TD6

Exercice 1.

1. Démontrer qu'il n'existe pas d'ensemble $\mathcal{F}$ de formules écrites sur le langage $\{=\}$ tel que $\mathcal{M} \models \mathcal{F}$ ssi $\text{Card}(|\mathcal{M}|)$ est fini.
2. Soit $\mathcal{L} = \{=, \leq\}$. On rappelle qu'un ordre est *bien fondé* s'il n'admet pas de suite infinie strictement décroissante. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble de formules $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{L}$ tel que $\mathcal{M} \models \mathcal{F}$ si et seulement si $(\mathcal{M}, \leq_{\mathcal{M}})$ est un ordre bien fondé.
3. Soit $L = \{0, 1, +, \times, =\}$ le langage de la théorie des corps. Montrer que, pour tout formule close F écrite sur L qui est vraie dans tous les corps commutatifs de caractéristique 0, il existe un entier n tel que F est vraie dans tous les corps commutatifs de caractéristique $p \geq n$.

Exercice 2.
On considère un langage du premier ordre L et on note $\mathcal{F}_1$ l'ensemble des formules de L à au au plus une variable libre. Etant donnés une L-structure M et un élément $a \in |M|$, on appelle *type* de a l'ensemble $\theta(a)$ des formules de $\mathcal{F}_1$ satisfaites par l'élément a dans le modèle M. Autrement dit, on pose

$$\theta(a) = \{F[x] \in F_1 \mid x \text{ est une variable et } M \models F[a]\}$$

1. Montrer que, si, dans une L-structure M, une partie $A \subseteq |M|$ est constituée d'éléments ayant tous le même type, alors toute partie de $|M|$ définissable dans M par une formule de L contient A ou est disjointe de A.

   Rappel : une partie $A \subseteq |M|^k$ est définissable s'il existe une formule F avec k variables libres telle que $(a_1, \dots, a_k) \in A \Leftrightarrow M \models F[a_1, \dots, a_k]$.
2. Soient h un automorphisme d'une L-structure M, et a un élément de $|M|$. Montrer que a et $h(a)$ ont même type.
3. Dans chacun des exemples suivants, trouver deux élément a et b du modèle proposé ayant des types distincts, ou montrer que ce n'est pas possible.
   i) $L_1 = \{R^2\}$; $M_1 = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$;
   ii) $L_2 = \{f^1\}$; $M_2 = \langle \mathbb{N}, n \mapsto n+1 \rangle$;
   iii) $L_3 = \{f^1\}$; $M_3 = \langle \mathbb{Z}, n \mapsto n+1 \rangle$;
   iv) $L_4 = \{g^2, c^0\}$; $M_4 = \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$;
   v) $L_5 = \{g^2\}$; $M_5 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$.
4. Soit T une théorie de L, et soient $F_1, \dots, F_n$ des formules de $\mathcal{F}_1$. On suppose que la formule

$$G = \forall x, \forall y, \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (F_i[x] \leftrightarrow F_i[y]) \rightarrow x = y$$

   est conséquence de T.
   Montrer que tout modèle de T a au plus 2^n éléments.

Exercice 3.
Dans cet exercice, le mot *graphe* désigne un graphe non-orienté et simple : il y a au plus une seule arête entre deux sommets, et aucune arête ne relie un sommet à lui-même. Un graphe est *connexe* si on peut relier tout couple de sommets distincts par des arêtes. Autrement dit, pour tout couple de

sommets disctincts x et y, il existe un chemin de x à y. La longueur de ce chemin est son nombre d'arêtes. Un chemin peut passer plusieurs fois par les mêmes sommets.
On se place dans le langage $\mathcal{L} = \{R\}$ formé uniquement d'un symbole de prédicat binaire R (bien sûr, on a aussi comme toujours l'égalité).

1. Donner les axiomes de la théorie A des graphes non-orientés et simples.
2. Soit le nouveau langage $\mathcal{L}' = \{R, a, b\}$ où a et b sont des symboles de constantes. Montrer que s'il existe une théorie des graphes connexes T sur $\mathcal{L}$ alors il existe une théorie T' des graphes connexes non vides dans le langage $\mathcal{L}'$.
3. Pour tout entier n strictement positif, donner une formule φ_n de $\mathcal{L}'$ telle que pour toute structure sur $\mathcal{L}'$ qui soit un graphe G, la formule φ_n est vraie dans G si et seulement s'il n'existe pas de chemin de longueur n entre l'interprétation de a et l'interprétation de b dans G.
4. Soient $n_1, \ldots, n_k \geq 1$, est-ce que $A \cup \{\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k}\}$ a un modèle connexe ?
5. Montrer qu'il n'existe pas de théorie des graphes connexes, i.e., de théorie dont les modèles sont exactement les graphes connexes.

Exercice 4.
On veut montrer la proposition $R_{<\infty}$ suivante :

> Quels que soient les entiers $n \geq 2$ et $m \geq 1$, il existe un entier $l \geq 1$ tel que, pour tout ensemble E de cardinal l et toute fonction f de $E \times E$ dans $\mathbb{N}_m = \{1, \ldots, m\}$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}_m$ et un sous-ensemble $E_n = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq E$ d'éléments distincts de E tels que, pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$, on ait $f(x_i, x_j) = m_0$.

On va d'abord montrer la proposition R_∞ suivante :

> Pour tout entier $m \geq 1$, tout ensemble infini E et toute fonction $f : E \times E \to \mathbb{N}_m$, il existe un entier $m_0 \in \mathbb{N}_m$ et un ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments distincts de E tel que, pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i < j$, on ait $f(x_i, x_j) = m_0$.

On commence par fixer $m \geq 1$, E un ensemble infini, une fonction $f : E \times E \to \mathbb{N}_m$ et un élément $x_0 \in E$.

1. Montrer qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}_m$ et un ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments distincts de E tel que, pour tout $i > 0$, on ait $f(x_0, x_i) = m_0$.
2. Montrer qu'il existe un ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments distincts de E tel que, pour tous les entiers i et j tels que $0 \leq i < j$, on ait $f(x_i, x_j) = f(x_i, x_{i+1})$.
3. En déduire la proposition R_∞.
4. En déduire la proposition $R_{<\infty}$.