

TD 9 : Encore des martingales !

Mercredi 15 Novembre

Exercice 1 (Modèle de Wright-Fisher)

Un gène a deux allèles α et β . On considère une population qui se renouvelle entièrement à chaque génération, le nombre d'individus restant fixe et égal à $n \geq 2$. On suppose que pour tout $k \geq 0$, à la génération $k + 1$, chacun des n individus choisit son parent uniformément parmi les n individus de la génération k , indépendamment les uns des autres. On note X_k le nombre d'individus portant l'allèle α à la génération k , et $\mathcal{F}_k = \sigma(X_0, \dots, X_k)$. On suppose $X_0 = a \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

1. Quelle est la loi de X_{k+1} conditionnellement à \mathcal{F}_k ? En déduire que X est une martingale pour $(\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$.
2. Montrer que X converge p.s. vers une variable X_∞ , et donner sa loi.
On pose $\tau = \inf\{k | X_k = X_\infty\}$.
3. Calculer $\mathbb{E}[X_{k+1}(n - X_{k+1}) | \mathcal{F}_k]$ et trouver une martingale.
4. En déduire un encadrement de $\mathbb{E}[\tau]$. On pourra par exemple montrer

$$\mathbb{E}[\tau] = O(n \ln n).$$

Exercice 2 (Une preuve de la loi forte des grands nombres)

Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Var}(Z_n)}{n^2} < +\infty$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$M_n = \sum_{j=1}^n \frac{Z_j}{j} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{j=1}^n Z_j.$$

1. Montrer que M_n converge p.s. quand n tend vers $+\infty$.
2. En exprimant S en fonction de M , en déduire $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$.
3. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] = 0$. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X . Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \mathbb{1}_{|X_n| \leq n}$. Montrer que :

- (i) $\mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X]$,
- (ii) $\mathbb{P}(\exists n \geq 1, \forall j \geq n, X_j = Y_j) = 1$,
- (iii) $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$.

4. En déduire la loi forte des grands nombres.

Exercice 3 (Vaisseau spatial perdu)

Le *Millenium Falcon* se trouve à une distance D_0 du Soleil mais ses commandes ne répondent plus : toutes les heures, Han Solo ne peut qu'entrer une distance r_n inférieure à la distance au Soleil dans l'ordinateur de bord, qui effectue alors un saut dans l'hyperespace de longueur r_n et de direction choisie uniformément dans la sphère S^2 . On note D_n la distance du vaisseau au Soleil après n sauts et \mathcal{F}_n la tribu engendrée par les n premiers sauts. Han Solo veut revenir dans le système solaire, c'est-à-dire à distance au plus d du soleil.

1. En utilisant des souvenirs de physique de prépa (théorème de Gauss), montrer que $\left(\frac{1}{D_n}\right)$ est une martingale.
2. En déduire que la probabilité que Han Solo revienne un jour dans le système solaire est inférieure ou égale à $\frac{d}{D_0}$.
3. A la place du pilote, feriez-vous plutôt de grands ou de petits sauts ?

Exercice 4 (Processus de Galton–Watson surcritique)

Soit μ une loi sur \mathbb{N} telle que $\sum_i i\mu(i) = m > 1$ et $\sum_i i^2\mu(i) < +\infty$. Soient $(Z_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}}$ des variables i.i.d. de loi μ . On définit le processus X par $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}.$$

1. Que peut décrire le processus X ?
2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0)$. Montrer une formule de récurrence de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$, et en déduire que $p < 1$.
3. On pose $M_n = m^{-n}X_n$. Montrer que M est une martingale. En déduire que M_n converge p.s. vers une variable M_∞ .
4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$, et en déduire que $M_n \rightarrow M_\infty$ dans L^2 .
5. On note $q = \mathbb{P}(M_\infty = 0)$. Donner une équation sur q . En déduire que $q = p$. Qu'est-ce que cela signifie sur la croissance de X_n ?

Exercice 5 (Propriété de Liouville)

Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini (i.e. où chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins) et $h : V \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que h est *harmonique sur G* si pour tout $x \in V$, on a

$$h(x) = \frac{1}{\text{deg}(x)} \sum_{y \sim x} h(y),$$

où la somme est effectuée sur les voisins y de x et où $\deg(x)$ est le nombre de ces voisins. On dit que G vérifie la *propriété de Liouville* si toute fonction bornée harmonique sur G est constante.

1. Montrer que si h est harmonique et (X_n) est une marche aléatoire simple sur G , alors $(h(X_n))_{n \geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer que si la marche aléatoire simple sur G est récurrente (i.e. si elle visite presque sûrement tous les points une infinité de fois), alors G vérifie la propriété de Liouville.
3. Soient $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d x_i \equiv \sum_{i=1}^d y_i \pmod{2}$. Montrer qu'il existe (X_n) et (Y_n) deux marches aléatoires simples (non indépendantes!) issues respectivement de x et y telles que p.s., pour n assez grand, $X_n = Y_n$.
4. En déduire que \mathbb{Z}^d vérifie la propriété de Liouville.
5. Donner un exemple de graphe (connexe, localement fini) ne vérifiant pas la propriété de Liouville.

Indication : Pour la question 3, commencer par le cas $d = 1$ puis essayer d'adapter à d quelconque.

Exercice 6

Que représente la jolie image ci-dessous ?

