CPES Scientifique

Informatique

TP 10

Résolution de systèmes triangulaires

Résumé

Nous débutons dans ce TP à la résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss. Nous nous intéressons dans un premier temps à la résolution de systèmes triangulaires (dite *phase de remontée*).

1 Représentation de systèmes d'équations linéaires

On utilisera une représentation matricielle des systèmes d'équations linéaires. On se restreint aux systèmes ayant le même nombre d'équations que d'inconnues. Un système de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{pmatrix}$$

sera représenté à l'aide de la matrice A (la matrice des *membres gauches*) et de la liste B (les *membres droits*) suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Par exemple, le système

$$\begin{pmatrix} 2x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ -2x & - & y & - & 3z & = & -5 \\ 6x & + & 4y & + & 4z & = & 19 \end{pmatrix}$$

sera représenté par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 19 \end{pmatrix}$$

2 Phase de remontée

On s'intéresse pour l'instants aux systèmes dits *triangulaires*, c'est-à-dire aux systèmes dont les membres gauches sont des matrices triangulaires. Par exemple, le système suivant est triangulaire :

$$\begin{pmatrix} 2x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ & & y & - & 6z & = & -3 \\ & & & & z & = & 4 \end{pmatrix}$$

La résolution d'un tel système procède systématiquement du « bas vers le haut », c'est-à-dire qu'on calcule successivement

$$\begin{array}{rcl} z &=& 4 \\ y &=& -3+6z \;=\; 21 \\ x &=& \frac{1}{2}(2-2y+3z) \;=\; \frac{1}{2}(2-42+12) \;=\; -14 \end{array}$$

Question 2.1. *Écrire une fonction Python* `remontee` *qui prend en arguments une matrice* `a` *et une liste* `b` *tels que* $(\mathtt{a},\mathtt{b})$ *représente un système triangulaire, et qui renvoie une solution sous forme d'une liste de valeurs* $[v_1,\ldots,v_{\mathtt{n}}]$ *pour les inconnues* $x_1,\ldots,x_{\mathtt{n}}$.