

TD 8 : Convergence des martingales

Mercredi 8 Novembre

1 Convergence des martingales

Exercice 1 (Exemples et contre-exemples)

1. Trouver un exemple de martingale qui n'est pas bornée dans L^1 .
2. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. mais n'est pas bornée dans L^1 .
3. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. vers $+\infty$.
4. Trouver un exemple de martingale bornée dans L^1 mais qui ne converge pas dans L^1 .

Exercice 2 (Urne de Polya)

À l'instant 0, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule uniformément et on la remplace par deux boules de sa couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 1. On répète ce procédé.

Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = \frac{Y_n}{N_0+n}$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n . Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

1. Donner $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n | \mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U , et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.
3. *Cas* $a = b = 1$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n+1\}$. En déduire la loi de U .
4. *Cas général*. On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n + 1) \dots (Y_n + k - 1)}{(N_0 + n)(N_0 + n + 1) \dots (N_0 + n + k - 1)}.$$

Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.

5. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur \mathbb{R} (on exhibera le développement en série entière). Expliquer pourquoi on a caractérisé la loi de U .

Exercice 3 (Théorème de Rademacher)

Le but de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \quad \text{et} \quad Z_n = 2^n (f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes :

$$\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(X_n) \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X).$$

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une \mathcal{F}_n -martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ pour tout $n \geq 0$).
3. Montrer que (Z_n) converge p.s. et dans L^1 vers une variable aléatoire Z , puis qu'il existe une fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée telle que $Z = g(X)$ p.s..
4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s. :

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u) du.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u) du$.

Exercice 4 (Processus de Galton–Watson surcritique)

Soit μ une loi sur \mathbb{N} telle que $\sum_i i\mu(i) = m > 1$ et $\sum_i i^2\mu(i) < +\infty$. Soient $(Z_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}}$ des variables i.i.d. de loi μ . On définit le processus X par $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}.$$

1. Que peut décrire le processus X ?
2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0)$. Montrer une formule de récurrence de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$, et en déduire que $p < 1$.
3. On pose $M_n = m^{-n} X_n$. Montrer que M est une martingale. En déduire que M_n converge p.s. vers une variable M_∞ .
4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$, et en déduire que $M_n \rightarrow M_\infty$ dans L^2 .

5. On note $q = \mathbb{P}(M_\infty = 0)$. Donner une équation sur q . En déduire que $q = p$. Qu'est-ce que cela signifie sur la croissance de X_n ?

Exercice 5 (Propriété de Liouville)

Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini (i.e. où chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins) et $h : V \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que h est *harmonique sur G* si pour tout $x \in V$, on a

$$h(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} h(y),$$

où la somme est effectuée sur les voisins y de x et où $\deg(x)$ est le nombre de ces voisins. On dit que G vérifie la *propriété de Liouville* si toute fonction bornée harmonique sur G est constante.

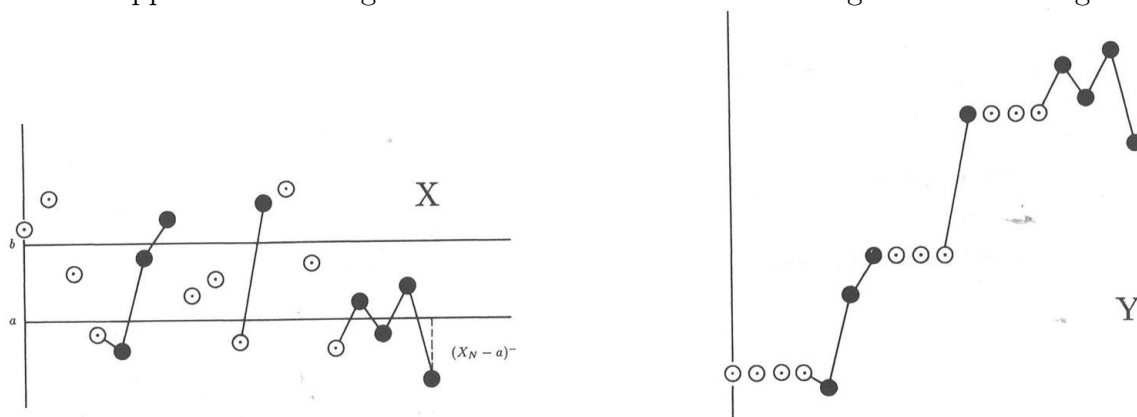
1. Montrer que si h est harmonique et (X_n) est une marche aléatoire simple sur G , alors $(h(X_n))_{n \geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer que si la marche aléatoire simple sur G est récurrente (i.e. si elle visite presque sûrement tous les points une infinité de fois), alors G vérifie la propriété de Liouville.
3. Soient $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d x_i \equiv \sum_{i=1}^d y_i \pmod{2}$. Montrer qu'il existe (X_n) et (Y_n) deux marches aléatoires simples (non indépendantes !) issues respectivement de x et y telles que p.s., pour n assez grand, $X_n = Y_n$.
4. En déduire que \mathbb{Z}^d vérifie la propriété de Liouville.
5. Donner un exemple de graphe (connexe, localement fini) ne vérifiant pas la propriété de Liouville.

Indication : La question 3 est dure. Commencer par le cas $d = 1$ puis essayer d'adapter à d quelconque.

2 Une image intéressante ET une jolie image

Exercice 6

Quel est le rapport entre l'image suivante et le théorème de convergence des martingales ?



Exercice 7

Que représente la jolie image ci-dessous ?

