TD2 : Calcul Propositionnel

Exercice 1. *Théorème de compacité du calcul propositionnel*

✎ Montrer l'équivalence de ces trois versions du Théorème de compacité du calcul propositionnel.

(i) Pour tout ensemble $\mathcal{A}$ de formules du calcul propositionnel, $\mathcal{A}$ est satisfaisable si et seulement si $\mathcal{A}$ est finiment satisfaisable.

(ii) Pour tout ensemble $\mathcal{A}$ de formules du calcul propositionnel, $\mathcal{A}$ est contradictoire si et seulement si $\mathcal{A}$ admet au moins un sous-ensemble fini contradictoire.

(iii) Pour tout ensemble $\mathcal{A}$ de formules du calcul propositionnel, et pour toute formule F, F est conséquence de $\mathcal{A}$ si et seulement si F est consequence d'au moins une partie finie de $\mathcal{A}$.

Rappel : F est **conséquence** de $\mathcal{A}$ si et seulement si toute distribution de valeurs de verité qui satisfait $\mathcal{A}$ satisfait F.

Exercice 2. *FormesNormales*

On rappelle qu'une clause conjonctive est une formule de la forme $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$, où chaque x_i est un littéral ; qu'une formule est dite sous forme normale disjonctive si et seulement si elle s'écrit comme une disjonction de clauses conjonctives ; que cette formule est dite sous forme normale disjonctive canonique si chaque variable apparaît une unique fois dans chaque clause, et si les clauses ne se répètent pas.

1. Montrer que toute formule non toujours fausse admet une unique écriture sous forme normale disjonctive canonique (à l'ordre des facteurs près).
2. De même, on définit et montre l'existence et l'unicité d'une unique formule sous forme normale conjonctive canonique...

Exercice 3. *Coloration des graphes*

Étant donné un ensemble E, un *graphe* sur E est une relation binaire G symétrique et antiréflexive (ce qui signifique que, pour chaque élément x de E, $(x,x) \notin G$).
Si k est un entier naturel non nul et si G est un graphe sur E, on dit que G est *k-coloriable* si et seulement si il existe une application f de E dans $\{1,2,\ldots,k\}$ telle que, pour tout $(x,y) \in G$, $f(x) \neq f(y)$.

1. Soit, pour chaque couple $(x,i) \in E \times \{1,2,\ldots,k\}$, une variable propositionnelle $A_{x,i}$. Definir un ensemble $\mathcal{A}(E,G,k)$ de formules du calcul propositionnel sur l'ensemble de variables $A_{x,i}$ qui soit satisfaisable si et seulement si le graph G est k-coloriable.
2. Montrer que, pour qu'un graphe soit k-coloriable, il faut et il suffit que toutes ses restrictions finites le soient.

Rappel :
Déf : Les **formules** sont définies inductivement par :

$$A, B ::= \;\bot \mid P \mid \neg A \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall x A \mid \exists x A$$

Déf : Les **règles de déduction** sont les suivantes :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\,\text{aff} \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\bot_c$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,\to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,\to_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\,\wedge_e^g \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\,\wedge_e^d$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\vee_i^g \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\vee_i^d \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,\vee_e$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,\neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\,\neg_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\,\forall_i\ (x \notin FV(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\,\forall_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A}\,\exists_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x A \qquad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,\exists_e\ (x \notin FV(\Gamma, C))$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\,=_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A[x := t] \qquad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}\,=_e$$

Exercice 4. *Dérivations*

Ecrire les arbres de preuve pour les propriétés suivantes :

1. $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$
2. $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$
3. $P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
4. $P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
5. $P \wedge (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
6. $P \vee (Q \vee R) \leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$
7. $(P \to \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$
8. $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
9. $((P \to Q) \wedge (P \to \neg Q)) \leftrightarrow \neg P$
10. $((P \vee Q) \to R) \leftrightarrow (P \to R) \wedge (Q \to R)$
11. $((P \wedge Q) \to R) \leftrightarrow (P \to R) \vee (Q \to R)$
12. $(P \to P \wedge Q) \vee (Q \to P \wedge Q)$
13. $(P \to P \vee Q) \wedge (Q \to P \vee Q)$
14. $\forall x \neg A \leftrightarrow \neg(\exists x A)$
15. $\exists x \neg A \leftrightarrow \neg(\forall x A)$
16. $(\forall x A \wedge \forall x B) \leftrightarrow \forall x(A \wedge B)$
17. $(\forall x A \vee \forall x B) \to \forall x(A \vee B)$
18. $B \leftrightarrow \forall x B$ si $x \notin FV(B)$
19. $\forall x(A \vee B) \leftrightarrow (\forall x A \vee \forall x B)$ si $x \notin FV(B)$
20. $(\exists x A \vee \exists x B) \leftrightarrow \exists x(A \vee B)$
21. $\exists x(A \wedge B) \to (\exists x A \wedge \exists x B)$
22. $B \leftrightarrow \exists x B$ si $x \notin FV(B)$
23. $\exists x(A \wedge B) \leftrightarrow (\exists x A \wedge \exists x B)$ si $x \notin FV(B)$
24. $\exists x(A \to \forall y A\{x := y\})$ si $y \notin FV(A)$