TD 2

Exercice 1. *Il faut savoir raison garder*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ. Montrer que les langages suivants sont rationnels.
1 - CYCLE(L) = $\{x_1x_2 |\ x_1, x_2 \in \Sigma^*$ et $x_2x_1 \in L\}$
2 - MAX(L) = $\{x \in L |\ \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
3 - MIN(L) = $\{x \in L |$ aucun préfixe propre de x n'est dans $L\}$
4 - INIT(L) = $\{x \in \Sigma^* |\ \exists y \in \Sigma^*, xy \in L\}$
5 - $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^* |\ \exists y \in \Sigma^*$ avec $xy \in L$ et $|y| = |x|\}$
6 - SQRT(L) = $\{x \in \Sigma^* |\ \exists y \in \Sigma^*$ avec $xy \in L$ et $|y| = |x|^2\}$
7 - LOG(L) = $\{x \in \Sigma^* |\ \exists y \in \Sigma^*$ avec $xy \in L$ et $|y| = 2^{|x|}\}$
8 - $L' = \{a_2a_1a_4a_3 \ldots a_{2n}a_{2n+1} |\ a_1a_2 \ldots a_{2n} \in L,\ a_i \in \Sigma\}$
9 - $L' = \{a_1a_3 \ldots a_{2n-1} |\ a_1a_2 \ldots a_{2n} \in L,\ a_i \in \Sigma\}$

Exercice 2. *Certains disent qu'il est homo*

Soit Σ un alphabet fini. Un morphisme $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ est une application vérifiant, pour tous mots u, v, $h(uv) = h(u)h(v)$. Ainsi, un morphisme est défini dès qu'on se donne les images des mots à une lettre. Si L est un langage sur l'alphabet Σ et h un morphisme, on note $h(L)$ l'ensemble $\{h(u) | u \in L\}$.

1. Décrire $h(L)$ dans les cas suivants, où l'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.
   – $h(a) = ab$, $h(b) = \epsilon$, $L = \{a^nb^n | n \in \mathbb{N}\}$.
   – $h(a) = ab$, $h(b) = abab$, L est défini par l'expression rationnelle b^*ab^*.
2. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h(L)$ rationnel.
   Indice : exprime-toi de façon rationnelle.

Pour un langage L et un morphisme h sur l'alphabet Σ, on note $h^{-1}(L)$ l'ensemble $\{v \in \Sigma^* | h(v) \in L\}$.

3. Donner une expression de $h^{-1}(L)$ dans les cas suivants.
   – $\Sigma = \{a, b\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $L = \{a^ib^j | i \geq j\}$.
   – $\Sigma = \{a, b, c\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $h(c) = ba$, L défini par $a(ba)^*$.
4. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h^{-1}(L)$ rationnel.
5. Les questions 2 et 4 sont-elles les réciproques l'une de l'autre ?

Exercice 3. *Soyons rationnels, demandons les tomates !*

1. Soit L un langage rationnel qui est reconnu par un automate avec n états. Montrer que L est infini si et seulement s'il existe $w \in L$ tel que $n \leq |w| < 2n$.
2. Un langage rationnel est dit *unitaire* s'il existe un automate avec exactement un état acceptant qui le reconnait. Montrer que L est unitaire si et seulement si

$$\forall u, v, w \in \Sigma^* \quad u, uv, w \in L \implies wv \in L.$$

3. Soient N, M des AFD avec n et m états respectivement. Montrer que $L(N) = L(M)$ si et seulement si $\forall w \in \Sigma^*$ tel que $|w| < nm$ alors $w \in L(N) \iff w \in L(M)$. Conclure qu'il est possible de déterminer si deux automates reconnaissent le même langage en temps fini.

Exercice 4. *Lex L. (contre Superman)*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ. On munit Σ d'un ordre total et on considère l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ sur Σ^*. On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \mid \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\}$$

c'est-à-dire que pour chaque longueur de mots dans L, on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique.

1. Montrer que L_{lex} est rationnel.

Exercice 5. *Mssio Impssbl*

Une mot u est sous-mot de w s'il est possible d'obtenir u en effaçant des symboles de w. On denote cette relation par $u \sqsubset w$. Par exemple : $101 \sqsubset 110011$ mais $101 \not\sqsubset 01100$.
Pour un langage L on définit :

$$SUB(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists w \in L, u \sqsubset w\}$$

1. Soit L rationnel, montrer que $SUB(L)$ est rationnel.
2. (Impossible) Soit $L \subset \Sigma^*$, montrer que $SUB(L)$ est rationnel.