Processus aléatoires
ENS Paris, 2017-2018

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 7 : Martingales, théorème d'arrêt

Vendredi 27 Octobre

1 Temps d'arrêt

Exercice 1 (Vrai ou faux)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_n)$. Lesquelles des variables suivantes sont des temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)$?

1. $T_1 = \min\{n \geq 0 | S_n = 2017\}$,
2. $T_2 = \min\{n \geq 2017 | S_n = S_{n-2017}\}$,
3. $T_3 = \min\{n \geq 0 | S_n = S_{n+2017}\}$,
4. $T_4 = \min\{n \geq T_1 | S_n = 0\}$,
5. $T_5 = \max\{n \in [\![0, 2017]\!] | S_n = 0\}$,
6. $T_6 = \min\{n \in [\![0, 2017]\!] | \forall m \in [\![0, 2017]\!], S_m \leq S_n\}$.

Exercice 2 (Ce qui peut arriver, arrivera)
Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a p.s.

$$\mathbb{P}(T \leq n + n_0 | \mathcal{F}_n) > \varepsilon.$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

2 Martingales et marches aléatoires

Exercice 3 (À la pêche aux martingales)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \cdots S_n)$.

1. Montrer que (S_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que $(S_n^2 - n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
3. Montrer que $(S_n^3 - 3nS_n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

4. Soit $P(X,Y)$ un polynôme à deux variables. Montrer que $(P(S_n,n))$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$ si pour tous $s,n \in \mathbb{Z}$, on a
$$P(s+1,n+1) - 2P(s,n) + P(s-1,n+1) = 0.$$
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(\alpha S_n - \beta n)$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)$.

Exercice 4 (Temps de sortie II, le retour)
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$. Soient $a,b \geq 0$ et $T = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}$. On rappelle que $T < +\infty$ p.s..

1. En utilisant la première martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, redémontrer
$$\mathbb{P}\left(S_T = b\right) = \frac{a}{a+b}.$$
2. En utilisant la seconde martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, redémontrer
$$\mathbb{E}[T] = ab.$$

Indication : Le temps d'arrêt T n'est pas borné. Il faut donc passer par des temps d'arrêt de la forme $T \wedge t = \min(T,t)$.

Exercice 5 (Martingales et marche biaisée)
Soit $p \neq \frac{1}{2}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec X_i i.i.d. et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1-p$.

1. Trouver α tel que α^{S_n} soit une martingale.
2. Soient a, b et T comme dans l'exercice précédent. Calculer $\mathbb{P}(S_T = b)$.

Exercice 6 (Un contre-exemple)
Trouver un processus $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $E[|M_n|] < +\infty$ pour tout n et tel que $E[M_{n+1} \mid M_n] = M_n$ pour tout n, mais sans que M soit une martingale.

3 Martingales, chimpanzés et vaisseaux spatiaux

Exercice 7 (Singe savant)
Un chimpanzé est assis devant une machine à écrire et commence à taper une lettre par seconde. Il tape à chaque fois une lettre choisie uniformément parmi les 26 lettres de l'alphabet, indépendamment des lettres précédentes. On note T le premier temps auquel les 11 dernières lettres écrites par le singe forment le mot "ABRACADABRA". Le but de l'exercice est de calculer $\mathbb{E}[T]$. Pour cela, on va définir une martingale. On suppose que le singe a juste à côté de lui un sac rempli de beaucoup (beaucoup, beaucoup) de bananes. On joue alors au jeu suivant : juste *avant* chaque seconde $n = 1,2,3,\ldots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1 banane avec lui sur l'événement
$$\{\text{la } n\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "A"}\}.$$
Si il perd, il part (et le singe met 1 banane dans son sac). Si il gagne, il reçoit 26 bananes du singe, qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+1\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "B"}\}.$$

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit 26^2 bananes qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+2\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "R"}\}.$$

Et ainsi de suite jusqu'à ce que "ABRACADABRA" sorte de la machine. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe.

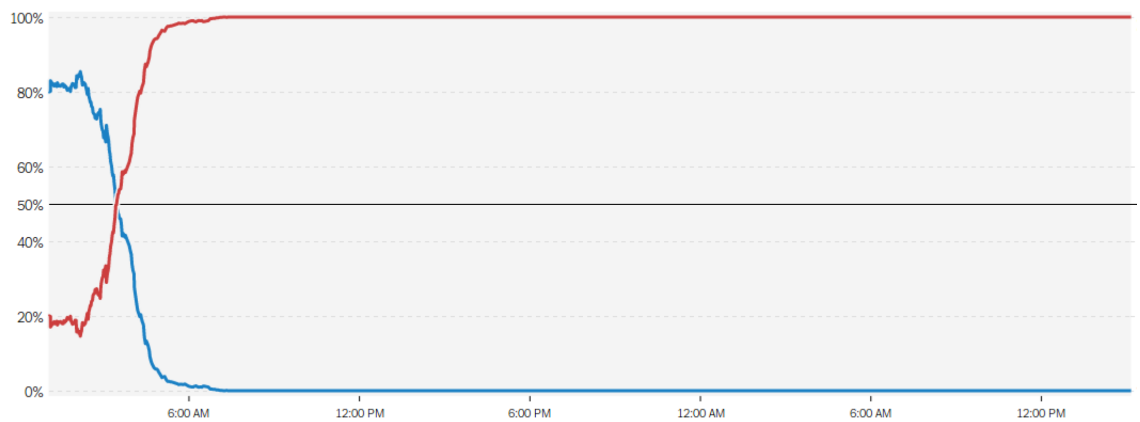
1. Montrer que le nombre de bananes dans le sac du chimpanzé au temps n est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, où $\mathcal{F}_n$ est la tribu engendrée par les n premières lettres tapées par l'animal.
2. En déduire
$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$
3. Refaire le même exercice en remplaçant "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIJK". Commenter.

Exercice 8 (Vaisseau spatial perdu)
Le *Millenium Falcon* se trouve à une distance D_0 du Soleil mais ses commandes ne répondent plus : toutes les heures, Han Solo ne peut qu'entrer une distance R_n inférieure à la distance au Soleil dans l'ordinateur de bord, qui effectue alors un saut dans l'hyperespace de longueur R_n et de direction choisie uniformément dans la sphère S^2. On note D_n la distance du vaisseau au Soleil après n sauts et $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les n premiers sauts. Han Solo veut revenir dans le système solaire, c'est-à-dire à distance au plus d du Soleil.

1. En utilisant des souvenirs de physique de prépa (théorème de Gauss), montrer que $\left(\frac{1}{D_n}\right)$ est une martingale.
2. En déduire que la probabilité que Han Solo revienne un jour dans le système solaire est inférieure ou égale à $\frac{d}{D_0}$.
3. A la place du pilote, feriez-vous plutôt de grands ou de petits sauts ?

4 Une image intéressante

Exercice 9



1. L'image ci-dessus a-t-elle l'air de représenter une martingale ?

2. Que représente-t-elle ? Expliquer pourquoi les processus représentés devraient être des martingales.
3. Que peut-on en conclure ?