TD 12

Exercice 1. *How can mirrors be real if our eyes aren't real ?- J. Smith*

Un nombre réel a est dit *récursif* s'il est *récursivement approximable par des rationnels*, c'est-à-dire s'il existe des fonctions récursives F et G de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout $n > 0$ on ait $G(n) > 0$ et $\left| |a| - \frac{F(n)}{G(n)} \right| \leq \frac{1}{n}$.

1. Montrer que tout nombre rationnel est récursif.
2. Montrer que les nombres $\sqrt{2}$, e et π sont récursifs.
3. La coupure dans les rationnels associée au nombre réel a se code par la relation suivante sur les entiers :
$$\mathcal{A} = \left\{ (i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid j \neq 0 \text{ et } \frac{i}{j} < |a| \right\}$$
Montrer que le réel a est récursif si et seulement si la relation $\mathcal{A}$ est récursive.
4. Montrer que le nombre réel a est récursif si et seulement s'il existe un *développement décimal récursif* de a, c'est-à-dire une fonction récursive $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n > 0$ on ait $H(n) \leq 9$ et $|a| = \sum_{n \geq 0} H(n).10^{-n}$.
5. Montrer que l'ensemble des réels récursifs forme un sous-corps dénombrable de $\mathbb{R}$, stable par quelques fonctions dont on donnera des exemples.
6. Donner un exemple de réel non récursif. (Indice : penser aux )

Exercice 2.

Le but de cet exercice est de montrer que toute machine de Turing à une seule bande qui fonctionne en temps $o(n \log n)$ accepte un langage rationnel. On montre d'abord que cette borne est optimale, puis on définit la notion de franchissement pour prouver le résultat.

Soit M une machine de Turing et $k \geq 1$ un entier. On dit qu'une étape de calcul $C \to C'$ de M franchit la frontière entre les cases k et $k+1$ si $C = upav$, $C' = ubqv$ et $|u| = k$ en appliquant une transition $p, a \to q, b, R$ ou bien le cas symétrique. Soit γ un calcul de M, on appelle suite des franchissements de γ en k, la suite des états $p_0, \ldots, p_m$ observés juste après les franchissements de la frontière $k|k+1$.

1. Montrer que le langage $L = \{w \in \{a,b\}^* : |w|_a = |w|_b\}$ n'est pas rationnel et que L est reconnu par une machine de Turing qui fonctionne en temps $O(n \log n)$.
2. Soient $x = uy$ et $x' = u'y'$ deux contenus de bande (ie y, y' sont infinis, à support fini). Soient γ et γ' deux calculs sur x et x' tels que la suite de franchissements de γ en $|u|$ est identique à la suite de franchissement de γ' en $|u'|$. Montrer qu'il existe un calcul γ'' sur uy' qui est identique à γ sur u et à γ' sur y'.
3. En déduire que si γ est un calcul sur $x = uvy$ tel que les suites de franchissements en $|u|$ et $|uv$ sont identiques, il existe des calculs sur uy et $uvvy$ de même type de *gamma* (ie acceptant ssi γ est acceptant).

4. On dit qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur A^* est régulière à droite si $w \sim w'$ implique $wa \sim w'a$. On rappelle qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur un ensemble E sature un sous-ensemble F de E si F est égal à l'union des classes qui l'intersectent.
Montrer que si L est saturé par une relation d'équivalence d'indice fini qui est régulière à droite, alors L est rationnel.
5. Pour une machine de Turing M, on définit $t_M(n), r_M(n)$ le temps d'exécution maximal et la longueur maximale d'une suite de franchissements d'un calcul de M sur une entrée de longueur n.
Montrer que si M vérifie $r_M(n) \leq K$ pour tout $n \geq 0$, alors M reconnaît un langage rationnel. (Indice : on pourra supposer que M accepte uniquement en rencontrant un symbole blanc)
6. Soit M une machine de Turing telle que $t_M(n) \leq Kn$ pour une constant K. Montrer qu'il existe une machine M' équivalente à M telle que $t_{M'}(n) \leq 2Kn$ et qui n'utilise que la partie de la bande où est écrite l'entrée.
7. Soit M une machine de Turing à une seule bande telle que $t_M(n) \leq Kn$ et qui n'utilise que la partie de la bande où est écrite l'entrée. Montrer que si un calcul a une suite de franchissements de longueur supérieure à $2K|Q|^K + K$, alors il existe au moins trois suites de franchissements identiques de longueur strictement inférieure à K.
(Indice : on pourra trouver un lien entre taille des suites des franchissements et temps d'exécution de la machine puis utiliser le principe des tiroirs)
8. Montrer que toute machine de Turing M à une seule bande telle que $t_M(n) \leq Kn$ accepte nécessairement un langage rationnel.
9. (Difficile) Montrer de même que toute machine de Turing M à une seule bande telle que $t_M(n) = o(n \log n)$ accepte nécessairement un langage rationnel.

Exercice 3. *How we touched and went on separate ways !- Journey*

Le but de cet exercice est de démontrer que $P \subsetneq EXPTIME$. On dira qu'une fonction $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, où $t(n) = \Omega(n \log(n))$, est constructible en temps s'il existe une machine de Turing qui, sur l'entrée 1^n, calcule la représentation binaire de $t(n)$, en temps $O(t(n))$.
Soit t une fonction constructible en temps et considérons l'algorithme suivant qui reçoit en entrée un mot w de longueur $|w| = n$:

– i) Calculer $t(n)$ et stocker $\left\lceil \frac{t(n)}{\log(t(n))} \right\rceil$ dans un compteur binaire B.
– ii) Si w n'est pas de la forme $\langle M \rangle 10^*$, rejeter.
– iii) Simuler M sur w en décrémentant B de 1 pour chaque étape de calcul de M. Si B atteint la valeur 0, rejeter.
– iv) Si M accepte, rejeter. Si M rejette, accepter.

1. Montrer que l'algorithme s'arrête sur toutes les entrées, et que le langage L qu'il reconnaît est décidable en temps $O(t(n))$.
2. Montrer que L n'est pas décidable en temps $o\left(\frac{t(n)}{\log(t(n))}\right)$.
3. Montrer que si $t_1, t_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sont deux fonctions telles que $t_1(n) = o\left(\frac{t_2(n)}{\log(t_2(n))}\right)$ et t_2 est constructible en temps, alors $TIME(t_1(n)) \subsetneq TIME(t_2(n))$.
4. Conclure que $P \subsetneq EXPTIME$.
5. Montrer aussi que pour $1 \leq a < b$ nombres réels, on a $TIME(n^a) \subsetneq TIME(n^b)$.