TD11

Exercice 1. *Théorème de Tarski*

✎ Démontrer que l'ensemble des codes des formules closes dans le langage de l'arithmétique qui sont vraies dans $\mathbb{N}$ n'est pas définissable : il n'existe aucune formule $\varphi(x)$ satisfaite exactement par les entiers n tels que $n = \#F$, où F est une formule close vraie dans $\mathbb{N}$.

Exercice 2.
Nous considérons la formule close suivante (qui est un cas particulier encore non résolu d'une conjecture d'Euler qui généralise le grand théorème de Fermat) :

$$\forall x \geq 1, \forall y \geq 1, \forall z \geq 1, \forall t \geq 1, \forall k \geq 6,\ x^k + y^k + z^k \neq t^k$$

✎ Démontrer que si cette formule n'est pas refutable dans $\mathcal{P}_0$, alors elle est vraie.

Exercice 3.

✎ Montrer que la collection des fonctions de a dans b, notée b^a, est un ensemble.

Exercice 4.
On rappelle l'*axiome de fondation :* $\forall v_0(\neg v_0 = \emptyset \Rightarrow \exists v_1(v_1 \in v_0 \wedge v_0 \cap v_1 = \emptyset))$

✎ Montrer que l'axiome de fondation implique que $\forall v_0(v_0 \notin v_0)$.

Exercice 5.
Dans cet exercice, la relation $\in$ est interprétée comme la relation d'appartenance usuelle.

1. Démontrer que $\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\emptyset), \in \rangle$ est un modèle de ZF sans l'axiome de l'infini, où $\mathcal{P}^n$ désigne n itérations de l'opérateur "ensemble des parties"

On note $\mathbf{0} = \emptyset$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{n+1} = \{\mathbf{n}\}$. Aussi, on définit $2\mathbf{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \dots\}$ et $2\mathbf{N}+1 = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \dots\}$.

2. Démontrer que
$$\langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\emptyset) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \mathcal{P}^n(2\mathbf{N}) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \mathcal{P}^n(2\mathbf{N}+1), \in \rangle$$
satisfait aux axiomes d'extensionnalité, de réunion, des parties et de compréhension, mais pas à l'axiome de la paire.

3. En déduire que l'axiome de la paire n'est pas conséquence des axiomes de ZF (moins l'axiome de l'infini) où l'on a remplacé le schéma de substitution par le schéma de compréhension.

Exercice 6.
On désigne par W l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ sur W et soit ε la relation binaire définie sur $\mathbb{N}$ telle que : pour tous entiers x et y,

$$x\, \varepsilon_\varphi\, y \text{ si et seulement si } x \in \varphi(y)$$

1. Montrer que l'univers $\langle \mathbb{N}, \varepsilon_\varphi \rangle$ satisfait tous les axiomes de ZF à l'exception de l'axiome de l'infini.

2. Montrer que si, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, $x \in \varphi(y)$ implique $x < y$, alors $\langle \mathbb{N}, \varepsilon_\varphi \rangle$ satisfait aussi l'axiome de fondation.

3. Trouver φ_1 et φ_2 tels que $\langle \mathbb{N}, \varepsilon_{\varphi_1} \rangle$ satisfait l'axiome de fondation, mais $\langle \mathbb{N}, \varepsilon_{\varphi_2} \rangle$ ne le satisfait pas.

Rappel : l'ensemble des axiomes de ZF est le suivant

$(ZF1)$ $\forall x \forall y (\forall y\ z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y$

$(ZF2)$ $\forall x\ \exists y\ \forall t\ (t \in y \leftrightarrow \exists z\ (t \in z \wedge z \in x))$

$(ZF3)$ $\forall x\ \exists y\ \forall t\ (t \in y \leftrightarrow t \subseteq x)$

$(ZF4)$ $\forall a \forall v_1 \ldots \forall v_n\ \{\forall x \forall y_1 \forall y_2 [\varphi(x, y_1, v_1, \ldots, v_n) \wedge \varphi(x, y_2, v_1, \ldots, v_n) \rightarrow y_1 = y_2\}$
$\rightarrow \exists z \forall y [y \in z \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x, y, v_1, \ldots, v_n))]$

$(ZF4')$ $\forall v_1 \ldots \forall v_{n+1} \exists x \forall y [y \in x \leftrightarrow y \in v_{n+1} \wedge \varphi(y, v_1, \ldots, v_n)]$

$(ZF5)$ $\exists x [\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)]$