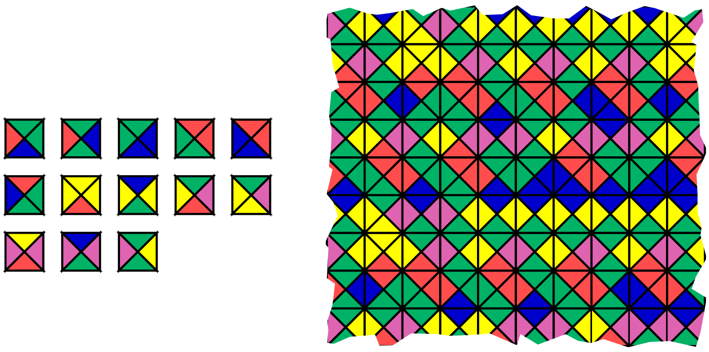
TD 11

Exercice 1. *Tuiles de Wang*

Soit A un ensemble fini des tuiles carrés dont chaque bord est colorié. On code chaque tuile comme une 4-tuple (N, W, S, E) qui donne la couleur correspondante à chacun des bords. Un pavage est une fonction ρ de $\mathbb{Z}^2$ dans A telle que deux tuiles qui sont côte à côte via cette fonction ont le bord commun de la même couleur. On dit que A pave le plan s'il existe un pavage ρ. Voir la Figure 1.



1. On définit le problème de domino à origine fixée comme :

$$DP_\star = \{< (A, a) >| \ \exists \rho : \mathbb{Z}^2 \to A \text{ pavage }, x(0,0) = a\}$$

avec A un ensemble de tuiles de Wang et $a \in A$ une tuile de cet ensemble.
Montrer que $DP_\star$ est indécidable.
(Indice : coder une machine de Turing avec des tuiles et choisir a la tuile avec l'état initial)

✎ Montrer que le problème de domino

$$DP = \{< A >| \ \exists \rho : \mathbb{Z}^2 \to A \text{ pavage } \}.$$

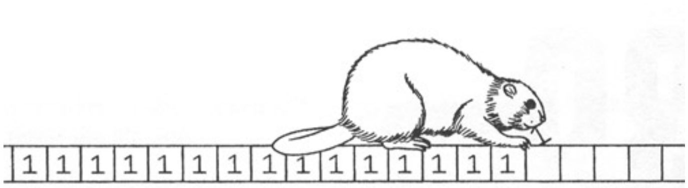
est aussi indécidable.

Exercice 2. *Ceux-là font travailler l'imagination sans raconter d'histoire...*

Dans tout cet exercice les entrées (éventuelles) et sorties des machines de Turing seront codées en unaire.
Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des machines de Turing d'alphabet de ruban $\{B, 1\}$ à $n+1$ états $q_0, \ldots, q_n$ où q_0 est l'état initial et q_n l'état d'acceptation, fonctionnant sur un unique ruban bi-infini avec une seule tête.
Le "championnat du castor affairé" est un jeu proposé aux machines de Turing de $\mathcal{M}_n$. Gagne celle qui réussit à écrire le plus grand nombre sur le ruban à partir de l'entrée vide avant de s'arrêter (il est donc bien entendu que la machine *doit* s'arrêter).

1. Montrer que, pour n fixé, l'ensemble des nombres que peuvent écrire les machines de $\mathcal{M}_n$ avant de s'arrêter admet un maximum $C(n)$ (la machine réalisant ce maximum est déclarée vainqueur de la compétition du castor affairé en catégorie n). Montrer que la fonction $C : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

2. Que vaut $C(2)$?
3. Soit f une fonction calculable par une machine de Turing M_f à n états. Montrer que l'on peut construire une machine de Turing M_g qui part de l'entrée vide et écrit $f(f(x))$ sur le ruban avant de s'arrêter. Quel est le nombre d'état de M_g ?
4. Soit f une fonction calculable, expliquer pourquoi la fonction
$$F(x) = \sum_{0 \le i \le x} (f(i) + i^2)$$
est également calculable.
5. En utilisant les questions précédentes, montrer que pour toute fonction calculable f, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $C(n) > f(n)$. En déduire que C n'est pas récursive.
6. Soit S la fonction qui à n associe le nombre maximum d'étapes de calcul d'une machine de Turing à $n+1$ états (dont un état initial et un état d'acceptation) qui s'arrête. Montrer que S n'est pas récursive.
7. Supposons qu'un martien peut te donner une borne supérieure pour $C(n)$ pour un n de ton choix. Trouver un algorithme qui décide la vérité de la conjecture de Goldbach.



Exercice 3. *r. ? r.e. ? co r.e. ?*

On fixe un alphabet fini Σ contenant entre autre les lettres a et b. ϵ désignera le mot vide. Fixons une bijection entre l'ensemble des machines de Turing sur l'alphabet Σ et Σ^*. On notera $\langle M \rangle$ l'image de la machine de Turing M par cette bijection.

✎ Les ensembles suivants sont-ils décidables ? reconnaissables ? de complémentaire reconnaissable ?

1. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, M(\langle M \rangle)$ s'arrête$\}$
2. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, M(\epsilon)$ s'arrête$\}$
3. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, M(abba)$ s'arrête$\}$
4. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, L(M) = \emptyset\}$
5. $\{(\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle) \in (\Sigma^*)^2, L(M_1) = L(M_2)\}$
6. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, M(ab)M(ba) = aaa\}$
7. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, M(x) = x$ si $\langle x \rangle^{-1}(x)$ s'arrête et b sinon$\}$
8. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, \exists \langle T \rangle \in \Sigma^* : T(\langle M \rangle) = abb\}$
9. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, M$ ne s'arrête sur aucun mot dont $\langle M \rangle$ est un préfixe$\}$
10. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, M(\langle M \rangle) = \langle M \rangle\}$
11. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^*, M$ s'arrête sur une partie infinie de $\Sigma^*\}$