Partiel 18 Novembre 2015.

- Durée 2h. Pas de documents. -

- Exercice 1 -
On se donne un automate fini non-déterministe $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ que l'on suppose sans ε-transitions. Construire un automate fini déterministe M équivalent à N.

- Exercice 2 -
Pour chacun des langages suivants, montrer que L_i est rationnel en proposant un automate fini A_i tel que $L_i = L(A_i)$, ou montrer que L_i n'est pas rationnel.

1. $L_1 = \{a,b\}^* \setminus \bigcup_{n\geq 1}\{a^n\}$
2. $L_2 = \{a^n b^m$: n différent de m$\}$
3. $L_3 = \{a,b\}^* \setminus (aba + abba)^*$
4. $L_4 = \{(ab)^n$: n est non premier$\}$

- Exercice 3 -
Pour chacune des grammaires G_i suivantes définies sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ avec variable initiale S, décrire le langage $L(G_i)$ et déterminer si elles sont ambiguës.

$$G_1 : \begin{array}{l} S \to aAb \mid bBa \\ A \to aAb \mid \epsilon \\ B \to bBa \mid \epsilon \end{array} \qquad G_2 : \begin{array}{l} S \to aAa \mid aBa \\ A \to bBb \mid \epsilon \\ B \to aAa \mid \epsilon \end{array} \qquad G_3 : \begin{array}{l} S \to XA \mid AY \\ X \to aXb \mid \epsilon \\ Y \to bYa \mid \epsilon \\ A \to aA \mid \epsilon \\ B \to bB \mid \epsilon. \end{array}$$

- Exercice 4 -
Proposer un algorithme décidant si le langage $L(G)$ d'une grammaire G est vide ou pas. Adapter votre algorithme afin de décider si $L(G)$ est fini.

- Exercice 5 -
Proposer un langage algébrique L sur un alphabet fini Σ tel que le complémentaire $\Sigma^* \setminus L$ de L ne soit pas algébrique.

- Exercice 6 -
Soit L un langage sur un alphabet Σ. On introduit les ensembles $\mathcal{P}(L), \mathcal{S}(L), \mathcal{F}(L), \mathcal{N}(L)$ comme suit :

$$\begin{array}{rccl} \text{lettre préfixe :} & x \in \mathcal{P}(L) & \Leftrightarrow & x \in \Sigma \text{ et } x\Sigma^* \cap L \neq \emptyset \\ \text{lettre suffixe :} & x \in \mathcal{S}(L) & \Leftrightarrow & x \in \Sigma \text{ et } \Sigma^* x \cap L \neq \emptyset \\ \text{double facteur :} & u \in \mathcal{F}(L) & \Leftrightarrow & u \in \Sigma^2 \text{ et } \Sigma^* u \Sigma^* \cap L \neq \emptyset \\ \text{non facteur :} & u \in \mathcal{N}(L) & \Leftrightarrow & u \in \Sigma^2 \text{ et } \Sigma^* u \Sigma^* \cap L = \emptyset \end{array}$$

Un langage L sur Σ est dit *local* si $L \setminus \{\epsilon\} = (\mathcal{P}(L)\Sigma^* \cap \Sigma^*\mathcal{S}(L)) \setminus \Sigma^*\mathcal{N}(L)\Sigma^*$.

1. Montrer que tout langage local est rationnel.
2. $(abc)^*$ est-il local ? et a^*ba ?
3. Les langages locaux sont-ils stables par union ? par concaténation ? par complémentaire ?

   Soit Γ un alphabet. Un *morphisme alphabétique* de Σ^* dans Γ^* est une application $\varphi : \Sigma^* \to \Gamma^*$ telle que
   – $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$
   – pour tout $a \in \Sigma$, $|\varphi(a)| = 1$
4. Montrer que tout langage rationnel L est l'image d'un langage local par un morphisme alphabétique. (indication : on pourra utiliser un automate qui reconnait L et utiliser l'alphabet $Q \times \Sigma \times Q$)