TD5

Exercice 1.

✎ Soit $\mathcal{M}$ une interpétation d'un langage $\mathcal{L}$. Montrer que la théorie $T_{\mathcal{M}}$ formée de toutes les formules closes sur $\mathcal{L}$, satisfaites dans $\mathcal{M}$, est complète.

Exercice 2.
On considère le langage $\mathcal{L} = \{r, s\}$, avec r un symbole de relation binaire et s un symbole de fonction unaire. On note T la théorie contenant les six axiomes suivants :

(i) $\exists x \forall y \; r(x,y)$.

(ii) $\forall x \forall y \; s(x) = s(y) \to x = y$

(iii) $\forall x \; s(x) \neq x$

(iv) $\forall x \forall y \; (r(y, s(x)) \wedge r(x,y)) \leftrightarrow ((x = y) \vee (y = s(x)))$

(v) $\forall x \forall y \; r(x,y) \wedge r(y,x) \leftrightarrow x = y$

(vi) $\forall x \forall y \forall z \; r(x,y) \wedge r(y,z) \to r(x,z)$

1. Trouver deux modèles de T non-isomorphes.
2. Trouver une formule qui distingue ces deux modèles.

Exercice 3. *Complétude du calcul propositionnel*
Le but de l'exercice est de démontrer, dans le calcul propositionnel, que si F est une tautologie (i.e. si pour toute valuation v, $v(F) = 1$), alors on a $\vdash F$. Pour une formule $F(X_1, \ldots, X_n)$ et une valuation v, on appelle $\phi(F, v)$ la formule $\bigwedge_{i=1}^{n} \epsilon_i X_i$, avec ϵ_i égal au mot vide si $v(X_i) = 1$ et égal au symbole $\neg$ si $v(X_i) = 0$. Par convention, on note $\phi(\perp, v) = \top$.

1. Démontrer que, pour toutes formules A et B, toute valuation v et tout $\oplus \in \{\wedge, \vee, \to\}$, on a $\vdash \phi(A \oplus B, v) \leftrightarrow \phi(A, v) \wedge \phi(B, v)$, ainsi que $\vdash \phi(\neg A, v) \leftrightarrow \phi(A, v)$.
2. Démontrer que, pour toute formule F, on a $\vdash \bigvee \{\phi(F, v) \;/\; v \text{ valuation }\}$.
3. Démontrer que, pour tout valuation v et toute formule F, si $v(F) = 1$, alors $\phi(F, v) \vdash F$ et, si $v(F) = 0$, alors $\phi(F, v) \vdash \neg F$.
4. Soit F une tautologie. Démontrer que $\bigvee \{\phi(F, v) \;/\; v \text{ valuation }\} \vdash F$.
5. Conclure.

Exercice 4.

1. Démontrer qu'il n'existe pas d'ensemble $\mathcal{F}$ de formules écrites sur le langage $\{=\}$ tel que $\mathcal{M} \models \mathcal{F}$ ssi $\mathrm{Card}(|\mathcal{M}|)$ est fini.
2. Soit $\mathcal{L} = \{=, \leq\}$. On rappelle qu'un ordre est *bien fondé* s'il n'admet pas de suite infinie strictement décroissante. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble de formules $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{L}$ tel que $\mathcal{M} \models \mathcal{F}$ si et seulement si $(\mathcal{M}, \leq_{\mathcal{M}})$ est un ordre bien fondé.

Exercice 5.

On considère un langage du premier ordre L et on note $\mathcal{F}_1$ l'ensemble des formules de L à au au plus une variable libre. Etant donnés une L-structure M et un élément $a \in |M|$, on appelle *type* de a l'ensemble $\theta(a)$ des formules de $\mathcal{F}_1$ satisfaites par l'élément a dans le modèle M. Autrement dit, on pose

$$\theta(a) = \{F[x] \in F_1 \mid x \text{ est une variable et } M \models F[a]\}$$

1. Montrer que, si, dans une L-structure M, une partie $A \subseteq |M|$ est constituée d'éléments ayant tous le même type, alors toute partie de $|M|$ définissable dans M par une formule de L contient A ou est disjointe de A.

   Rappel : une partie $A \subseteq |M|^k$ est définissable s'il existe une formule F avec k variables libres telle que $(a_1, \ldots, a_k) \in A \Leftrightarrow M \models F[a_1, \ldots, a_k]$.

2. Soient h un automorphisme d'une L-structure M, et a un élément de $|M|$. Montrer que a et $h(a)$ ont même type.

3. Dans chacun des exemples suivants, trouver deux élément a et b du modèle proposé ayant des types distincts, ou montrer que ce n'est pas possible.
   i) $L_1 = \{R^2\}$; $M_1 = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$;
   ii) $L_2 = \{f^1\}$; $M_2 = \langle \mathbb{N}, n \mapsto n+1 \rangle$;
   iii) $L_3 = \{f^1\}$; $M_3 = \langle \mathbb{Z}, n \mapsto n+1 \rangle$;
   iv) $L_4 = \{g^2, c^0\}$; $M_4 = \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$;
   v) $L_5 = \{g^2\}$; $M_5 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

4. Soit T une théorie de L, et soient $F_1, \ldots, F_n$ des formules de $\mathcal{F}_1$. On suppose que la formule

$$G = \forall x, \forall y, \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (F_i[x] \leftrightarrow F_i[y]) \rightarrow x = y$$

   est conséquence de T.
   Montrer que tout modèle de T a au plus 2^n éléments.