

TD 8 : Encore des martingales

Lundi 21 Novembre

Exercice 1 (Modèle de Wright-Fisher)

Un gène a deux allèles α et β . On considère une population qui se renouvelle entièrement à chaque génération, le nombre d'individus restant fixe et égal à $n \geq 2$. On suppose que pour tout $k \geq 0$, à la génération $k + 1$, chacun des n individus choisit son parent uniformément parmi les n individus de la génération k , indépendamment les uns des autres. On note X_k le nombre d'individus portant l'allèle α à la génération k , et $\mathcal{F}_k = \sigma(X_0, \dots, X_k)$. On suppose $X_0 = a \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

1. Quelle est la loi de X_{k+1} conditionnellement à \mathcal{F}_k ? En déduire que X est une martingale pour $(\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$.
2. Montrer que X converge p.s. vers une variable X_∞ , et donner sa loi.
On pose $\tau = \inf\{k | X_k = X_\infty\}$.
3. Calculer $\mathbb{E}[X_{k+1}(n - X_{k+1}) | \mathcal{F}_k]$ et trouver une martingale.
4. En déduire un encadrement de $\mathbb{E}[\tau]$. On pourra par exemple montrer

$$\mathbb{E}[\tau] = O(n \ln n).$$

Exercice 2 (Une preuve de la loi forte des grands nombres)

Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Var}(Z_n)}{n^2} < +\infty$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$M_n = \sum_{j=1}^n \frac{Z_j}{j} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{j=1}^n Z_j.$$

1. Montrer que M_n converge p.s. quand n tend vers $+\infty$.
2. En exprimant S en fonction de M , en déduire $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$.
3. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] = 0$. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X . Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \mathbb{1}_{|X_n| \leq n}$. Montrer que :
 - (i) $\mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[X]$,
 - (ii) $\mathbb{P}(\exists n \geq 1, \forall j \geq n, X_j = Y_j) = 1$,
 - (iii) $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$.
4. En déduire la loi forte des grands nombres.

Exercice 3 (Théorème de Rademacher)

Le but de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \quad \text{et} \quad Z_n = 2^n (f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes :

$$\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(X_n) \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X).$$

- Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une \mathcal{F}_n -martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ pour tout $n \geq 0$).
- Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z , limite p.s. et dans L^1 de $(Z_n)_{n \geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée telle que $Z = g(X)$.
- Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s. :

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u) du.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u) du$.

Exercice 4 (Vaisseau spatial perdu)

Le *Millenium Falcon* se trouve à une distance D_0 du Soleil mais ses commandes ne répondent plus : toutes les heures, Han Solo ne peut qu'entrer une distance r_n inférieure à la distance au Soleil dans l'ordinateur de bord, qui effectue alors un saut dans l'hyperespace de longueur r_n et de direction choisie uniformément dans la sphère S^2 . On note D_n la distance du vaisseau au Soleil après n sauts et \mathcal{F}_n la tribu engendrée par les n premiers sauts. Han Solo veut revenir dans le système solaire, c'est-à-dire à distance au plus d du soleil.

- En utilisant des souvenirs de physique de prépa (théorème de Gauss), montrer que $\left(\frac{1}{D_n}\right)$ est une martingale.
- En déduire que la probabilité que Han Solo revienne un jour dans le système solaire est inférieure ou égale à $\frac{d}{D_0}$.
- A la place du pilote, feriez-vous plutôt de grands ou de petits sauts ?

Exercice 5 (Propriété de Liouville)

Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini (i.e. où chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins) et $h : V \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que h est *harmonique sur G* si pour tout $x \in V$, on a

$$h(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} h(y),$$

où la somme est effectuée sur les voisins y de x et où $\deg(x)$ est le nombre de ces voisins. On dit que G vérifie la *propriété de Liouville* si toute fonction bornée harmonique sur G est constante.

- Montrer que si h est harmonique et (X_n) est une marche aléatoire simple sur G , alors $(h(X_n))_{n \geq 0}$ est une martingale.
- Montrer que si la marche aléatoire simple sur G est récurrente (i.e. si elle visite presque sûrement tous les points une infinité de fois), alors G vérifie la propriété de Liouville.
- Soient $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d x_i \equiv \sum_{i=1}^d y_i \pmod{2}$. Montrer qu'il existe (X_n) et (Y_n) deux marches aléatoires simples (non indépendantes !) issues respectivement de x et y telles que p.s., pour n assez grand, $X_n = Y_n$.
- En déduire que \mathbb{Z}^d vérifie la propriété de Liouville.
- Donner un exemple de graphe (connexe, localement fini) ne vérifiant pas la propriété de Liouville.

Indication : Pour la question 3, commencer par le cas $d = 1$ puis essayer d'adapter à d quelconque.