TD7

Exercice 1.
On considère la théorie $\mathcal{T}$ dont le langage est formé à partir d'un unique symbole de relation binaire r et dont les axiomes sont :

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{A1}) & \exists x\, \exists y\ \ r(x,y) \\
(\mathrm{A2}) & \forall x\, \neg r(x,x) \\
(\mathrm{A3}) & \forall x\, \forall y\, \forall z\ \ (r(x,y) \wedge r(y,z) \to r(x,z)) \\
(\mathrm{A4}) & \forall x\, \forall y\ \ (r(x,y) \to \exists z\, (r(x,z) \wedge r(z,y)))
\end{array}$$

1. Donner 2 modèles non-isomorphes de $\mathcal{T}$. Justifier pourquoi ils ne sont pas isomorphes.
2. Montrer que la théorie n'est pas complète, en exhibant une formule close F telle que $\mathcal{T} \not\vdash F$ et $\mathcal{T} \not\vdash \neg F$.
3. Montrer que tout modèle de $\mathcal{T}$ est infini mais que pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, la théorie $\mathcal{T}_i = \mathcal{T} \setminus (\mathrm{A}i)$ admet un modèle fini.

Exercice 2.
Soit $\mathcal{M}$ l'interprétation du langage de l'arithmétique dont l'ensemble de base est

$$|\mathcal{M}| = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup (\{1,2\} \times \mathbb{Z})\,.$$

L'interprétation des symboles est la suivante :

$$\begin{array}{rcl}
0_{\mathcal{M}} & = & (0,0) \\
\mathcal{S}_{\mathcal{M}}((i,n)) & = & (i,n+1) \qquad \text{pour } i = 0,1,2. \\
\\
(0,n) +_{\mathcal{M}} (i,m) & = & (i,m) +_{\mathcal{M}} (0,n) = (i,m+n) \qquad \text{pour } i = 0,1,2 \ \text{ et} \\
(i,n) +_{\mathcal{M}} (j,m) & = & (i,n+m) \qquad \text{pour } i,j = 1,2 \\
\\
(0,0) \times_{\mathcal{M}} (i,m) & = & (i,m) \times_{\mathcal{M}} (0,0) = (0,0) \qquad \text{pour tous } i,m \\
(0,n) \times_{\mathcal{M}} (i,m) & = & (i,m) \times_{\mathcal{M}} (0,n) = (i,n \cdot m) \qquad \text{pour } i = 0,1,2 \ \text{ si } n \neq 0 \text{ et} \\
(i,n) \times_{\mathcal{M}} (j,m) & = & (i,n \cdot m) \qquad \text{pour } i,j = 1,2
\end{array}$$

✎ Montrer que $\mathcal{M} \models P_0$ et que $\mathcal{M} \not\models \forall x,y\ \{x+y = y+x\}$. Que peut-on en déduire à propos de P_0 ?

Exercice 3.
Montrer les assertions suivantes :

1. Pour tout entier n, $P_0 \vdash S^{n+1}0 \neq S^n 0$.
2. $\mathrm{PA} \vdash \forall x\ \{Sx \neq x\}$.
3. $P_0 \not\vdash \forall x\ \{Sx \neq x\}$.
4. Pour tous entiers n,m, on a $P_0 \vdash S^n 0 \times S^m 0 = S^m 0 \times S^n 0$.
5. $\mathrm{PA} \vdash \forall x,y\ \{x \times y = y \times x\}$.

6. $P_0 \not\vdash \forall x, y\ \{x \times y = y \times x\}$.

Exercice 4.

1. Pour chaque ensemble S suivant, trouver un langage L et une formule F sur ce langage telle que l'ensemble des cardinaux des modèles finis satisfaisant F soit l'ensemble S.

   a. $S = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

   b. $S = \{0, 1, \dots, k\}$

   c. $S = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$

2. Pour chaque formule F suivante, trouver l'ensemble $S \subset \mathbb{N}$ des cardinalités des modèles finis satisfaisant F.

   a. Sur le langage $L = \{=\}$,
$$F \equiv\ \exists x_1, \dots, \exists x_k, \bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq k} x_i \neq x_j.$$

   b. Sur le langage $L = \{f^1\}$,
$$F \equiv\ \exists x_1, \exists x_2, \bigwedge \begin{array}{l} x_1 = f(x_1) \wedge x_2 = f(x_2) \\ \forall x, (x \neq x_1 \wedge x \neq x_2) \longrightarrow (f(x) \neq x \wedge f(f(x)) \neq x \wedge f(f(f(x))) = x) \end{array}$$

   c. Sur le langage $L = \{f^2, R^1\}$,
$$\begin{aligned} F = &\forall x \exists x_1, x_2,\ R(x_1) \wedge R(x_2) \wedge x = f(x_1, x_2) \wedge \forall x_1, x_2, y_1, y_2, \\ &[R(x_1) \wedge R(x_2) \wedge R(y_1) \wedge R(y_2) \wedge f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)] \longrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \end{aligned}$$

Rappel : l'ensemble PA des axiomes de Peano est le suivant

$(A1)$ $\forall x\ \neg(sx = 0)$

$(A2)$ $\forall x\ \exists y\ (\neg\ x = 0 \to sy = x)$

$(A3)$ $\forall x\ \forall y\ (sx = sy \to x = y)$

$(A4)$ $\forall x\ (x + 0 = x)$

$(A5)$ $\forall x\ \forall y\ (x + sy = s(x + y))$

$(A6)$ $\forall x\ (x \times 0 = 0)$

$(A7)$ $\forall x\ \forall y\ (x \times sy = (x \times y) + x)$

(SI) Pour toute formule F de variables libres $x_0, \dots, x_n$, on a l'axiome :
$\forall x_1, \dots \forall x_n, F(0, x_1, \dots, x_n) \wedge [\forall x, F(x, x_1, \dots, x_n) \to F(sx, x_1, \dots, x_n)] \to \forall x F(x, x_1, \dots, x_n)$

On note P_0 le sous-ensemble de PA privé de (SI).