

## TD 1

**Exercice 1 : Les tomates c’est fini !**

Donner des automates finis qui reconnaissent les langages suivants

- $L_1 = \emptyset$
- $L_2 = \{\epsilon\}$
- $L_3 = \{0^n 1^m \mid n, m \geq 0\}$
- $L_4 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ se termine par } 101\}$
- $L_5 = \{x \in \{0, 1\}^* \mid |x|_0 \text{ pair et } |x|_1 \text{ impair}\}$
- $L_6$  est l’ensemble des mots sur  $\{a, b\}$  dont la  $i^{\text{ième}}$  lettre en partant de la fin est un  $a$ .
- $L_7 = \{0^{n_1} 1^{m_1} 0^{n_2} 1^{m_2} \dots 0^{n_k} 1^{m_k} \mid k \geq 0 \text{ et } \forall i, 1 \leq i \leq k, n_i, m_i > 0\}$
- $L_8 = \{\omega \in \{0, 1\}^* \mid \text{chaque bloc de } \omega \text{ de trois lettres consécutives contient au moins deux zéros}\}$ .
- $L_9 = (00 + 1)^*(11 + 0)^*$

Montrer que le langage suivant est rationnel :

$$L_{10} = \{a^i \mid \text{Le chiffre } 7 \text{ apparaît } i \text{ fois consécutives dans le développement de } \pi \text{ en base } 10\}$$

**Exercice 2 : Retour au CE2**

1 - On définit  $x^R$  comme le mot  $x$  écrit à l’envers et pour tout langage  $L$ , on définit  $L^R = \{\omega^R \mid \omega \in L\}$ . Montrer que si  $L$  est rationnel alors  $L^R$  est aussi rationnel.

2 - Soit

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Sigma_3$  contient toutes les colonnes de taille 3 de 0s et de 1s. Une chaîne de symboles de  $\Sigma_3$  donne ainsi 3 lignes de 0s et de 1s. Considérons chaque ligne comme un nombre binaire et posons

$$B = \{\omega \in \Sigma_3^* \mid \text{la ligne du bas de } \omega \text{ est la somme des deux lignes supérieures}\}.$$

Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in B, \text{ mais } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin B.$$

Montrer que  $B$  est rationnel.

3 - Soit

$$\Sigma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

De même chaque mot sur  $\Sigma_2^*$  forme deux mots sur  $\{0, 1\}^*$ . Posons,

$$C = \{\omega \in \Sigma_2^* \mid \text{la ligne du bas de } \omega \text{ est trois fois la ligne du haut}\}$$

$$D = \{\omega \in \Sigma_3^* \mid \text{la ligne du haut de } \omega \text{ est supérieure à la ligne du bas}\}.$$

Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in C, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in D,$$

$$\text{mais } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin C, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin D.$$

Montrer que  $C$  et  $D$  sont rationnels.

**Exercice 3 : C'est la taille qui compte**

Un ensemble d'entiers est linéaire s'il est de la forme  $\{c + ip, i \in \mathbb{N}\}$ . Un ensemble est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires. Soit  $L \subseteq a^*$  un langage rationnel, montrer que  $\{i, a^i \in L\}$  est semi-linéaire.

En déduire que pour tout langage  $L$  rationnel, l'ensemble  $\lambda(L) = \{|w|, w \in L\}$  est semi-linéaire.

**Exercice 4 : Il faut savoir raison garder**

Soit  $L$  un langage rationnel sur un alphabet  $\Sigma$ . Montrer que les langages suivants sont rationnels.

- 1 - CYCLE( $L$ ) =  $\{x_1x_2 \mid x_1, x_2 \in \Sigma^* \text{ et } x_2x_1 \in L\}$
- 2 - MAX( $L$ ) =  $\{x \in L \mid \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
- 3 - MIN( $L$ ) =  $\{x \in L \mid \text{aucun préfixe propre de } x \text{ n'est dans } L\}$
- 4 - INIT( $L$ ) =  $\{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^*, xy \in L\}$
- 5 -  $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|\}$
- 6 - SQRT( $L$ ) =  $\{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|^2\}$
- 7 - LOG( $L$ ) =  $\{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = 2^{|x|}\}$
- 8 -  $L' = \{a_2a_1a_4a_3 \dots a_{2n}a_{2n+1} \mid a_1a_2 \dots a_{2n} \in L, a_i \in \Sigma\}$
- 9 -  $L' = \{a_1a_3 \dots a_{2n-1} \mid a_1a_2 \dots a_{2n} \in L, a_i \in \Sigma\}$