde{T} d'un p -gone, qui est un peu différente de la triangulation libre habituelle car elle est biaisée par la taille.

L'algorithme de peeling peut s'adapter à la simulation de \tilde{T} . A chaque étape, on peut soit découvrir le sommet distingué, soit découvrir un autre sommet et arrêter le processus, soit séparer le p -gone en deux et remplir avec une triangulation libre la partie qui ne contient pas le sommet distingué, puis continuer à explorer l'autre partie. On note \tilde{P}_n le périmètre après n étapes : des calculs combinatoires sur $|\tilde{T}|$ en fonction de p montrent qu'avec grande probabilité \tilde{P}_n ne peut pas devenir trop grand car alors on aurait trop de sommets internes. De plus, on finit forcément par faire un grand "saut en arrière".

Plus précisément, le premier instant n où $\tilde{P}_n \leq \frac{p}{2}$ est de l'ordre de $p^{3/2}$ et, en itérant ce résultat, le processus termine avec probabilité minorée par une constante en temps environ

$p^{3/2} \ln p$. Pour les mêmes raisons que dans 2.7, le temps nécessaire pour "remplir une couche" est de l'ordre de p , donc avec probabilité au moins c , le sommet distingué est au plus à distance de l'ordre de \sqrt{p} .

Il reste à corriger le biais par la taille quitte à perdre un peu sur la constante c , ce qui fait l'objet d'un rapide calcul. \square

2.3 Percolation sur l'UIPT

On cherche maintenant à étudier la percolation par sites sur l'UIPT, et plus précisément à déterminer la probabilité critique. Soit donc $\pi \in [0, 1]$. Conditionnellement à la carte, on considère une famille (X_v) i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre π , indexée par les sommets et on colorie v en noir si $X_v = 1$ et en blanc si $X_v = 0$. Pour une triangulation fixée t , on note $\pi_c(t)$ la probabilité critique. Notons que π_c dépend a priori de la triangulation, et est donc une variable aléatoire.

Théorème 2.10. La probabilité critique "annealed" pour la percolation sur l'UIPT vaut $\frac{1}{2}$. Autrement dit, on a $\inf \{ \pi \mid \mathbb{P}(\pi_c \leq \pi) > 0 \} = \frac{1}{2}$.

Démonstration. On peut explorer la carte obtenue comme précédemment mais désormais, à chaque étape de peeling, on tire au sort la couleur de tous les sommets qu'on vient de découvrir. Les T_n sont donc maintenant des triangulations où chaque sommet est colorié en noir ou blanc. De plus, l'ordre dans lequel on choisit de découvrir la carte est différent : on cherche à suivre les interfaces de percolation. Plus précisément, on procède donc comme suit (cf. figure 5) :

- On commence avec un triangle contenant la racine ρ . Sans perte de généralité, on peut supposer le sommet racine noir. Les couleurs des deux autres sont données par des variables de Bernoulli.
- Si après n étapes tous les sommets du bord sont de la même couleur, on choisit une arête quelconque sur le bord.
- Sinon, on épluche une arête du bord qui a un sommet blanc et un sommet noir.

On note T_n la triangulation décorée obtenue au bout de n étapes, et B_n et W_n les nombres de sommets noirs et blancs sur le bord de T_n .

Par récurrence, on remarque que pour tout n , les B_n points noirs sur le bord de T_n sont consécutifs, de même que les points blancs. De plus, si il existe n tel que $B_n = 0$, alors un cycle blanc sépare ρ de l'infini, donc la composante connexe noire qui contient ρ est finie. Sinon, tout sommet noir découvert est voisin d'un sommet noir découvert précédemment donc on a une infinité de sommets noirs reliés à ρ , et la composante connexe noire qui contient ρ est infinie.

Il reste donc à montrer que si $\pi < \frac{1}{2}$ alors presque sûrement il existe n tel que $B_n = 0$, et si $\pi > \frac{1}{2}$ alors $\mathbb{P}_\pi(\forall n, B_n > 0) > 0$. Or, on sait que $B_n + W_n = P_n$, et (P_n) se comporte comme une marche aléatoire neutre car, $\mathbb{E}[P_{n+1} - P_n | P_n] \xrightarrow[p.s.]{} 0$. Ainsi, si $\pi < \frac{1}{2}$, alors B_n est dominée à partir d'un certain rang par une marche aléatoire biaisée négativement, avec une transition tronquée pour qu'elle reste positive. Elle finira donc forcément par s'annuler et reste ensuite d'ordre $\ln n$. Si $\pi > \frac{1}{2}$, les rôles sont inversés donc $B_n \rightarrow +\infty$ p.s. donc $\mathbb{P}_\pi(\forall n, B_n > 0) > 0$, d'où le résultat. \square

Enfin, pour obtenir un énoncé "quenched", c'est-à-dire valable presque sûrement et pas seulement avec probabilité strictement positive, on a besoin d'une loi du 0-1 que voici :

Théorème 2.11. Soit A un événement invariant si on modifie une sous-triangulation finie. Alors $\mu(A) \in \{0, 1\}$.

En particulier, la probabilité critique π_c est presque sûrement constante sous μ , donc vaut presque sûrement $\frac{1}{2}$ d'après 2.10.

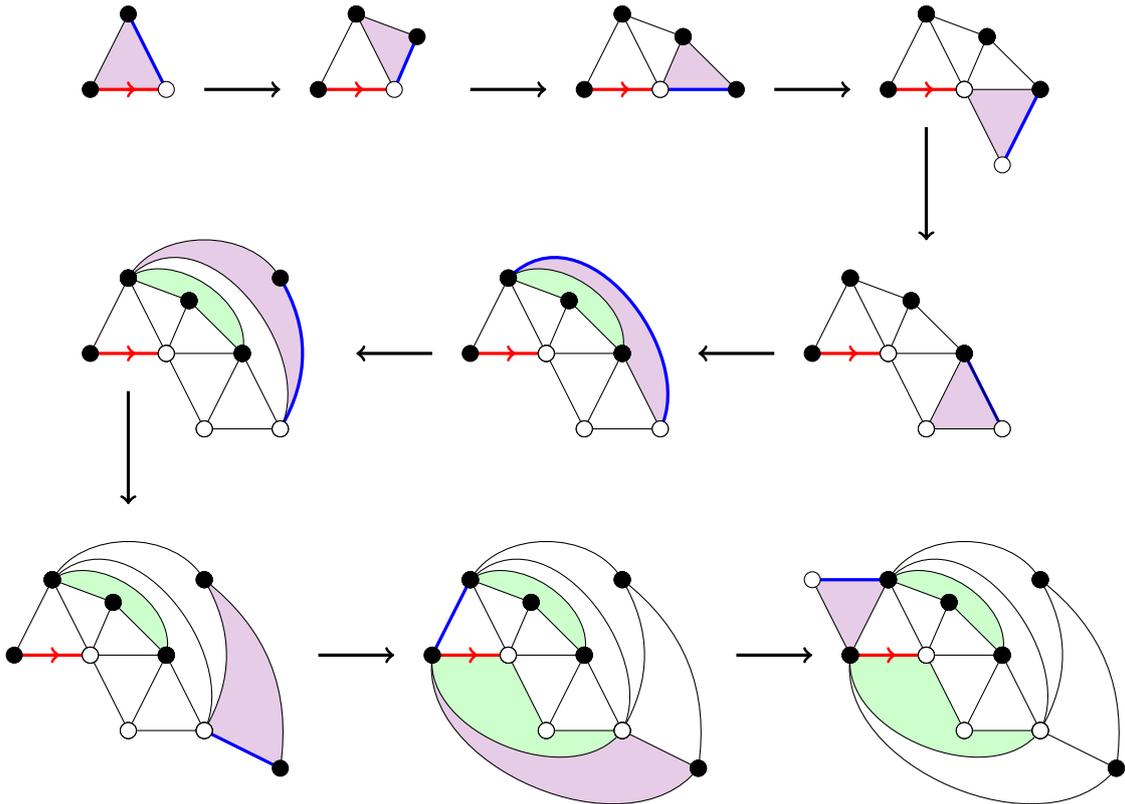


FIGURE 5 – Illustration de l'ordre d'épluchage choisi pour étudier la percolation. En rouge, l'arête racine. En violet, la face qu'on vient de découvrir. En vert, l'éventuel $(i + 1)$ -gone à remplir (on n'a pas besoin de connaître l'intérieur). En bleu, la prochaine arête à éplucher.

Idée de la démonstration. L'idée consiste à décrire l'UIPT comme fonction d'une famille de variables indépendantes (X_i) , telle que modifier une sous-triangulation finie revient à modifier un nombre fini de X_i , afin de déduire le théorème de la loi du 0 – 1 de Kolmogorov. Une preuve complète se trouve dans [2]. \square

3 Triangulations markoviennes du demi-plan

Devant l'utilité du processus de peeling, il paraît naturel de se demander quelles sont les triangulations aléatoires qu'on peut découvrir de manière aussi agréable. On va d'abord s'intéresser au cas du demi-plan, en suivant [6].

3.1 L'UIHPT

Définition 3.1. On dit qu'une triangulation t est une *triangulation du demi-plan* si, avec les notations de 1.1, le bord de $S(t)$ est homéomorphe à une droite. Autrement dit, c'est une triangulation qui peut se plonger dans le plan de manière à ce que son support soit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et son bord $\mathbb{R} \times \{0\}$.

L'intérêt du demi-plan est qu'en retirant une triangulation finie simplement connexe à une triangulation du demi-plan, on obtient une triangulation du demi-plan, qui pourra avoir la même loi que la triangulation de départ ! On peut donc se débarrasser d'un paramètre dans le processus de peeling (cela revient à pouvoir prendre $p = \infty$ tout le temps), ce qui rend son étude plus simple. On commence donc par la propriété suivante, qu'on peut trouver dans [3], permettant de définir l'UIHPT, analogue semi-planaire de l'UIPT :

Proposition 3.2. Soit $T_{\infty,p}$ une UIPT d'un p -gone, comme définie dans 1.24. Alors $(T_{\infty,p})$ converge en loi quand $p \rightarrow \infty$ vers une triangulation du demi-plan, appelée *UIHPT* pour *Uniform Infinite Half-Planar Triangulation*.

Démonstration. La tension s'obtient de manière similaire à 1.19 : le peeling pour l'UIPT d'un p -gone montre qu'on a à chaque étape une probabilité minorée par une constante d'"avalier" un sommet du bord. Le nombre d'étapes nécessaires pour découvrir une boule autour d'un point du bord se majore donc avec grande probabilité, uniformément en p . Les lois des triangulations libres avec lesquelles on remplit les trous ne dépendent pas de p , donc on garde une majoration uniforme.

La convergence des $\mathbb{P}(\overline{B_r}(T_{\infty,p}) = t)$ découle de la convergence simple des transitions du processus de peeling. \square

On peut se convaincre assez facilement que l'UIHPT peut se découvrir par un processus de peeling similaire à l'UIPT, mais en remplaçant les $q_{i,p}$ par leurs limites q_i quand $p \rightarrow +\infty$. Ainsi, à chaque étape, on a découvert une triangulation finie, et le reste est une triangulation du demi-plan de même loi que la triangulation de départ.

3.2 Classification des triangulations markoviennes du demi-plan

Avant d'évoquer la propriété de Markov proprement dite, commençons par une propriété plus facile : On note \mathcal{H} l'ensemble des triangulations du demi-plan, et $\theta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ l'opérateur de décalage qui à une triangulation H associe la même triangulation, mais en décalant l'arête racine d'une arête vers la droite.

Définition 3.3. Soit μ est une mesure de probabilité sur \mathcal{H} . On dit que μ est *invariante par translation* si $\mu \circ \theta = \mu$.

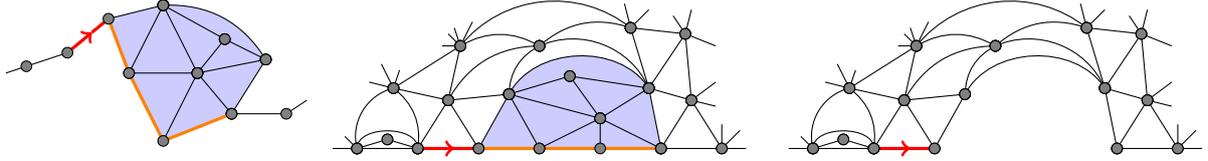


FIGURE 6 – Un exemple de triangulation bipède \tilde{t} avec $\partial^{ext}\tilde{t}$ en orange, une triangulation du demi-plan h avec $\tilde{t} \subset h$, et $h \setminus \tilde{t}$. Les racines de \tilde{t} , h et $h \setminus \tilde{t}$ sont en rouge.

Soient maintenant μ une mesure de probabilité sur \mathcal{H} et H de loi μ . Dans la suite, \tilde{t} désignera une triangulation d'un p -gone avec deux demi-droites issues de deux sommets différents de son bord, qu'on appellera *pattes*. On nommera $\partial^{int}\tilde{t}$ et $\partial^{ext}\tilde{t}$ les deux segments du bord séparés par les deux demi-droites. \tilde{t} sera enracinée soit sur une arête d'une patte, soit sur une arête de $\partial^{ext}\tilde{t}$, de manière à ce que si on place $\partial^{int}\tilde{t}$ au-dessus de $\partial^{ext}\tilde{t}$, la racine pointe vers la droite. Une telle triangulation sera dite *bipède*.

Avec ces notations, on note $\tilde{t} \subset H$ l'événement " H contient \tilde{t} de manière à ce que les racines coïncident" (cf. figure 6). Si un tel événement se produit, on note $H \setminus \tilde{t}$ la triangulation formée par les faces de H qui ne sont pas dans \tilde{t} , ainsi que toutes leurs arêtes et tous leurs sommets. $H \setminus \tilde{t}$ sera enracinée à la racine de H si celle-ci n'est pas sur $\partial^{ext}\tilde{t}$, et à la dernière arête de ∂H avant \tilde{t} . Notons que, comme on s'intéresse à des lois invariantes par translation, ce choix a peu d'importance. Remarquons aussi qu'avec ces notations $H \setminus \tilde{t}$ est aussi une triangulation du plan, ce qui motive la définition suivante :

Définition 3.4. Soit H de loi μ . On dit que μ est *markovienne* si pour tout $p \geq 2$, pour toute triangulation bipède \tilde{t} , conditionnellement à $\tilde{t} \subset H$, la triangulation $H \setminus \tilde{t}$ a pour loi μ .

Remarque 3.5. Cette définition peut sembler faible quand on la compare à 1.24, car on se limite au cas où \tilde{t} n'a pas de trous. Cependant, il n'est pas très difficile de montrer que cette version implique une version plus forte : si $\partial\tilde{t}$ n'est pas simple, les "remplissages" des différentes composantes connexes de $H \setminus \tilde{t}$ sont indépendants, et leur loi ne dépend que de la longueur du bord de ces trous.

On peut maintenant énoncer le théorème principal de [6] :

Théorème 3.6. L'ensemble des mesures de probabilités sur \mathcal{H} invariantes par translation et markoviennes forme une famille à un paramètre $(\mathbb{H}_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$. De plus, α est la probabilité sous \mathbb{H}_α que le troisième sommet de la face qui touche l'arête racine ne soit pas sur ∂H .

Commençons par démontrer l'unicité : soit μ une mesure de probabilité sur \mathcal{H} invariante par translation et markovienne et soit H de loi μ . On note f_0 la face adjacente à l'arête racine et x son troisième sommet. Soit $\alpha = \mu(x \notin \partial H)$. On veut montrer que μ est entièrement déterminée par α .

Pour $i \geq 1$ et $k \geq 0$, on note $p_{i,k}^{(g)}$ (resp. $p_{i,k}^{(d)}$) la probabilité que x soit sur ∂H à distance i à gauche (resp. à droite) de l'arête racine, et que la triangulation finie enfermée par f_0 contienne exactement k sommets internes.

Notons que pour $i = 1$ et $k = 0$, la face f_0 est aussi adjacente à l'arête située immédiatement à la gauche de la racine, comme sur la figure. Par invariance par translation, on peut donc poser $\beta = p_{1,0}^{(g)} = p_{1,0}^{(d)}$ (voir figure 7).

Soit maintenant \tilde{t} bipède. On note $F(\tilde{t})$ le nombre de faces triangulaires de \tilde{t} et $V(\tilde{t})$ le nombre de sommets qui touchent au moins une de ces faces.



FIGURE 7 – Les événements correspondant respectivement à α et β .

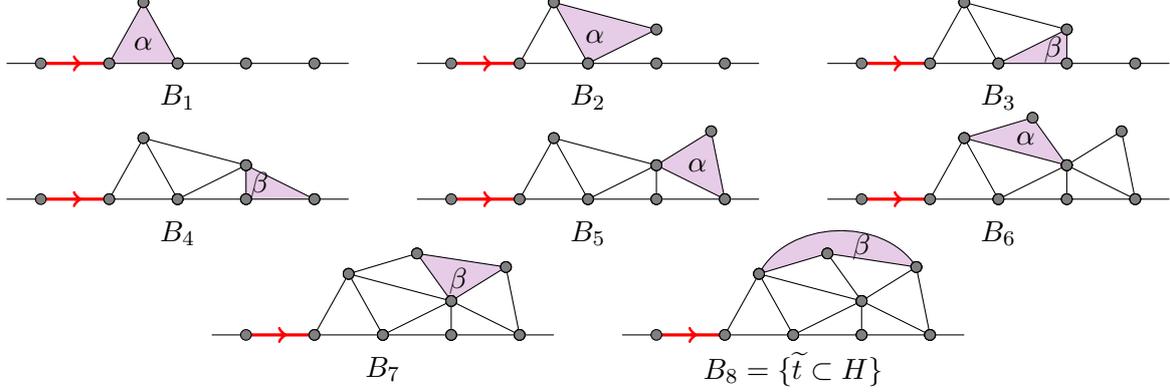


FIGURE 8 – Calcul de $\mu(\tilde{t} \subset H) = \alpha^4 \beta^4$ pour l'exemple de la figure 6.

Lemme 3.7. Avec les notations précédentes, on a :

$$\mu(\tilde{t} \subset H) = \alpha^{V(\tilde{t}) - |\partial^{ext}\tilde{t}| - 1} \beta^{F(\tilde{t}) - V(\tilde{t}) + |\partial^{ext}\tilde{t}| + 1}$$

Idée de la démonstration. L'idée de la preuve du lemme est assez simple : les événements décrits par α et β sont des "briques de base" : on peut construire n'importe quelle triangulation \tilde{t} d'un p -gone collée au bord le long de $|\partial^{ext}\tilde{t}|$ arêtes par les opérations suivantes :

- Décaler la racine le long du bord, ce qui ne change pas la loi du reste de la triangulation, par invariance par translation.
- Ajouter un sommet interne et créer une face en le reliant aux deux sommets reliés par l'arête racine.
- Relier le sommet de gauche de l'arête racine au sommet situé à distance 2 vers la droite sur le bord.

De plus, si on note n_2 (resp. n_3) le nombre de fois où on doit appliquer la deuxième (resp. troisième) opération, alors n_2 est égal au nombre de sommets internes à ajouter, soit $V(\tilde{t}) - |\partial^{ext}\tilde{t}| - 1$, et $n_2 + n_3$ au nombre de faces à ajouter, soit $F(\tilde{t})$. On construit ainsi une suite d'événements (B_j) de la forme $\tilde{t}_j \subset H$ tels $B_0 = \mathcal{H}$ et $B_{F(\tilde{t})} = \{\tilde{t} \subset H\}$. De plus, $\mu(B_{j+1}|B_j)$ vaut α ou β selon qu'on passe de B_j à B_{j+1} par la seconde ou la troisième opération, comme sur la figure 8. On obtient donc :

$$\mu(\tilde{t} \subset H) = \prod_{j=1}^{F(\tilde{t})} \mu(B_{j+1}|B_j) = \alpha^{V(\tilde{t}) - |\partial^{ext}\tilde{t}| - 1} \beta^{F(\tilde{t}) - V(\tilde{t}) + |\partial^{ext}\tilde{t}| + 1}$$

Une preuve plus détaillée, par récurrence sur $F(\tilde{t})$, se trouve dans [6].

□

Le lemme précédent montre que α et β déterminent entièrement les $\mu(\tilde{t} \subset H)$. En particulier, ils déterminent les événements du type $\mu(\overline{B_r}(H) = t)$, donc il déterminent entièrement μ . Il ne reste donc plus qu'à trouver une relation entre α et β .

Lemme 3.8. On a, pour tous $i \geq 1$ et $k \geq 0$:

$$p_{i,k}^{(g)} = p_{i,k}^{(d)} = \varphi_{k,i+1} \alpha^k \beta^{i+k}$$

Démonstration. C'est un corollaire du lemme précédent : si x est à distance i à gauche de la racine sur ∂H et si la face f_0 adjacente à la racine enferme k sommets, alors la composante connexe finie de $H \setminus f_0$ est une triangulation d'un $(i+1)$ -gone avec k sommets internes, collée à ∂H le long d'un segment de longueur i . La formule d'Euler permet de calculer le nombre de faces d'une telle triangulation, donc le lemme précédent donne la contribution de chaque triangulation du $(i+1)$ -gone avec k sommets internes. Comme il y a $\varphi_{k,i+1}$ telles triangulations, on obtient le résultat. \square

La relation espérée entre α et β proviendra donc de la formule évidente :

$$\alpha + \sum_{i \geq 1, k \geq 0} (p_{i,k}^{(g)} + p_{i,k}^{(d)}) = 1$$

A l'aide du dernier lemme, cette relation s'écrit :

$$\alpha + 2 \sum_{i \geq 1} \beta^i Z_{i+1}^{(\alpha\beta)} = 1 \quad (1)$$

A l'aide de 1.12, on obtient finalement après quelques calculs :

Lemme 3.9.

$$\beta = \begin{cases} \frac{(2-\alpha)^2}{16} & \text{si } \alpha \leq \frac{2}{3} \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} & \text{si } \alpha \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Récapitulons : on a montré que α détermine entièrement μ , et on a calculé β et les $p_{i,k}$ en fonction de α , ce qui s'avérera utile par la suite. De plus, pour $\alpha = 1$, il est clair que μ ne peut exister car le degré de la racine doit rester fini. Il reste maintenant, pour $\alpha < 1$, à construire une mesure qui vérifie les propriétés voulues. Commençons par le lemme suivant :

Lemme 3.10. Soit H une triangulation aléatoire du demi-plan telle que pour toute triangulation bipède \tilde{t} , on ait :

$$\mathbb{P}(\tilde{t} \subset H) = \alpha^{V(\tilde{t}) - |\partial^{ext}\tilde{t}| - 1} \beta^{F(\tilde{t}) - V(\tilde{t}) + |\partial^{ext}\tilde{t}| + 1}$$

Alors la loi de H est invariante par translation et est markovienne.

Démonstration. Tout d'abord, les $\mu(\tilde{t} \subset H)$ ne dépendent que de $V(\tilde{t})$, $F(\tilde{t})$ et $|\partial^{ext}\tilde{t}|$, donc elles ne varient pas si on déplace la racine de \tilde{t} . Comme ces probabilités déterminent entièrement μ , on en déduit l'invariance par translation.

De plus, $\mu(\tilde{t} \subset H)$ ne dépend que de $F(\tilde{t})$ et du nombre $V'(\tilde{t})$ de sommets de \tilde{t} qui ne seront pas sur ∂H . Soit donc \tilde{t}_1 une sous-carte de \tilde{t} : on a $F(\tilde{t}) = F(\tilde{t}_1) + F(\tilde{t} \setminus \tilde{t}_1)$ et $V'(\tilde{t}) = V'(\tilde{t}_1) + V'(\tilde{t} \setminus \tilde{t}_1)$ donc $\mu(\tilde{t} \subset H) = \mu(\tilde{t}_1 \subset H) \mu(\tilde{t} \setminus \tilde{t}_1 \subset H)$ d'où :

$$\mu(\tilde{t} \subset H | \tilde{t}_1 \subset H) = \mu(\tilde{t} \setminus \tilde{t}_1 \subset H)$$

d'où le résultat car ces probabilités caractérisent $\mu(\cdot | \tilde{t}_1 \subset H)$. \square

Soit donc $\alpha \in [0, 1[$ et β donné par 3.9. On veut construire H_α qui vérifie l'hypothèse du lemme précédent, et on pourra prendre pour \mathbb{H}_α la loi de H_α . On va une nouvelle fois utiliser le peeling, mais cette fois comme outil de construction plutôt que d'exploration : on démarre avec une droite et à chaque étape, on choisit une arête e sur le bord ∂^{int} de la carte actuelle. On tire alors au sort, indépendamment des choix précédents, le troisième sommet de la face adjacente à e , et éventuellement le remplissage du "trou" si on en crée un, le tout avec des poids compatibles avec l'hypothèse de 3.10. Le choix de β en fonction de α (et plus précisément la formule 3.2) garantit que la somme des poids vaut 1 à chaque étape.

Cette construction dépend d'un *algorithme de peeling déterministe*, c'est-à-dire d'une application \mathcal{A} qui à chaque triangulation bipède \tilde{t} associe une arête $\mathcal{A}(\tilde{t}) \in \partial^{int}\tilde{t}$. On notera $H_n^{\mathcal{A}}$ la triangulation aléatoire obtenue après n étapes.

Définition 3.11. Soient \mathcal{A} un algorithme de peeling déterministe et \tilde{t} une triangulation bipède. On dit que \mathcal{A} *visite* \tilde{t} si il existe n tel que $\mathbb{P}(H_n^{\mathcal{A}} = \tilde{t}) > 0$.

Remarquons que si \mathcal{A} visite \tilde{t} au temps n , alors $\tilde{t} \subset H_n^{\mathcal{A}}$ si et seulement si $H_n^{\mathcal{A}} = \tilde{t}$, car une fois qu'une étape de peeling se déroule de manière incompatible avec l'apparition de \tilde{t} , on ne pourra plus voir apparaître \tilde{t} .

Lemme 3.12. Soient \mathcal{A} un algorithme de peeling déterministe et \tilde{t} une triangulation bipède. Si \mathcal{A} visite \tilde{t} , alors $\mathbb{P}(\tilde{t} \subset H^{\mathcal{A}})$ est la probabilité exigée par le lemme 3.10.

Démonstration. C'est dû au fait qu'on a choisi les probabilités de transition du peeling exprès pour avoir cette égalité. \square

On commence par construire une triangulation aléatoire "couche par couche" en tournant autour de la racine tout en s'en éloignant. Plus précisément, si \tilde{t} est une triangulation avec deux demi-droites, notons r la plus petite distance à la racine d'un sommet sur $\partial^{ext}\tilde{t}$. On choisit alors pour $\mathcal{A}(\tilde{t})$ la première arête de $\partial^{ext}\tilde{t}$ dans le sens trigonométrique qui touche un sommet à distance r de la racine.

Lemme 3.13. Avec l'algorithme \mathcal{A} décrit ci-dessus, $H^{\mathcal{A}} = \bigcup_{n \geq 1} H_n^{\mathcal{A}}$ est p.s. une triangulation du demi-plan.

Démonstration. Tout d'abord, une récurrence rapide sur n montre que dans $H_n^{\mathcal{A}}$, si r est la plus petite distance à la racine d'un sommet de $\partial^{ext}\tilde{t}$, tous les sommets du bord de $H_n^{\mathcal{A}}$ sont à distance r ou $r + 1$ de la racine.

De plus, le même argument que dans la preuve de 2.7 montre que chaque sommet finit par être "avalé" (notons que c'est ici qu'on utilise $\alpha < 1$). En particulier $H^{\mathcal{A}}$ est localement fini. De plus, si la distance d'un sommet x à la racine vaut r au moment où il est avalé, tous les sommets du bord sont à distance au moins $r - 1$ de la racine à cet instant, donc la distance de x à la racine ne peut plus augmenter. Ainsi, par récurrence sur r , on finit par avaler tous les sommets à distance r de la racine, donc le bord de la triangulation infinie $H^{\mathcal{A}}$ est bien une droite. Comme $\partial H_n^{\mathcal{A}}$ est simple pour tout n , $H^{\mathcal{A}}$ n'a qu'un bout donc c'est bien une triangulation du demi-plan. \square

De plus, on sait que \mathcal{A} est tel que pour tout r , il existe N (aléatoire) tel que $\overline{B_r(H^{\mathcal{A}})} = H_N^{\mathcal{A}}$ donc si \tilde{t} est une valeur possible de $\overline{B_r(H)}$, alors \mathcal{A} visite \tilde{t} . 3.12 montre que $\mathbb{P}(\tilde{t} \subset H^{\mathcal{A}})$ a bien la valeur souhaitée. Cela suffit à caractériser la loi de $H^{\mathcal{A}}$, mais pas à montrer qu'elle est markovienne car on ne peut pas prendre \tilde{t} quelconque.

Pour cela, soit \tilde{t}_0 une triangulation bipède et r la distance maximale à la racine d'un sommet de $\partial\tilde{t}_0$ qui ne soit pas dans les pattes de \tilde{t}_0 . On s'intéresse à un nouvel algorithme de peeling \mathcal{A}' tel que :

- Si $\tilde{t} \subset \tilde{t}_0$ et $\tilde{t} \neq \tilde{t}_0$, alors $\mathcal{A}'(\tilde{t}) \notin \partial^{ext}\tilde{t}_0$.
- Si tous les sommets de $\partial\tilde{t}$ sont à distance au moins r de la racine, alors $\mathcal{A}'(\tilde{t}) = \mathcal{A}(\tilde{t})$.
- Si on est dans aucun des deux cas précédents, au moins une extrémité de $\mathcal{A}'(\tilde{t})$ est à distance au plus $r - 1$ de la racine.

Autrement dit, l'algorithme \mathcal{A}' commence par construire la boule de rayon r de telle manière que \mathcal{A}' visite \tilde{t} , puis il construit le reste de la carte comme \mathcal{A} . On en déduit que $\mathbb{P}(\tilde{t} \subset H^{\mathcal{A}'})$ a bien la valeur prescrite par 3.10. Il ne manque donc plus que le résultat suivant pour conclure que $H^{\mathcal{A}'}$ est markovienne, et donc la démonstration du théorème 3.6 :

Lemme 3.14. $H^{\mathcal{A}'}$ est une triangulation du demi-plan et a la même loi que $H^{\mathcal{A}}$.

Démonstration. Le fait que $H^{\mathcal{A}'}$ découle des mêmes arguments que pour $H^{\mathcal{A}}$. En effet, on peut appliquer les mêmes arguments dès que t_0 est apparu ou ne peut plus apparaître, ce qui se produit au plus tard après un nombre déterministe n_0 d'étapes.

De plus, on sait qu'une fois la boule de rayon r découverte, \mathcal{A}' explore la carte par couche comme \mathcal{A} donc pour tout $r' \geq r$ et \tilde{t} valeur possible de $\overline{B_{r'}(H)}$, l'algorithme \mathcal{A}' visite \tilde{t} donc $\mathbb{P}(\overline{B_{r'}(H^{\mathcal{A}'})} = \tilde{t})$ est la valeur prescrite par 3.10. On en déduit que $\overline{B_{r'}(H^{\mathcal{A}})}$ et $\overline{B_{r'}(H^{\mathcal{A}'})}$ ont la même loi pour tout $r' \geq r$ donc $H^{\mathcal{A}}$ et $H^{\mathcal{A}'}$ ont la même loi. \square

Pour finir ce paragraphe, signalons qu'Angel et Ray examinent dans [6] d'autres classes de cartes :

- On peut autoriser les triangulations non-simples, c'est-à-dire présentant des boucles. Angel et Ray montrent que les triangulations invariantes par translation et markoviennes s'obtiennent à partir des H_α en ajoutant des boucles avec une certaine intensité, et en les remplissant par des triangulations i.i.d. d'un 1-gone. On a donc plus de lois car on peut choisir α , l'intensité et la loi sur les triangulations d'un 1-gone.
- En revanche, interdire les arêtes multiples ne donne rien d'intéressant car la propriété de Markov spatiale "oublie" quels sont les sommets du bord de \tilde{t} qui sont déjà reliés par une arête à l'intérieur de \tilde{t} .
- On peut remplacer les triangulations par des p -angulations simples (c'est-à-dire qu'aucun sommet n'apparaît deux fois autour d'une même face). Le nombre α désigne cette fois la probabilité que les $p - 2$ sommets restants de la face adjacente à l'arête racine soient internes. On obtient un résultat similaire en remplaçant " $\alpha \in [0, 1[$ " par " $\alpha \in [\alpha_0(p), 1[$ avec $\alpha_0(p) < 1$ ". Angel et Ray conjecturent $\alpha_0(p) = 0$.

3.3 Étude des H_α par le peeling

Soit H_α de loi : les calculs effectués ainsi que les résultats d'énumérations permettent de calculer exactement les $p_{i,k}$, donc les probabilités de peeling et la loi des triangulations qui remplissent les trous. Si on note $p_{-i} = \sum_{k \geq 0} p_{i,k}^{(g)} + p_{i,k}^{(d)}$ la probabilité que le troisième sommet de la face adjacente à l'arête racine soit sur ∂H à distance i de la racine, on observe une transition de phase :

- Si $\alpha < \frac{2}{3}$, alors $p_{-i} \sim C(\alpha)i^{-3/2}$.
- Si $\alpha = \frac{2}{3}$, alors H_α est une UIHPT, et les p_i sont ceux calculés pour l'UIPT. En particulier, on a $p_{-i} \sim Ci^{-5/2}$.
- Si $\alpha > \frac{2}{3}$, alors p_{-i} décroît exponentiellement en i .

Le cas $\alpha < \frac{2}{3}$ est appelé *sous-critique* et le cas $\alpha > \frac{2}{3}$ *surcritique*. Ces deux régimes sont étudiés par Ray dans [20], de manière similaire à l'UIPT. Citons les principaux résultats, d'abord pour le régime sous-critique :

Théorème 3.15. Si $\alpha < \frac{2}{3}$, presque sûrement, il existe une infinité d'arêtes dans H_α qui, chacune à elle seule, séparent la racine de l'infini.

Théorème 3.16. Si $\alpha < \frac{2}{3}$, il existe $c(\alpha)$ tel que pour tous r et n , $\mathbb{P}(|\partial\overline{B}_r(H_\alpha)| > n) < e^{-c(\alpha)n}$.

Théorème 3.17. Si $\alpha < \frac{2}{3}$, alors $\frac{|\overline{B}_r(H_\alpha)|}{r^2}$ converge en loi vers une variable stable totalement asymétrique d'indice $\frac{1}{2}$.

Ces résultats (petits cut-sets et croissance en r^2) suggèrent que les propriétés de H_α à grande échelle doivent être similaires à celles d'un arbre de Galton-Watson critique conditionné à survivre. Ray conjecture d'ailleurs que ces cartes admettent comme limite d'échelle un arbre continu aléatoire (la version non compacte du CRT d'Aldous pour être plus précis).

Notons également que le premier théorème implique que la résistance effective entre la racine et l'infini est infinie, et donc que la marche aléatoire simple sur H_α est récurrente. De plus, la probabilité critique pour la percolation vaut presque sûrement 1.

Passons au régime surcritique où les cartes sont plutôt de nature "hyperbolique" :

Théorème 3.18. Si $\alpha > \frac{2}{3}$, il existe $c(\alpha)$ et $C(\alpha)$ tels que p.s. pour r assez grand :

$$c^r \leq |\partial\overline{B}_r(H_\alpha)| \leq |\overline{B}_r(H_\alpha)| \leq C^r$$

Théorème 3.19. Si $\alpha > \frac{2}{3}$, on a "anchored expansion", i.e il existe $c(\alpha) > 0$ tel que p.s., pour tout ensemble fini connexe de sommets S , assez grand et contenant la racine, on a $|\partial S| \geq c|S|$.

Ray calcule également la probabilité critique pour la percolation :

Théorème 3.20. Soient p_c la probabilité critique pour la percolation et p_u la probabilité à partir de laquelle le cluster infini est unique. Si $\alpha > \frac{2}{3}$, alors presque sûrement :

$$p_c(H_\alpha) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{3 - \frac{2}{\alpha}} \right) \text{ et } p_u(H_\alpha) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{3 - \frac{2}{\alpha}} \right)$$

Par ailleurs, il découle de 3.19 et de [21] que la marche aléatoire sur H_α est transiente pour $\alpha > \frac{2}{3}$. Angel, Nachmias et Ray analysent plus précisément la marche aléatoire sur H_α , notée (X_n) dans [5] :

Théorème 3.21. Si $\alpha > \frac{2}{3}$, presque sûrement :

$$\liminf_n \frac{1}{n} d(X_n, \partial H_\alpha) > 0$$

Théorème 3.22. Si $\alpha > \frac{2}{3}$, il existe C et c telles que presque sûrement, pour n assez grand :

$$e^{-Cn^{1/3}} \leq \mathbb{P}(X_n = X_0 | H_\alpha) \leq e^{-cn^{1/3}}$$

3.4 Les H_α comme limites locales

L'UIPT étant obtenue comme la limite locale des triangulations uniformes de la sphère, il est naturel de se demander si les triangulations H_α vérifient une propriété similaire. Le théorème suivant, issu de [6], répond par l'affirmative pour $\alpha \leq \frac{2}{3}$:

Théorème 3.23. Pour tous $m \geq 0$ et $p \geq 2$ soit $T_{m,p}$ une variable aléatoire uniforme sur l'ensemble des triangulations d'un p -gone avec m sommets internes. Soient (m_ℓ) et (p_ℓ) deux suites d'entiers qui tendent vers $+\infty$ avec $\frac{m_\ell}{p_\ell} \rightarrow a \in [0, +\infty]$. Alors T_{m_ℓ, p_ℓ} converge en loi vers H_α avec $\alpha = \frac{2}{2a+3}$.

Idée de la démonstration. Notons que les événements $\tilde{t} \subset H$ utilisés dans la démonstration de 3.6 ont toujours un sens pour des triangulations finies avec un bord simple, quitte à enrouler les pattes autour du bord. On commence par montrer la convergence des $\mathbb{P}(\tilde{t} \subset T_{m_\ell, p_\ell})$. Le nombre de triangulations t d'un p -gone avec m sommets internes telles que $t \subset \tilde{t}$ est égal à $\varphi_{m-V(\tilde{t})+|\partial^{ext}\tilde{t}|+1, p+|\partial\tilde{t}|-2V(\tilde{t})+2}$, donc $\mathbb{P}(\tilde{t} \subset T_{m_\ell, p_\ell})$ se met sous la forme $\frac{\varphi_{m_\ell-i, p_\ell-j}}{\varphi_{m_\ell, p_\ell}}$ où i et $j \in \mathbb{Z}$ s'écrivent en fonction de $V(\tilde{t})$, $|\partial^{ext}\tilde{t}|$ et $F(\tilde{t})$ à l'aide de la formule d'Euler. La limite de cette dernière quantité se calcule grâce à la formule de Stirling et vaut $\mathbb{P}(\tilde{t} \subset H_\alpha)$.

De plus, le fait que la loi de H_α soit une mesure de probabilité permet d'obtenir la tension : soient $r \in \mathbb{N}$ et M tel que $\mathbb{P}(|\overline{B_r(H_\alpha)}| \leq M) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. L'événement $\{|\overline{B_r(H_\alpha)}| \leq M\}$ est une union disjointe finie d'événements de la forme $\{\tilde{t} \subset H\}$ et on sait que les probabilités de ces événements convergent donc pour ℓ assez grand :

$$\mathbb{P}(|\overline{B_r(T_{m_\ell, p_\ell})}| \leq M) \geq 1 - \varepsilon$$

d'où la tension par 1.7. □

4 Cas des triangulations du plan

On s'intéresse maintenant au cas du plan complet, en suivant l'article de Curien [13]. Notons que la propriété de Markov spatiale ne peut pas s'exprimer de manière aussi simple que sur le demi-plan. En effet, conditionnellement à ce que T contienne une triangulation finie t , la carte $T \setminus t$ n'est pas une triangulation du plan, donc ne peut pas avoir la même loi que t . Une définition possible serait donc de demander que conditionnellement à $t \subset T$ avec t finie simplement connexe, la loi de $T \setminus t$ ne dépende que de $|\partial t|$. Cependant, on n'a alors pas d'analogue du paramètre α de la section précédente, ce qui rend le problème plus difficile à aborder. La définition choisie par Curien est similaire au lemme 3.7 plus qu'à la définition d'Angel et Ray, et permet donc de "court-circuiter" la preuve d'un analogue de 3.7 :

Définition 4.1. Soient T une triangulation aléatoire du plan et $\kappa > 0$. On dit que T est κ -markovienne si il existe une suite $(C_p^{(\kappa)})$ de nombres positifs tels que, pour toute triangulation t d'un p -gone :

$$\mathbb{P}(t \subset T) = C_p^{(\kappa)} \kappa^{|t|}$$

On dira que la loi de T est κ -markovienne si T l'est.

4.1 Triangulations markoviennes du plan

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

Théorème 4.2. Pour tout $\kappa \in]0, \frac{2}{27}]$, il existe une unique probabilité κ -markovienne sur l'ensemble des triangulations du plan. Pour $\kappa > \frac{2}{27}$, il n'en existe aucune.

Remarque 4.3. Il découle de 1.23 que la triangulation $\frac{2}{27}$ -markovienne n'est autre que l'UIPT. On verra plus loin que les triangulations obtenues pour $\kappa < \frac{2}{27}$ ont des propriétés similaires aux triangulations surcritiques du demi-plan. Le régime sous-critique disparaît donc quand on passe au plan complet.

Démonstration de l'unicité. On commence par montrer l'unicité. Fixons $\kappa > 0$, et soit T κ -markovienne. La loi de T est entièrement déterminée par les $\mathbb{P}(t \subset T)$, donc par κ et les $C_p^{(\kappa)}$. Il suffit donc de montrer que les $C_p^{(\kappa)}$ sont déterminés par κ . La carte constituée d'un seul triangle s'inclut forcément dans T , donc $C_3^{(\kappa)} \kappa^3 = 1$, ce qui fixe $C_3^{(\kappa)}$.

De plus, soit t une triangulation d'un p -gone et e une arête au bord de t . On va "éplucher" e : si $t \subset T$, soit f_0 la face adjacente à e , à l'extérieur de t :

- Si le troisième sommet de f_0 ne se trouve pas sur ∂t , alors T contient la triangulation t' constituée de t à laquelle on a collé un triangle le long de e . Cela se produit avec probabilité $C_{p+1}^{(\kappa)} \kappa^{|t|+1}$.
- Si le troisième sommet de f_0 est sur ∂t et f_0 enferme i arêtes de ∂t à gauche de e , alors T contient une triangulation de la forme t' constituée de t , de la face f_0 et d'une triangulation t'' d'un $(i+1)$ -gone. Cela se produit avec probabilité :

$$\sum_{t'' \text{ triangulation d'un } (i+1)\text{-gone}} C_{p-i}^{(\kappa)} \kappa^{|t|+|t''|-i-1} = C_{p-i}^{(\kappa)} Z_{i+1}^{(\kappa)} \kappa^{|t|+|t''|-i-1}$$

où $Z_i^{(\kappa)}$ est défini en 1.11.

- Si le troisième sommet de f_0 est sur ∂t et f_0 enferme i arêtes de ∂t à droite de e , on obtient le même résultat que dans le cas précédent.

Pour $\kappa > \frac{2}{27}$, 1.12 donne $Z_i^{(\kappa)} = +\infty$ donc on ne peut pas trouver de constantes $C_p^{(\kappa)}$ qui correspondent, donc il n'y a pas de triangulation κ -markovienne.

Pour $\kappa \leq \frac{2}{27}$, la somme des poids associés à ces différents cas vaut $C_p^{(\kappa)} \kappa^{|t|}$. En divisant par $\kappa^{|t|}$ on obtient :

$$C_p^{(\kappa)} = \kappa C_{p+1}^{(\kappa)} + 2 \sum_{i=1}^{p-2} C_{p-i}^{(\kappa)} Z_{i+1}^{(\kappa)} \quad (*)$$

En prenant $p = 2$, on obtient $C_2^{(\kappa)} = \kappa C_3^{(\kappa)} = \frac{1}{\kappa^2}$, puis par récurrence sur p , la formule * pour p fixe la valeur de $C_{p+1}^{(\kappa)}$, d'où l'unicité. \square

Démonstration de l'existence. Soit $\kappa \in]0, \frac{2}{27}]$: on veut construire T_κ par le processus de peeling comme dans le cas du demi-plan. Cependant, on a vu que les probabilités de transitions étaient un peu plus compliquées à calculer dans le plan car on a un paramètre supplémentaire. On commence donc par évaluer ces probabilités de transition. Soient $C_p^{(\kappa)}$ les constantes vérifiant (*), calculées plus haut.

Lemme 4.4. Pour tout $p \geq 2$, on a $C_p^{(\kappa)} > 0$.

Preuve du lemme. Soient $\alpha \in [\frac{2}{3}, 1[$ tel que $\frac{\alpha^2(1-\alpha)}{2} = \kappa$ et $\beta = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}$, de sorte que $\alpha\beta = \kappa$. On rappelle la formule (1) : $\alpha + 2 \sum_{i \geq 1} \beta^i Z_{i+1}^{(\alpha\beta)}$. Si on pose $q_1^{(\kappa)} = \alpha$ et $q_{-i}^{(\kappa)} = 2\beta^i Z_{i+1}^{(\kappa)}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_i q_i = 1$. En posant $\tilde{C}_p^{(\kappa)} = \beta^p C_p^{(\kappa)}$ pour $p \geq 2$ et $\tilde{C}_p^{(\kappa)} = 0$ pour $p > 2$, on peut écrire pour tout p , grâce à (*) :

$$q_1^{(\kappa)} (\tilde{C}_{p+1}^{(\kappa)} - \tilde{C}_p^{(\kappa)}) = \sum_{i=1}^{+\infty} q_{-i}^{(\kappa)} (\tilde{C}_p^{(\kappa)} - \tilde{C}_{p-i}^{(\kappa)})$$

Or, on a $0 < \tilde{C}_2^{(\kappa)} = \alpha \tilde{C}_3^{(\kappa)} < \tilde{C}_3^{(\kappa)}$. On en déduit, par une récurrence immédiate, que $(\tilde{C}_p^{(\kappa)})$ est strictement croissante donc $\tilde{C}_p^{(\kappa)} > 0$ pour tout p , et $C_p^{(\kappa)} > 0$. \square

Grâce à ce lemme, on peut maintenant définir nos probabilités de peeling. Soit, pour $p \geq 2$:

$$q_{1,p}^{(\kappa)} = \frac{\tilde{C}_{p+1}^{(\kappa)}}{\tilde{C}_p^{(\kappa)}} q_1^{(\kappa)}$$

et, pour $p \geq 2$ et $i \geq 1$:

$$q_{-i,p}^{(\kappa)} = \frac{\tilde{C}^{(\kappa)}_{p-i}}{\tilde{C}^{(\kappa)}_p} q_{-i}^{(\kappa)}$$

La formule (*) garantit que pour tout p , la somme des $q_{i,p}^{(\kappa)}$ vaut 1. Fixons $n > 0$. De même que dans le cas semi-planaire, on peut utiliser le peeling pour construire une triangulation aléatoire. On démarre avec un simple triangle et à chaque étape n , en notant T_n la triangulation actuelle :

- On note p le périmètre de T_n et on choisit une arête e du bord de la triangulation actuelle selon un algorithme \mathcal{A} .
- Avec probabilité $q_{1,p}^{(\kappa)}$, on colle une face triangulaire le long de e , dont le troisième sommet n'est pas sur le bord de T_n .
- Avec probabilité $\frac{1}{2}q_{-i,p}^{(\kappa)}$, on colle une face triangulaire le long de e , qui enferme les i sommets à gauche de e sur ∂T_n .
- Avec probabilité $\frac{1}{2}q_{-i,p}^{(\kappa)}$, on colle une face triangulaire le long de e , qui enferme les i sommets à gauche de e sur ∂T_n .
- Si on a séparé un $i + 1$ -gone de l'infini, on le remplit avec une triangulation libre de paramètre κ .

La suite de la démonstration est la même que dans le cas semi-planaire (avec les "pattes" en moins) : on construit une carte en explorant les boules par rayon croissant, puis pour chaque triangulation finie t_0 on introduit un algorithme \mathcal{A}' qui visite t_0 et on montre que les deux algorithmes donnent la même loi. \square

4.2 Croissance des T_κ

Le théorème principal de cette section est le suivant :

Théorème 4.5. Soient $\kappa \in]0, \frac{2}{27}[$ et $\alpha \in]0, \frac{2}{3}[$ tel que $\frac{\alpha^2(1-\alpha)}{2} = \kappa$. Alors il existe une variable aléatoire Π_κ telle que $\Pi_\kappa > 0$ p.s et :

$$\left(\frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{3\alpha - 2}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{3\alpha - 2}} \right)^r |\partial \overline{B}_r(T_\kappa)| \xrightarrow[r.p.s.]{r \rightarrow \infty} \Pi_\kappa$$

et $\frac{|\overline{B}_r(T_\kappa)|}{|\partial \overline{B}_r(T_\kappa)|} \xrightarrow[r.p.s.]{r \rightarrow \infty} \frac{2\alpha - 1}{3\alpha - 2}$

Remarques 4.6. - La croissance est exponentielle. Les T_κ ont donc une géométrie très différente de l'UIPT.

- On dispose de résultats analogues pour les arbres de Galton-Watson surcritiques conditionnés à survivre, qui se démontrent en trouvant une martingale. Mais $\left(\frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{3\alpha - 2}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{3\alpha - 2}} \right)^r |\partial \overline{B}_r(T_\kappa)|$ n'est pas une martingale. On procédera donc différemment.

Démonstration. Comme pour l'UIPT, on explore T_κ couche par couche en tournant autour de la racine. On note T_n la carte qu'on obtient après n étapes, P_n son périmètre et V_n son volume, et $\Delta Z_n = Z_{n+1} - Z_n$ pour toute chaîne de Markov Z sur \mathbb{N} . Par construction de T_κ , on sait que (P_n) est une chaîne de Markov de transitions $\mathbb{P}(\Delta P_n = i | P_n = p) = q_{i,p}^{(\kappa)}$. Conditionnellement à (P_n) , les ΔV_n sont indépendants et, si on note B_p le nombre de sommets internes d'une triangulation libre d'un p -gone de paramètre κ , alors ΔV_n a la loi de $B_{-\Delta P_n}$ si $\Delta P_n < 0$.

Soit enfin (X_n) une marche aléatoire sur \mathbb{Z} issue de 2, dont la loi des pas est donnée par les $q_i^{(\kappa)}$: un calcul effectué dans [20] montre que $\mathbb{E}[X_1] = \sqrt{\alpha(3\alpha - 2)}$ donc (X_n) est biaisée

positivement. De plus, la formule * montre que $(C_p^{(\kappa)})$ est harmonique pour (X_n) , donc (P_n) est la h -transformée de (X_n) d'après la définition des $q_{i,p}^{(\kappa)}$. D'après les résultats de [11], P_n a donc la loi de (X_n) , conditionnée à $\{\forall n, X_n \geq 2\}$. La marche (X_n) étant biaisée, le conditionnement n'est pas dégénéré, ce qui rend ce cas en quelque sorte plus simple que celui de l'UIPT. Soit (Y_n) telle que conditionnellement à (X_n) , les ΔY_n soient indépendantes de même loi que $B_{-\Delta X_n}$: $(P_n, V_n)_{n \geq 0}$ a la loi de $(X_n, Y_n)_{n \geq 0}$ conditionnée à $X_n \geq 2$ pour tout n . On en déduit des estimées presque sûres sur P_n et V_n :

Lemme 4.7. Soient $\varepsilon > 0$ et α comme dans l'énoncé du théorème 4.5. On pose $\delta = \sqrt{\alpha(3\alpha - 2)}$. Alors :

$$n^{1/2-\varepsilon} \left| \frac{P_n}{n} - \delta \right| \xrightarrow[r.p.s.]{r \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{et } \frac{V_n}{n} \xrightarrow[r.p.s.]{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha(2\alpha - 1)}{\delta}$$

Idée de la démonstration. La première partie est vraie pour X grâce à des estimées de moyennes déviations, car les pas de X ont une queue exponentielle. On peut remplacer X par P car le conditionnement est non dégénéré.

Pour la seconde partie, on peut calculer l'espérance de B_p puis de ΔY_n en passant par les fonctions génératrices. Le résultat pour Y découle de la loi des grands nombres, et on passe à V car le conditionnement est non dégénéré. \square

$\frac{V_n}{P_n}$ converge donc p.s. vers $\frac{\alpha(2\alpha-1)}{\delta^2} = \frac{2\alpha-1}{3\alpha-2}$, d'où la seconde partie du théorème. Pour la première, soit τ_r le temps au bout duquel on a exploré $\overline{B_r}(T_\kappa)$: de même que pour l'UIPT, il reste à estimer τ_r . Comme le nombre de sommets "avalés" à chaque étape a une queue exponentielle, il paraît plausible que τ_r soit linéaire en P_{τ_r} . Le résultat suivant est plus précis :

Lemme 4.8. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\tau_{r+1}^{1/2-\varepsilon} \left| \frac{\tau_{r+1} - \tau_r}{P_{\tau_r}} - \frac{2}{\alpha - \delta} \right| \xrightarrow[r.p.s.]{r \rightarrow \infty} 0$$

Idée de la démonstration. Soit n entre τ_r et τ_{r+1} , et Z_n le nombre de sommets de ∂T_n à distance r de la racine qui sont avalés au temps $n + 1$: $Z_n = 0$ si $\Delta P_n = 1$ et $Z_n = i$ si $\Delta P_n = -i$ avec $i > 0$. Si on "oublie" la possibilité d'avalé des sommets à gauche juste après τ_r , et celle d'avalé des sommets à distance $r + 1$ de la racine juste avant τ_{r+1} , les Z_n sont proches de variables i.i.d. d'espérance $\frac{\alpha-\delta}{2}$, conditionnées à $X_n \geq 2$ pour tout n . De plus, les Z_n ont une queue exponentielle. Le lemme résulte alors d'estimées de moyennes déviations. \square

On peut maintenant terminer la preuve du théorème : pour tout $\varepsilon > 0$ on a, en utilisant successivement les lemmes 4.7 et 4.8 :

$$\begin{aligned} P_{\tau_{r+1}} - P_{\tau_r} &= \delta(\tau_{r+1} - \tau_r) + o(\tau_{r+1}^{1/2+\varepsilon}) \\ &= \frac{2\delta}{\alpha - \delta} P_{\tau_r} + o(\tau_{r+1}^{1/2+\varepsilon}) \end{aligned}$$

Comme $\frac{P_{\tau_r}}{\tau_r} \rightarrow \delta$, on a $\tau_{r+1} = O(P_{\tau_r})$ donc l'équation précédente donne $P_{\tau_{r+1}} - P_{\tau_r} = \frac{2\delta}{\alpha-\delta} P_{\tau_r} + o(P_{\tau_{r+1}})$, donc $P_{\tau_{r+1}} = O(P_{\tau_r})$ et on peut écrire :

$$P_{\tau_{r+1}} = \frac{\alpha + \delta}{\alpha - \delta} P_{\tau_r} + o(P_{\tau_r}^{1/2+\varepsilon})$$

Autrement dit, si on pose $\lambda_r = \frac{\alpha-\delta}{\alpha+\delta} \frac{P_{\tau_r+1}}{P_{\tau_r}}$, on a $\lambda_r = 1 + o(P_{\tau_r}^{\varepsilon-1/2})$. On en déduit $\liminf_r P_{\tau_r}^{1/r} \geq \frac{\alpha+\delta}{\alpha-\delta} > 1$ donc $\sum_r |\lambda_r - 1| < +\infty$, donc $\prod_r \lambda_r$ converge, et sa limite (aléatoire) Π_κ est strictement positive, d'où la première partie du théorème, la deuxième ayant déjà été montrée. \square

Comme dans le cas du demi-plan, on a la propriété suivante :

Théorème 4.9. Si $\kappa < \frac{2}{27}$, on a presque sûrement "anchored expansion", i.e il existe c tel que pour tout ensemble fini connexe de sommets S , assez grand et contenant la racine, on a $|\partial S| \geq c|S|$.

Idee de la démonstration. Si il existe $S \subset T_\kappa$ connexe contenant la racine avec $|\partial S| < c|S|$, quitte à ajouter à S les composantes connexes finies de $T_\kappa \setminus S$ (ce qui augmente $|S|$ et diminue $|\partial S|$), on peut supposer S simplement connexe. La probabilité qu'un tel $S \subset T_\kappa$ existe se majore brutalement par la somme des $\mathbb{P}(S \subset T_\kappa)$ avec $|\partial S| < c|S|$. On peut estimer cette somme grâce aux formules de dénombrement : comme elle tend vers 0 quand $c \rightarrow 0$, il existe presque sûrement un c qui convient. \square

4.3 Marche aléatoire simple sur T_κ

Pour commencer, signalons le résultat suivant, dû à Nachmias et Gurel-Gurevich :

Théorème 4.10. P.s., la marche aléatoire sur l'UIPT est récurrente.

La preuve repose sur des techniques complètement différentes de celles utilisées dans ce mémoire (liens entre marches aléatoires et empilements de cercles), cf. [17].

On suppose dans tout le reste de cette section $0 < \kappa < \frac{2}{27}$. En combinant le théorème 4.9 et le résultat principal de [21], on obtient immédiatement :

Corollaire 4.11. P.s., la marche aléatoire sur T_κ est transiente.

Notons D_κ la distance de graphe sur T_κ , et (X_n) la marche aléatoire simple issue de la racine sur T_κ . L'objectif de cette section est de montrer le théorème suivant, lui aussi montré par Curien dans [13] :

Théorème 4.12. Il existe $v_\kappa > 0$ tel que presque sûrement :

$$\frac{1}{n} D(X_0, X_n) \xrightarrow[p.s.]{n \rightarrow \infty} v_\kappa$$

Remarque 4.13. Cette propriété plus forte que la transience ne peut pas être déduite de 4.9 : d'après [23], l'"anchored expansion" implique la transience pour des graphes où les degrés des sommets sont bornés, ce qui n'est manifestement pas le cas ici.

On présente maintenant les idées principales de la preuve. L'existence de v_κ est une conséquence d'idées classiques de théorie ergodique. On note $\widetilde{\mathcal{T}}$ l'ensemble des triangulations t du plan munies d'une suite (x_n) de sommets de t telle que pour tout n , les sommets x_n et x_{n+1} sont voisins dans t .

Lemme 4.14. Soit θ l'application de $\widetilde{\mathcal{T}}$ qui à $(t, (x_n)_{n \geq 0})$ associe $(t, (x_{n+1})_{n \geq 0})$, et \mathbb{P} la loi de $(T_\kappa, (X_n)_{n \geq 0})$. Alors :

- Pour tout n , $(T_\kappa, X_0, X_1, \dots, X_n)$ a la même loi que $(T_\kappa, X_n, \dots, X_1, X_0)$ (réversibilité).
- \mathbb{P} est invariante sous θ .
- θ est ergodique pour \mathbb{P} .

Idée de la démonstration.

- Soit (t, x_0, \dots, x_n) une triangulation finie munie d'un chemin de longueur n . En utilisant le fait que T est κ -markovienne, on calcule la probabilité que $(\overline{\bigcup_{i=1}^n B_r(T, X_i)}, X_0, \dots, X_n)$ soit égal à (t, x_0, \dots, x_n) , et on remarque que cette probabilité ne change pas en remplaçant (t, x_0, \dots, x_n) par (t, x_n, \dots, x_0) . On en déduit le résultat car les lois des $(\overline{\bigcup_{i=1}^n B_r(T, X_i)}, X_0, \dots, X_n)$ caractérisent celle de $(T_\kappa, X_0, X_1, \dots, X_n)$.
- Le point précédent pour $n = 1$ montre que (T_κ, X_1) a la même loi que (T_κ, X_0) , donc (T_κ, X_1) munie d'une marche aléatoire simple a pour loi \mathbb{P} , d'où l'invariance sous θ .
- Soit A un événement invariant par θ . En considérant un événement A_ε ne dépendant que d'un nombre fini de pas tel que $\mathbb{P}(A \Delta A_\varepsilon | T_\kappa) \leq \varepsilon$, on peut montrer que p.s, $\mathbb{P}(A | T_\kappa) \in \{0, 1\}$. De plus, l'événement $B = \{\mathbb{P}(A | T_\kappa) = 1\}$ est invariant par changement d'une région finie de T_κ . On en déduit $\mathbb{P}(B) \in \{0, 1\}$ en adaptant 2.11 aux T_κ . □

L'existence de $v_\kappa \geq 0$ est alors une conséquence du théorème ergodique sous-additif de Kingman, qui est une généralisation du théorème de Birkhoff :

Théorème 4.15. Soient (X, μ) un espace mesuré et $T : X \rightarrow X$ mesurable telle que μ est T -invariante. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur X telles que pour tous m et n , pour μ -presque tout x :

$$f_{m+n}(x) \leq f_n(x) + f_m(T^n(x))$$

Alors $\frac{1}{n}f_n(x)$ converge pour μ -presque tout x et la limite est T -invariante. En particulier, si T est μ -ergodique, la limite est constante presque partout.

On pourra en trouver dans [19] une démonstration de ce théorème. Il reste maintenant à montrer que $v_\kappa > 0$. L'étape suivante dans la preuve de Curien consiste à montrer qu'avec probabilité non nulle, la marche n'entoure pas la racine. Rappelons que si A est un ensemble de sommets de t , la triangulation \overline{A} est l'union de A et de toutes les composantes connexes finies de son complémentaire :

Lemme 4.16.

$$\mathbb{P}(X_0 \in \overline{\partial\{X_n | n \in \mathbb{N}\}}) > 0$$

Idée de la démonstration. L'idée est d'utiliser une nouvelle fois le processus de peeling, cette fois en explorant la carte T_κ le long d'une marche aléatoire simple, comme sur la figure 9. Plus précisément, à l'étape n , on note T_n la carte (finie) qu'on a découverte et Y_n le point où se trouve la marche :

- Si $Y_n \in \partial T_n$, on épluche l'arête à gauche de Y_n le long de ∂T_n . C'est une étape *de type I*.
- Sinon, la marche aléatoire fait un pas : Y_n se déplace sur un de ses voisins, choisi de manière uniforme. C'est une étape *de type II*.

Notons que Y correspond alors à X changée de temps, puisqu'à certaines étapes Y ne bouge pas. De même que dans [14], on montre que $\frac{1}{n}|\{X_0, \dots, X_n\}|$ converge p.s. vers $\mathbb{P}(\forall i > 0, X_i \neq X_0)$. Comme (X_n) est transiente, cette grandeur est strictement positive donc $|\{X_0, \dots, X_n\}|$ est linéaire en n . On en déduit, après quelques calculs simples, qu'une proportion strictement positive des étapes sont de type *I*, donc la probabilité que X_n soit sur le bord de $\overline{\{X_0, \dots, X_n\}}$ se minore par une constante strictement positive. Par réversibilité (cf. lemme 4.14), il en est de même pour la probabilité que X_0 soit sur le bord de $\overline{\{X_0, \dots, X_n\}}$, d'où le lemme. □

Proposition 4.17. Pour $0 < \kappa < \frac{2}{27}$, presque sûrement T_κ n'a pas la propriété d'intersection : les trajectoires de deux marches aléatoires simples indépendantes sur T_κ ne s'intersectent qu'en un nombre fini de points.

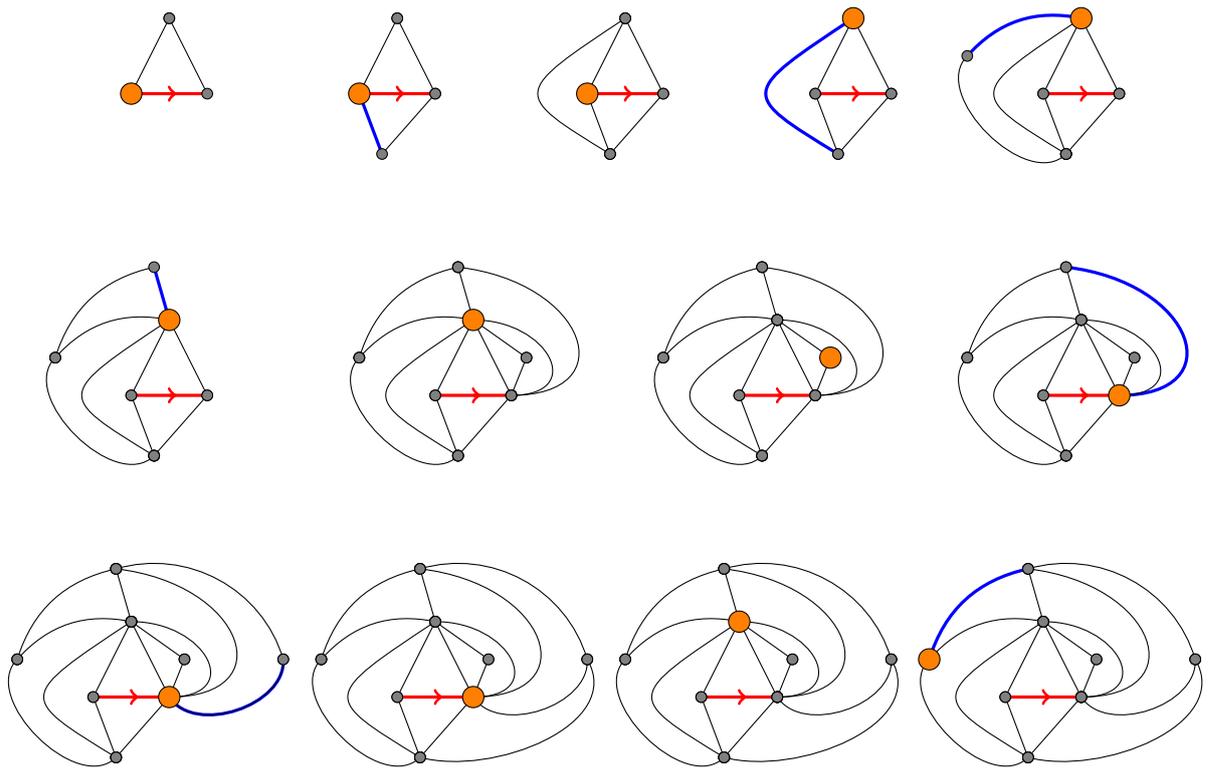


FIGURE 9 – Méthode d'épluchage choisie pour étudier la marche aléatoire. En orange, la position de la marche aléatoire. En bleu, la prochaine arête à éplucher (si la prochaine étape est de type I).

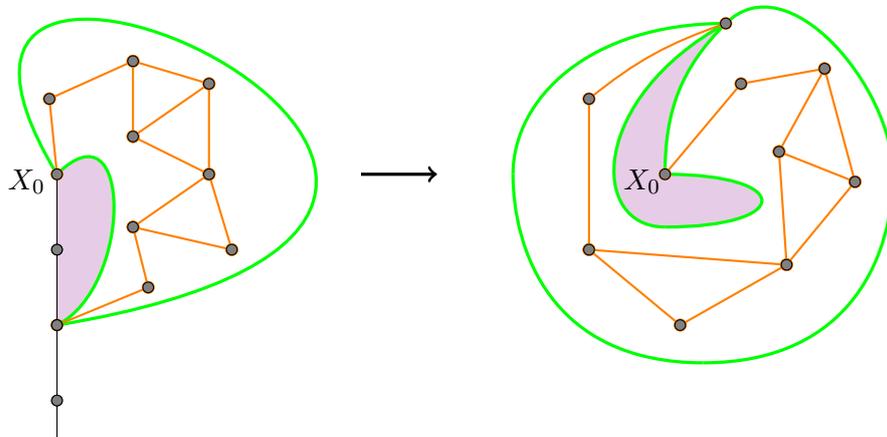


FIGURE 10 – En orange, la trajectoire de X' et en vert, le contour de $T_\kappa^{(X')}$. Si on touche le bord en appliquant une suite d'instructions au demi-plan, alors on enferme la racine en appliquant la même suite d'instruction au plan complet.

Idée de la démonstration. Supposons que l'événement du lemme 4.16 se produit : la région explorée, notée $T_\kappa^{(X)}$ n'est pas T_κ toute entière. On peut en fait vérifier que $T_\kappa \setminus T_\kappa^{(X)}$ a la loi de H_α avec $\alpha > \frac{2}{3}$ tel que $\kappa = \frac{\alpha^2(1-\alpha)}{2}$ (voir [5] pour une preuve détaillée). On contracte $T_\kappa^{(X)}$ en une demi-droite, et on lance une nouvelle marche (X'_n) indépendante de X avec $X_0 = X'_0$.

L'épluchage selon une marche aléatoire présenté plus haut peut se voir comme une suite d'instructions aléatoires (déplacement du marcheur ou collage d'une triangulation finie), qui ont encore un sens si on étudie la marche sur une carte semi-planaire. On dira qu'une suite d'instructions est *agréable* si elle aboutit à l'événement $X_0 \in \partial\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ quand on l'applique dans le cas planaire : on a montré que la suite d'instruction était agréable avec probabilité strictement positive.

Dans le cas semi-planaire, la suite d'instructions n'a pas la même loi. Cependant, de même que le processus de peeling planaire a la loi du processus de peeling semi-planaire conditionné à rester supérieur ou égal à 2, les instructions dans le cas planaire ont la loi des instructions dans le cas semi-planaire, conditionnées à ce que le processus de peeling reste supérieur ou égal à 2. De plus, ce conditionnement est non dégénéré. Par conséquent, dans le cas semi-planaire, la probabilité que la suite d'instructions soit agréable est aussi strictement positive.

Or, supposons que X' touche la demi-droite : si on lance la même suite d'instruction en supprimant la demi-droite, alors X' "enferme" X_0 au lieu de toucher la demi-droite, donc la suite d'instructions ne peut pas être agréable (cf. figure 10). Par conséquent, X' ne retouche pas la demi-droite si la suite d'instructions est agréable, d'où :

$$\mathbb{P}(\{X_n\} \cap \{X'_n\} = \{X_0\}) > 0$$

et on conclut par ergodicité. □

On utilise maintenant un résultat issu de [10] :

Définition 4.18. On dit qu'un graphe G vérifie la propriété de Liouville si toute fonction harmonique bornée sur G est constante.

Théorème 4.19. Si G est un graphe planaire, alors G vérifie la propriété d'intersection ssi il vérifie la propriété de Liouville.

Idée de la démonstration. Le premier sens est vrai pour tout graphe G : si h est une fonction harmonique bornée, soient X et Y deux marches aléatoires indépendantes issues de deux points x et y : $h(X)$ et $h(Y)$ sont des martingales bornées, donc convergent p.s et dans L^1 . Comme X et Y s'intersectent p.s. une infinité de fois, les martingales $h(X)$ et $h(Y)$ ont une infinité de valeurs communes donc $h(X)_\infty = h(Y)_\infty$ p.s. et $h(x) = \mathbb{E}[h(X)_\infty] = \mathbb{E}[h(Y)_\infty] = h(y)$ (par convergence dans L^1) donc h est constante.

Pour le second sens, si G ne vérifie pas la propriété d'intersection, trois marches aléatoires indépendantes ne s'intersectent pas à partir d'un certain rang, donc délimitent trois régions du plan. Une quatrième marche issue d'un point x va rester à partir d'un certain rang dans une de ces trois régions. La probabilité qu'elle finisse dans une région fixée est alors une fonction harmonique bornée en x , et on vérifie qu'elle est non constante. \square

Ainsi T_κ n'a pas la propriété de Liouville.

Pour finir la preuve, on utilise l'entropie de la marche aléatoire en adaptant des résultats issus de [8] :

Définition 4.20. L'entropie de la marche aléatoire sur T_κ est la variable aléatoire :

$$H_n = \sum_{x \in T_\kappa} \varphi\left(\mathbb{P}(X_n = x | T_\kappa)\right)$$

où $\varphi(x) = -x \ln x$.

Le théorème 3.2 de [8] montre que $\frac{1}{n}\mathbb{E}[H_n] \rightarrow h > 0$. De plus, on vérifie que (H_n) est uniformément intégrable. On en déduit qu'avec probabilité strictement positive $\limsup \frac{1}{n}H_n > 0$.

D'autre part, on peut estimer l'entropie à l'aide de l'inégalité de Jensen. Soit $\varepsilon > 0$: d'une part, la contribution de $T_\kappa \setminus B_{n(v_\kappa + \varepsilon)}(T_\kappa)$ est négligeable car $X_n \in B_{n(v_\kappa + \varepsilon)}(T_\kappa)$ pour n assez grand. D'autre part, la contribution de $B_{n(v_\kappa + \varepsilon)}(T_\kappa)$ est au plus de l'ordre du logarithme de son cardinal, soit $n(v_\kappa + \varepsilon) \ln \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{3\alpha - 2}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{3\alpha - 2}}$ d'où :

$$\limsup_n \frac{H_n}{n} \leq (v_\kappa + \varepsilon) \ln \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{3\alpha - 2}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{3\alpha - 2}}$$

donc si $v_\kappa = 0$, alors $\frac{H_n}{n} \xrightarrow[p.s.]{} 0$, ce qui contredit le résultat précédent, d'où le théorème 4.12.

4.4 Les T_κ comme limites locales ?

On a vu précédemment que les cartes semi-planaires sous-critiques étaient des limites locales de triangulations finies de périmètre proportionnel à leur volume. On peut se demander si les triangulations T_κ avec $\kappa < \frac{2}{27}$ peuvent s'écrire comme des limites locales. Dans ces triangulations, les sommets ont tendance à avoir "plus de voisins" que dans l'UIPT, c'est-à-dire plus de 6 en moyenne. D'après la formule d'Euler, il paraît donc nécessaire de considérer des cartes de genre grand.

Soit $\mathcal{T}_{n,g}$ l'ensemble des triangulations à n sommets d'une surface de genre g . On prend $g = \lceil \theta n \rceil$. Si ρ_n est la racine d'une carte choisie uniformément dans $\mathcal{T}_{n,g}$, un rapide calcul

montre que $\mathbb{E}\left[\frac{1}{\deg(\rho_n)}\right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6(1+2\theta)}$. Notons maintenant ρ_κ la racine de T_κ et $f(\kappa) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\deg(\rho_\kappa)}\right]$. Benjamini et Curien proposent dans [13] la conjecture suivante :

Conjecture 4.21. Soit $\theta \geq 0$ et $\kappa \in]0, \frac{2}{27}]$ tel que $f(\kappa) = \frac{1}{6(1+2\theta)}$. Pour tout n , soit $T_{n, [\theta n]}$ uniforme sur $\mathcal{T}_{n, [\theta n]}$. Alors :

$$T_{n, [\theta n]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} T_\kappa$$

Malheureusement, il manque des résultats d'énumération quand le genre et le volume de la carte tendent simultanément vers l'infini. Notons que le cas des cartes à une seule face, qui généralisent les arbres en genre grand, est traité par Angel, Chapuy, Curien et Ray dans [1].

Remerciements

Je remercie Nicolas Curien pour m'avoir proposé ce sujet passionnant et pour sa relecture attentive de ce mémoire.

Références

- [1] O. Angel, , G. Chapuy, N. Curien, and G. Ray. The local limit of unicellular maps in high genus. *Elec. Comm. Prob.*, 18 :1–8, 2013.
- [2] O. Angel. Growth and percolation on the uniform infinite planar triangulation. *Geom. Funct. Anal.*, 13 :935–974, 2003.
- [3] O. Angel. Scaling of percolation on infinite planar maps, 2004. arxiv.org/abs/math/0501006.
- [4] O. Angel and N. Curien. Percolation on infinite random maps, half-plane models. *Ann. Inst. Henri Poincaré Prob.* À paraître.
- [5] O. Angel, A. Nachmias, and G. Ray. Random walks on stochastic hyperbolic half planar triangulations. 2014. preprint.
- [6] O. Angel and G. Ray. Classification of half planar maps. *Ann. Probab.* À paraître.
- [7] O. Angel and O. Schramm. Uniform infinite planar triangulations. *Comm. Math. Phys.*, 241 :191–213, 2003.
- [8] I. Benjamini and N. Curien. Ergodic theory on stationary random graphs. *Elec. J. Prob.*, 17 :1–20, 2012.
- [9] I. Benjamini and N. Curien. Simple walk on the uniform infinite planar quadrangulation : subdiffusivity via pioneer points. *Geom. Funct. Anal.*, 23 :501–531, 2013.
- [10] I. Benjamini, N. Curien, and A. Georgakopoulos. The liouville property and the intersection properties are equivalent for planar graphs. *Elec. Com. Prob.*, 17 :1–5, 2012.
- [11] J. Bertoin and R. Doney. On conditioning a random walk to stay nonnegative. *Ann. Probab.*, 22 :2152–2167, 1994.
- [12] N. Curien. A glimpse of the conformal structure of random planar maps. preprint.
- [13] N. Curien. Planar stochastic hyperbolic infinite triangulations. preprint.
- [14] Y. Derriennic. Quelques applications du théorème ergodique sous-additif. *Astérisque*, 74 :183–201, 1980.
- [15] R. Durrett. *Probability : Theory and Examples*. Duxbury Advanced Series, 2005.

- [16] I. Goulden and D. Jackson. *Combinatorial enumeration*. New York, Wiley, 1983.
- [17] O. Gurel-Gurevich and A. Nachmias. Recurrence of planar graph limits. *Ann. of Math.*, 2012. À paraître.
- [18] J.-F. Le Gall and G. Miermont. Scaling limits of random trees and planar maps. In *Probability and statistical physics in two and more dimensions*, pages 155–211. Amer. Math. Soc., 2012.
- [19] T. M. Liggett. An improved subadditive ergodic theorem. *Ann. Probab.*, 13 :1279–1285, 1985.
- [20] G. Ray. Geometry and percolation on half-planar triangulations. *Elec. J. Probab.*, 19 :1–28, 2014.
- [21] C. Thomassen. Isoperimetric inequalities and transient random walks on graphs. *Ann. Probab.*, 20 :1592–1600, 1992.
- [22] W. Tutte. A census of planar triangulations. *Canad. J. Math.*, 14 :21–38, 1962.
- [23] B. Virag. Anchored expansion and random walk. *Geom. Funct. Anal.*, 10 :1588–1605, 2000.