# TD 9 – Turing Machines (2)

**Exercice 1.** *Ou tu veux ou tu veux pas.*

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$ un alphabet et soit $x$ un mot de $\Sigma^*$. Construire des machines de Turing telles que :

1. lisant $x$ la machine écrit $x^R$ ($x$ écrit à l'envers)
2. la machine accepte $x$ ssi $x$ s'écrit $yy^R$ pour un certain $y \in \Sigma^*$.
3. la machine accepte $x$ ssi $x$ s'écrit $yy$ pour un certain $y \in \Sigma^*$.

**Exercice 2.** *L'école primaire d'Alan*

Construire une machine de Turing qui effectue :

1. L'addition de deux entiers.
2. La multiplication de deux entiers.
3. La composition de deux fonctions, étant données les machines calculant chacune des fonctions.

**Exercice 3.** *r.e. VS r.*

1. Montrer que si un langage $\mathcal{L}$ est Turing-reconnaissable [1] (il existe une machine de Turing qui répond oui si et seulement si le mot est dans $\mathcal{L}$), alors il est récursivement énumerable (il existe une machine de Turing qui énumère tous les mots de $\mathcal{L}$).
2. Montrer que si un langage $\mathcal{L}$ est récursivement énumerable et co-récursivement énumerable ($\overline{\mathcal{L}}$ est r.e.) alors il est décidable (récursif).

**Exercice 4.** *Système D*

Soit $M$ une machine de Turing à un ruban. On supposera que pour tout mot en entrée de $M$ ce mot est entièrement lu par $M$ au cours du calcul.

1. Montrez que pour tout entier $c \geq 1$ il existe une constante $a$ et une machine de Turing $M'$ à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que $M$ et telle que si $M$ consomme $s(|x|)$ cases mémoires sur l'entrée $x$ alors $M'$ consomme au plus $a + |x| + s(|x|)/c$ cases mémoires sur la même entrée.
2. Montrez que pour tout entier $c \geq 1$ il existe une constante $a$ et une machine de Turing $M'$ à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que $M$ et telle que si $M$ s'arrête sur l'entrée $x$ en $t(|x|)$ étapes alors $M'$ s'arrête sur la même entrée en $a + |x| + t(|x|)/c$ étapes au plus.

**Exercice 5.** *La haie de lauriers*

On considère les machines de Turing à un ruban dont l'alphabet $\Sigma$ ($|\Sigma| \geq 3$) possède un symbole particulier #. La configuration d'entrée est de la forme $\cdots \sqcup \sqcup \# \omega \# \sqcup \sqcup \ldots$ où $\omega$ ne contient pas de #. Toutes les configurations sont de ce type, à ceci près qu'on s'autorise un ## s'il disparaît dans la configuration suivante.

✎ Ces machines sont-elles équivalentes aux autres machines de Turing ?

1. attention, ce n'est pas la même chose que Turing-décidable