TD4 : Un peu de théorie des modèles.

Exercice 1.
Soit R un symbole de relation binaire. Pour chacune des formules et des interprétations ci-dessous, dire si la formule est satisfaite ou non dans l'interprétation.

a) $\forall x \forall y \forall z \{\neg R(x,x) \wedge [R(x,y) \to \neg R(y,x)] \wedge [R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)]\}$

b) $\exists x \forall y \{\neg(x = y) \to R(x,y)\}$

c) $\exists x \forall y \{\neg(x = y) \to R(y,x)\}$

d) $\forall x \exists y \{R(x,y) \wedge \forall z\, [R(x,z) \to (z = y) \vee R(y,z)]\}$

e) $\forall x \forall y \{R(x,y) \to \exists z\, [R(x,z) \wedge R(z,y)]\}$

1. $\mathbb{N}$ où R est interprété par $<$
2. $\mathbb{Q}$ où R est interprété par $<$
3. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ où R est interprété par $\subsetneq$

Exercice 2.
Soit $\mathcal{L} = \{R, S\}$ où R (resp. S) est un symbole de relation unaire (resp. binaire). On considère l'interprétation $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$ dont l'ensemble de base est $|\mathcal{M}| = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ et dans laquelle l'interprétation de R (resp. de S) est la relation "être premier" (resp. "diviser"). Pour chacune des formules suivantes (à une variable libre x), indiquer l'ensemble des éléments de $|\mathcal{M}|$ qui la satisfont.

1. $\forall y \{S(y,x) \to x = y\}$
2. $\forall y \{S(y,x) \wedge x \neq y \to R(y)\}$
3. $\forall y, z \{R(y) \wedge R(z) \wedge S(y,x) \wedge S(z,x) \to y = z\}$
4. $\forall y, z \{S(y,x) \wedge S(z,x) \to S(y,z) \vee S(z,y)\}$
5. $\forall y,\ \exists z, t \{\neg R(y) \wedge S(y,x) \to R(z) \wedge R(t) \wedge z \neq t \wedge S(z,y) \wedge S(t,y)\}$

Exercice 3.
Soient $\mathcal{L}$ un langage ne contenant pas de symbole de fonction et $A[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k]$ une formule sans quantificateurs écrite sur $\mathcal{L}$ ayant m symboles de constante.

1. Montrer que la formule
$$\forall x_1, \ldots x_n, \exists y_1, \ldots, y_k\ A[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k]$$
est un théorème si et seulement si elle est satisfaite dans toute interprétation de cardinal au plus $\max(1, n+m)$.
2. Montrer que ce résultat n'est pas vrai si $\mathcal{L}$ contient des symboles de fonction.

Exercice 4.
Le but de l'exercice est de montrer que, en logique du premier ordre, on peut se passer des symboles de fonctions. Soient $\mathcal{L}$ un langage, f un symbole de fonction n-aire et R un symbole de relation d'arité $n+1$ tels que f et R ne sont pas dans $\mathcal{L}$. On note $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$ et $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \cup \{R\}$.

1. Démontrer que, pour toute formule du premier ordre F dans $\mathcal{L}_1$, il existe une formule F' dans $\mathcal{L}_2$ telle que, pour toute interprétation $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}_1$, il existe une interprétation $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{L}_2$ telle que :

(i) $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ coincident sur $\mathcal{L}$;

(ii) pour tout environnement e, on a $(\mathcal{M}, e) \models F$ si et seulement si $(\mathcal{M}', e) \models F'$.

2. Et le sens réciproque ?

3. Pourquoi ce résultat ne contredit pas celui de l'exercice sur les langages sans symbole de fonctions ?

Exercice 5. *RelationsUnaires*

1. Écrire l'arbre de preuve pour la propriété $\forall x S(x) \vee \exists x \neg S(x)$.

Soient $\mathcal{L} = \{R, S\}$ un langage où R et S sont des symboles de relation unaire et

$$F[x] = \forall y \{[S(y) \to R(x)] \to [S(x) \to R(y)]\}$$

Si $\mathcal{M}$ est une interprétation de $\mathcal{L}$, on note $F_{\mathcal{M}} = \{a \in |\mathcal{M}| \ \text{ tel que } \ \mathcal{M} \models F[a]\}$

2. Soit $\mathcal{M}$ une interprétation de $\mathcal{L}$. Montrer que $F_{\mathcal{M}} \neq \emptyset$.

3. Soit A un ensemble non vide. Montrer que, pour tout sous-ensemble non vide B de A, il existe une interprétation $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$ d'ensemble de base A telle que $F_{\mathcal{M}} = B$.

Exercice 6. *Isomorphie*

Montrer que les interprétations $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ du langage $\mathcal{L}$ sont isomorphes.

1. $\mathcal{L} = \{a, f\}$ où a est une constante et f est une fonction binaire.
   $|\mathcal{M}| = \mathbb{R}_+^*$, $a_{\mathcal{M}} = 1$ et $f_{\mathcal{M}}$ est la multiplication.
   $|\mathcal{N}| = \mathbb{R}$, $a_{\mathcal{N}} = 0$ et $f_{\mathcal{N}}$ est l'addition.

2. $\mathcal{L} = \{R\}$ où R est une relation binaire.
   $|\mathcal{M}| = \mathbb{R}$ et $R_{\mathcal{M}}$ est la relation $\leq$.
   $|\mathcal{N}| =]0,1[$ et $R_{\mathcal{N}}$ est la relation $\leq$.
   .