FILIERE MP : ENS (PARIS) – ENS LYON – ENS CACHAN

PAGE DE GARDE DU RAPPORT DE TIPE 2012

NOM : BUDZINSKI Prénoms : Thomas

Lycée : Louis le Grand

Classe : MP*3

Ville : PARIS

Concours auxquels vous êtes admissible dans la banque inter-ENS :

(Mettre une croix très visible dans la ou les case(s) vous concernant)

ENS Cachan	MP - option MP		MP - option MPI	X
	Informatique			
ENS Lyon	MP - option MP	X	MP - option MPI	
	Informatique - option M		Informatique - option P	
ENS (Paris)	MP - option MP	X	MP - option MPI	
	Informatique			

Matière dominante du TIPE : mathématiques
(mathématiques, informatique ou physique)

Titre du TIPE : Percolation sur le réseau carré

Nombre de pages (à porter dans les cases ci-dessous) :

Texte | T | 7 | Illustrations | I | 0 | Bibliographie | B | 0

Résumé imprimé (6 lignes) :

La percolation est un modèle probabiliste proposé dans les années 1950 pour étudier les propriétés macroscopiques d'un solide poreux, ou plus généralement de n'importe quel milieu aléatoire. Dans la première partie, on mettra en évidence la principale caractéristique du modèle : l'existence d'une transition de phase. On étudiera ensuite en détail le régime sous-critique, afin de montrer le théorème de décroissance exponentielle, ingrédient essentiel du calcul de la probabilité critique pour le réseau carré.

A PARIS, le 09/06/12
Signature du (de la) candidat(e)

Signature du professeur responsable de la classe préparatoire dans la discipline

Cachet de l'établissement

Lycée Louis le Grand
0750655E
123, rue St Jacques
75231 PARIS CEDEX 05
Tél. 01 44 32 82 00

1 Mise en évidence de la transition de phase

1.1 Présentation du modèle

On considère un graphe infini $G = (V, E)$, on se fixe $p \in [0, 1]$ et on en considère un sous-graphe aléatoire $G' = (V, E')$, où chaque arête de E est dans E' avec probabilité p, sans dépendance entre les arêtes. On dit qu'il y a percolation si G' admet une composante connexe infinie.

Plus formellement, on pose $\Omega = \prod_{e \in E}\{0, 1\}$: on peut identifier Ω à l'ensemble des sous-ensembles de E. On note $\mathscr{F}$ la tribu engendrée par l'ensemble des évènements ne dépendant qu'un nombre fini d'arêtes et, si μ_p est la mesure sur $\{0, 1\}$ telle que $\mu_p(\{1\}) = p$ et $\mu_p(\{0\}) = 1-p$, on note P_p la mesure produit $P_p = \prod_{e \in E} \mu_p$. On travaillera par la suite dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, P_p)$.

Une arête de E sera dite *ouverte* si elle est dans E', et *fermée* sinon. De plus, si $x \in V$, on notera C_x la composante connexe de E' contenant x.

Dans la pratique, G est en général un graphe très régulier. Dans toute la suite, G sera le réseau carré $\mathbb{L}^2$: on a $V = \mathbb{Z}^2$ et E est l'ensemble des $\{x, y\}$ avec $x, y \in \mathbb{Z}^2$ et $\|x - y\| = 1$. Les résultats énoncés restent toutefois vrais pour des graphes suffisamment réguliers comme $\mathbb{L}^d$ ou le réseau hexagonal.

On notera $\psi(p)$ la probabilité qu'il y ait percolation, et $\theta(p)$ la probabilité que la composante connexe contenant 0 soit infinie. Le modèle étant invariant par translation, pour tout sommet x, la probabilité que x soit dans une composante connexe infinie vaut $\theta(p)$.

1.2 Loi du 0-1 de Kolmogorov et transition de phase

On aura besoin de la loi du 0-1 de Kolmogorov. Bien qu'elle possède une formulation plus générale, on utilisera cette version :

Théorème 1.1. *Soit A un évènement invariant quand on change l'état d'un nombre fini d'arêtes. Alors $P_p(A) \in \{0, 1\}$.*

Démonstration. Soit B un évènement ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes : $P_p(A|B) = P_p(A)$, donc si $P_p(A) > 0$, $P_p(B|A) = \frac{P_p(B)P_p(A|B)}{P_p(A)} = P_p(B)$.

P_p et $E \to P_p(E|A)$ sont donc deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$, égales sur l'ensemble $\mathscr{E}$ des évènements ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes. Soit $\mathscr{F}'$ l'ensemble des $E \in \mathscr{F}$ tels que $P_p(E) = P_p(E|A)$: on vérifie que c'est une tribu. $\mathscr{F}$ étant la plus petite tribu contenant $\mathscr{E}$, on a $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$ donc $P_p(A) = P_p(A|A) = 1$. □

Or, si G' admet une composante connexe infinie, il existe une suite injective (x_n) de sommets tels que (x_n, x_{n+1}) est ouverte pour tout n de $\mathbb{N}$. Si on ferme un nombre fini d'arêtes de G', il existe N tel que (x_n, x_{n+1}) est ouverte pour $n \geq N$, donc il y a toujours percolation. On pourra donc appliquer la loi du 0-1.

De plus, θ est croissante. On pose donc $p_c(\mathbb{L}^2) = \sup\{p \in [0, 1], \theta(p) = 0\}$: p_c existe bien car $\theta(1) = 1 > 0$.
Si $p > p_c$, alors $\psi(p) \geq \theta(p) > 0$ donc d'après la loi du 0-1, $\psi(p) = 1$.
Si $p < p_c$, alors $\theta(p) = 0$ par croissance de θ, donc pour tout sommet x, la probabilité que x soit dans une composante connexe infinie est nulle. $\mathbb{Z}^2$ étant dénombrable, on a donc $\psi(p) = 0$, d'où le théorème :

Théorème 1.2. *On a* $\psi(p) = 0$ *si* $p < p_c$ *et* $\psi(p) = 1$ *si* $p > p_c$.

On a ainsi mis en évidence une transition de phase : p_c est appelée probabilité critique, et le comportement du modèle de part et d'autre de cette valeur change radicalement. Ce phénomène est assez courant en physique, et l'un des principaux intérêts de la percolation est d'être un des modèles mathématiques les plus simples présentant une transition de phase. Cependant, pour que le phénomène soit intéressant, il faut montrer que les régimes sous-critiques et surcritiques existent, c'est-à-dire que $0 < p_c < 1$, ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

1.3 Non-trivialité de la transition de phase

Proposition 1.1. *On a* $0 < p_c < 1$.

Démonstration. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on note $P(n)$ l'ensemble des chemins auto-évitants de longueur. Si la composante connexe contenant 0 est infinie, il existe un élément de $P(n)$ dont toutes les arêtes sont ouvertes, d'où :

$$\begin{aligned} \theta(p) &\leq P_p(\text{Il existe } c \in P(n) \text{ ouvert}) \\ &\leq \sum_{c \in P(n)} P_p(c \text{ est ouvert}) \\ &= |P(n)|p^n \\ &\leq 4^n p^n \end{aligned}$$

donc pour $p < \frac{1}{4}$, $\theta(p) = 0$ d'où $p_c \geq \frac{1}{4} > 0$.

Pour montrer $p_c < 1$, on utilise le réseau dual $\mathbb{L}^*$ de $\mathbb{L}^2$, dont les sommets sont les points $x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ avec $x \in \mathbb{Z}^2$, et les arêtes les $\{x, y\}$ avec $\|x - y\| = 1$:

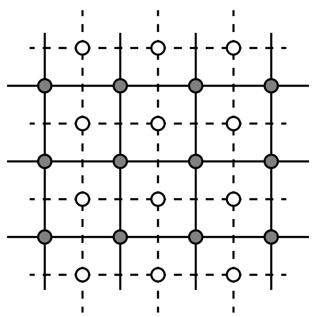

FIGURE 1 – Le réseau carré et son dual

Chaque arête e de $\mathbb{L}^2$ coupe une unique arête e^* de $\mathbb{L}^*$. Chaque processus de percolation sur $\mathbb{L}^2$ induit donc un processus de percolation sur son dual, où les arêtes ouvertes sont les e^* avec e ouverte.

Les composantes connexes finies dans $\mathbb{L}^2$ sont alors entourées par des circuits du dual dont toutes les arêtes sont fermées, comme le montre la figure 2. Il est possible de formuler et de démontrer ce résultat de manière formelle, mais on l'admettra ici.

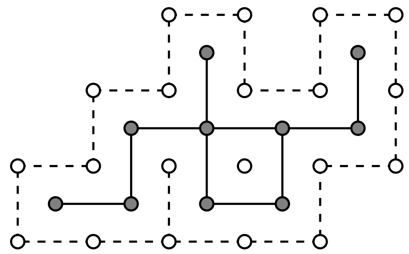

FIGURE 2 – Une composante connexe finie entourée par un circuit du dual

On peut maintenant procéder comme pour $p_c > 0$: si la composante connexe contenant 0 est finie, il existe un circuit γ entourant 0, dont toutes les arêtes sont fermées. Soit donc, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)$ l'ensemble des circuits de longueur n entourant l'origine : un tel circuit doit couper l'axe $x = \frac{1}{2}$ en un point $(\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ avec $0 \leq k \leq n$ d'où $|\Gamma(n)| \leq (n+1)4^n$, donc :

$$
\begin{aligned}
1 - \theta(p) &\leq \sum_{\gamma} P_p(\text{toutes les arêtes de } \gamma \text{ sont fermées}) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |\Gamma(n)|(1-p)^n \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (n+1)4^n(1-p)^n
\end{aligned}
$$

Cette dernière série entière en $1-p$ a un rayon de convergence non nulle, donc par continuité $1 - \theta(p) \leq \frac{1}{2}$ pour $1-p$ assez petit, d'où le résultat. □

2 Décroissance exponentielle des diamètres des composantes connexes en régime sous-critique

On munit le plan de la norme $\|.\|$ telle que $\|(x,y)\| = |x| + |y|$ pour tous x et y et, si A est un ensemble fini de sommets, on pose $r(A) = max_{x \in A}\|x\|$. Enfin, on notera $S(x,n)$ la sphère de centre x et de rayon n et $S(n) = S(0,n)$.

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit $p < p_c$: alors il existe $\xi(p) > 0$ tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$:*

$$P_p(r(C_0) \geq n) \leq e^{-\xi(p)n}$$

Ce théorème, ou au moins une bonne majoration de $P_p(r(C_0) \geq n)$, a longtemps été la pièce manquante au calcul de p_c. Il permet, en utilisant l'autodualité du réseau carré, de montrer $p_c \leq \frac{1}{2}$.

2.1 Outils probabilistes

La démonstration du théorème utilise des propriétés probabilistes d'une certaine classe d'évènements, appelés évènements croissants :

Définition 2.1. *On écrit* $\omega \leq \omega'$ *si* $\omega, \omega' \in \Omega$ *et* $\omega(e) \leq \omega'(e)$ *pour toute arête* e.
Un évènement $A \in \mathscr{F}$ *est dit croissant si pour tous* $\omega \in A$ *et* $\omega' \geq \omega$, *on a* $\omega' \in A$.

Définition 2.2. *Si* A *et* B *sont deux évènements, on note* $A\$B$ *l'évènement : "Il existe deux ensembles disjoints d'arêtes ouvertes* α *et* β *tels que* A *se réalise dès que toutes les arêtes de* α *sont ouvertes et* B *se réalise dès que toutes les arêtes de* β *sont ouvertes."*

Autrement dit, $A\$B$ signifie que A et B se réalisent "de manière disjointe". On admettra l'inégalité suivante, dite BK :

Proposition 2.1. *Soient* A *et* B *deux évènements croissants ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes. Alors :*

$$P_p(A\$B) \leq P_p(A)P_p(B)$$

Un outil essentiel sera la formule de Russo, admise elle aussi :

Définition 2.3. *Soient* A *un évènement et* $\omega \in \Omega$ *: on dit qu'un arête* e *est pivot pour* A *et* ω *si* $\omega \in A$ *et, si* ω' *est obtenu à partir de* ω *en fermant* e, $\omega \notin A$.

Autrement dit, une arête pivot dans une certaine configuration est une arête "cruciale" pour que A se produise. On notera $N(A)$ le nombre d'arêtes pivot pour A.

Proposition 2.2. *Soit* A *un évènement croissant ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes. Alors :*

$$\frac{d}{dp}P_p(A) = E_p(N(A))$$

Enfin, on admettra aussi la formule de Wald :

Proposition 2.3. *Soient* (X_n) *une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes et de même loi, et* N *une variable aléatoire intégrable à valeurs dans* $\mathbb{N}$. *Alors :*

$$E(X_1 + ... + X_N) = E(N)E(X_1)$$

2.2 Preuve du théorème

Pour $p \in]0, p_c[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement $r(C_0) \geq n$ et on pose $g_n(p) = P_p(A_n)$.

Quelques manipulations élémentaires à partir de la formule de Russo permettent d'obtenir la formule suivante :

$$g_n'(p) = \frac{1}{p}E_p(N(A_n)|A_n)g_n(p) \tag{1}$$

La majeure partie de la preuve consistera donc à minorer $E_p(N(A_n)|A_n)$ afin d'en déduire le résultat en intégrant l'équation précédente.

Or, si A_n se réalise, il existe un chemin auto-évitant reliant 0 à un sommet x avec $\|x\| = n$. On note $e_1, ..., e_{N(A_n)}$ les arêtes pivot, dans l'ordre par lequel ce

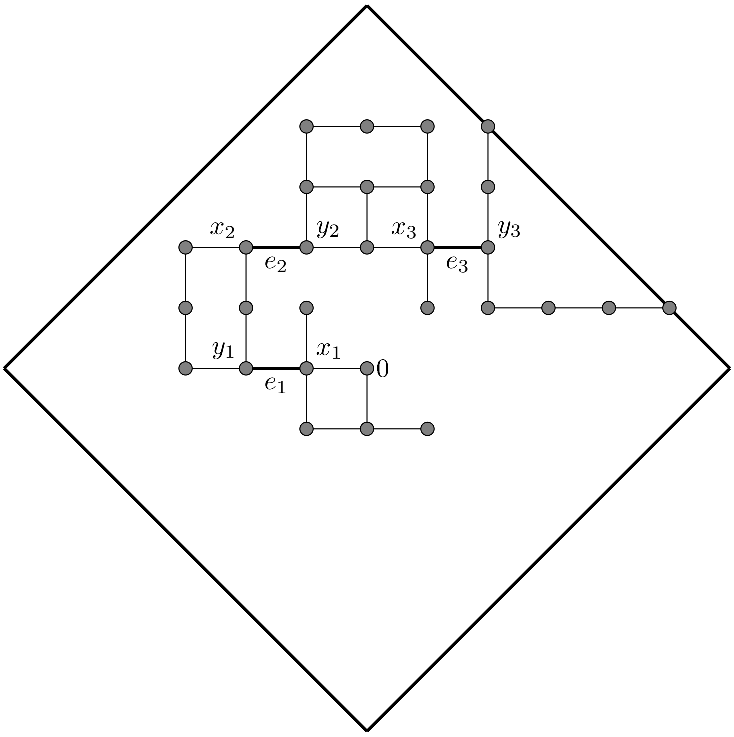

FIGURE 3 – Illustration pour $n = 6$ de la définition des e_i (en gras), x_i et y_i : on a ici $\rho_1 = 1$ et $\rho_2 = \rho_3 = 2$.

chemin les traverse. Pour tout i, on note x_i et y_i les extrémités de e_i, telles que le chemin passe en x_i avant y_i. On vérifie que ces notations sont indépendantes du chemin choisi, comme sur la figure 3. Enfin, on pose $\rho_i = \|x_i - y_{i-1}\|$ pour $2 \leq i \leq N(A_n)$, $\rho_1 = \|x_1\|$ et $\rho_i = +\infty$ pour $i > N(A_n)$.

Pour minorer $E_p(N(A_n)|A_n)$, il faut que les ρ_i finis soient "assez nombreux", et donc qu'ils ne soient "pas trop grands". C'est ce qu'exprime le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soient M une variable aléatoire de même distribution que $r(C_0)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $r_1, ..., r_k \in \mathbb{N}$ avec $\sum_{i=1}^{k} r_i \leq n - k$. Alors pour $0 < p < p_c$:*

$$P_p(\rho_k \leq r_k, \rho_i = r_i \text{ pour } 1 \leq i < k|A_n) \geq P_p(M \leq r_k)P_p(\rho_i = r_i \text{ pour } 1 \leq i < k|A_n)$$

Démonstration. On note B l'évènement "$\rho_i = r_i$ pour $1 \leq i < k$".
Etant donnés un sommet y et deux ensembles de sommets Γ et S, on notera $C_{y,S,\Gamma}$ l'évènement : "Il existe un chemin ouvert reliant y à un point de S et ne passant par aucun point de Γ". De plus, on notera G le graphe composé de l'arête e_{k-1}, et des sommets et arêtes ouvertes qu'on peut atteindre par des

chemins ouverts sans utiliser e_k. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
P_p(A_n \cap B) &= \sum_{(\Gamma,y)} P_p(B,(G,y_{k-1})=(\Gamma,y))P_p(A_n|B,G=\Gamma,y_{k-1}=y) \\
&= \sum_{(\Gamma,y)} P_p(B,(G,y_{k-1})=(\Gamma,y))P_p(C_{y,S(n),\Gamma})
\end{aligned}$$

où (Γ,y) décrit toutes les valeurs possibles de (G,y_{k-1}).

On montre alors, similairement :

$$P_p(A_n,B,\rho_k>r_k)=\sum_{(\Gamma,y)} P_p(B,G=\Gamma,y_{k-1}=y)P_p(C_{y,S(n),\Gamma}\$C_{y,S(y,r_k+1,\Gamma)})$$

Or, $P_p(C_{y,S(y,r_k+1),\Gamma)})\le g_{r_k+1}(p)$ pour tout (Γ,y), donc l'inégalité BK donne :

$$P_p(A_n,B,\rho_k>r_k)\le g_{r_k+1}(p)P_p(A_n\cap B)$$

d'où le lemme en divisant par $P_p(A_n)$. □

Comme espéré, ce lemme permet d'obtenir une minoration de $E_p(N(A_n)|A_n)$:

Lemme 2.2. *Pour* $0<p<p_c$ *:*

$$E_p(N(A_n)|A_n)\ge \frac{n}{\sum_{i=0}^n g_i(p)}-1$$

Démonstration. Soit $(M_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ un suite de variables aléatoires indépendantes distribuées comme $r(C_0)$: en itérant k fois le lemme 2.1, on obtient, pour tout $k\ge 1$, l'inégalité :

$$P_p(\rho_1+...+\rho_k\le n-k|A_n)\ge P(M_1+...+M_k\le n-k)$$

On pose $M_i'=M_i+1$: en sommant sur k, on obtient :

$$\begin{aligned}
E_p(N(A_n)|A_n) &\ge \sum_{k\in\mathbb{N}^*} P(M_1'+...+M_k'\le n) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} P(K\ge k+1) \\
&= E(K)-1
\end{aligned}$$

où $K=\min\{k|M_1'+...+M_k'>n\}$.
D'après la formule de Wald, $n\le E(M_1'+...+M_k')=E(K)E(M_1')$ d'où :

$$E(K)\ge\frac{n}{1+E(M_1)}=\frac{n}{\sum_{i=0}^n g_i(p)}$$

d'où le Lemme 2.2. □

Soient donc p avec $0<p<p_c$, et $q\in]p,p_c[$. En intégrant (1) entre p et q et en utilisant le lemme précédent, on obtient :

$$g_n(p)\le g_n(q)\,\exp\left(-(q-p)\left(\frac{n}{\sum_{i=0}^n g_i(q)}-1\right)\right) \tag{2}$$

Cette formule va permettre, à partir d'une majoration de $g_n(p)$, d'en obtenir une meilleure. On commence donc par une majoration moins bonne :

Lemme 2.3. *Soit $p < p_c$: on a $g_n(p) = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$*

Démonstration. Soit $p < p_c$: l'idée est de construire par récurrence deux suites (n_k) et (p_k) avec $p_k \geq p$ pour tout k telles que $(g_{n_k}(p_k))$ décroît assez vite. Pour cela, on prend p_0 tel que $p < p_0 < p_c$ et n_0, qu'on fixera plus tard. On définit alors, par récurrence, pour $k \geq 0$:

- $g_k = g_{n_k}(p_k)$
- $p_{k+1} = p_i - 3g_k(1 - \ln g_k)$
- $n_{k+1} = \lfloor \frac{1}{g_k} \rfloor n_k$

On montre alors par récurrence sur k que $g_k \leq g_{k-1}^2$ si $k \geq 1$ et que $p_{k+1} \geq p$, ce qui assure l'existence des suites considérées. La première inégalité découle de (2) et du choix de n_k et p_k. Pour la seconde, on a, en utilisant la première :

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_0 - \sum_{j=0}^{k} 3g_j(1 - \ln g_j) \\ &\geq p_0 - \sum_{j=0}^{\infty} 3g_0^{2^j}(1 - \ln g_0^{2^j}) \end{aligned}$$

Cette dernière somme converge pour $0 < g_0 < 1$ et tend vers 0 quand g_0 tend vers 0, donc est majorée par $p_0 - p$ pour g_0 assez petit. En prenant n_0 assez grand, on a donc bien p_k défini et $p_k \geq p$ pour tout k.

De plus, en itérant $g_j \leq g_{j-1}^2$ puis en utilisant le choix des n_j, on obtient pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} g_{k-1} &\leq g_0\sqrt{g_1 g_2 \cdots g_{k-1}} \\ &\leq \sqrt{\frac{n_0 g_0}{n_k}} \end{aligned}$$

Il ne reste maintenant plus qu'à "combler les trous". Soit donc $n \geq n_0$: (g_k) tend vers 0 donc (n_k) tend vers $+\infty$ et il existe k tel que $n_{k-1} \leq n \leq n_k$. On a alors :

$$\begin{aligned} g_n(p) &\leq g_{k-1} \\ &\leq \frac{\sqrt{n_0 g_0}}{\sqrt{n_k}} \\ &\leq \frac{\sqrt{n_0 g_0}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

d'où le lemme. □

La preuve du théorème est maintenant facile : en majorant les $g_i(q)$ par $\frac{C(q)}{\sqrt{i}}$ dans (2), on obtient :

$$g_n(p) = O\left(\exp\left(-D(p)\sqrt{n}\right)\right)$$

d'où $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(p) < \infty$ pour $p < p_c$, puis le théorème en réappliquant (2).

Références

[1] G. Grimmett. *Percolation.* Springer-Verlag, 1989.

[2] A. Kolmogorov. *Foundations of the theory of probability.* Chelsea Publishing, 1956.