TD12

Exercice 1.
On désigne par W l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ sur W et soit ε la relation binaire définie sur $\mathbb{N}$ telle que : pour tous entiers x et y,

$$x \, \varepsilon_\varphi \, y \text{ si et seulement si } x \in \varphi(y)$$

1. Montrer que l'univers $\langle \mathbb{N}, \varepsilon_\varphi \rangle$ satisfait tous les axiomes de ZF à l'exception de l'axiome de l'infini.
2. Montrer que si, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, $x \in \varphi(y)$ implique $x < y$, alors $\langle \mathbb{N}, \varepsilon_\varphi \rangle$ satisfait aussi l'axiome de fondation.
3. Trouver φ_1 et φ_2 tels que $\langle \mathbb{N}, \varepsilon_{\varphi_1} \rangle$ satisfait l'axiome de fondation, mais $\langle \mathbb{N}, \varepsilon_{\varphi_2} \rangle$ ne le satisfait pas.

Exercice 2.
Soient α et β des ordinaux. Montrer les propriétés suivantes :

1. $\emptyset$ est un ordinal.
2. Si $\alpha \neq \emptyset$, alors $\emptyset \in \alpha$.
3. $\alpha \notin \alpha$.
4. Si $x \in \alpha$, alors $x = S_x = \{y \in \alpha \mid y < x\}$.
5. Si $x \in \alpha$, alors x est un ordinal.
6. $\beta \subseteq \alpha$ ssi $\beta = \alpha$ ou $\beta \in \alpha$.
7. $\alpha_1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal (noté $\alpha + 1$).

Exercice 3.
Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si α est un ordinal et si β est un ordinal vérifiant $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 1$, alors $\beta = \alpha$ ou $\beta = \alpha + 1$.
2. Si X est un ensemble non-vide d'ordinaux, alors $\bigcap_{\alpha \in X} \alpha$ est le plus petit élément de X.
3. Soient α et β des ordinaux. Alors, une et une seule des propriétés suivantes est satisfaite : (i) $\alpha = \beta$; (ii) $\alpha \in \beta$; (iii) $\beta \in \alpha$.
4. Si X est un ensemble d'ordinaux, alors $b = \bigcup_{\alpha \in X} \alpha$ est un ordinal. De plus, si $\gamma < b$, il existe $\alpha \in X$ tel que $\gamma \in \alpha$. On écrit aussi $b = \sup_{\alpha \in X} \alpha$.

Exercice 4.
Soit $\lambda \neq \emptyset$ un ordinal. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. λ est limite.
2. $\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \alpha$.

Exercice 5.
On définit l'addition sur les ordinaux de la manière suivante :

— $\alpha + 0 = \alpha$
— $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
— $\alpha + \lambda = \cup_{\gamma \in \lambda}(\alpha + \gamma)$

Montrer les propriétés suivantes :

1. Pour tout ordinal α, on a $0 + \alpha = \alpha$.
2. Trouver α, β tels que $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$.
3. Pour tout ordinaux α, β, on a $\alpha \leq \alpha + \beta$.
4. Pour tout ordinal γ, si $\alpha < \beta$, alors $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$.
5. Trouver α, β, γ tels que $\alpha < \beta$ et $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.
6. Si $\gamma < \alpha + \beta$, alors $\gamma < \alpha$ ou $\gamma = \alpha + \delta$ avec $\delta < \beta$.
7. Pour tout α, β, γ, on a $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

On définit la multiplication sur les ordinaux de la manière suivante :

— $\alpha \cdot 0 = 0$
— $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
— $\alpha \cdot \lambda = \cup_{\gamma \in \lambda}(\alpha \cdot \gamma)$

Montrer les propriétés suivantes :

8. Pour tout ordinal $\gamma > 0$, si $\alpha < \beta$, alors $\gamma\alpha < \gamma\beta$.
9. Pour tout ordinaux α, β, γ, on a $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.
10. Trouver α, β tels que $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$.
11. Pour tout α, β, γ, on a $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.
12. Pour tout $\alpha \neq 0, \beta$, il existe un unique couple (γ, δ) tel que $\beta = \alpha\gamma\delta$ et $\delta < \alpha$.
13. Trouver α, β tels que $\beta \neq \gamma\alpha + \delta$ pour tout γ, δ.

Rappel : l'ensemble des axiomes de ZF est le suivant

$(ZF1)$ $\forall x \forall y (\forall y\ z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y$

$(ZF2)$ $\forall x\ \exists y\ \forall t\ (t \in y \leftrightarrow \exists z\ (t \in z \wedge z \in x))$

$(ZF3)$ $\forall x\ \exists y\ \forall t\ (t \in y \leftrightarrow t \subseteq x)$

$(ZF4)$ $\forall a \forall v_1 \ldots \forall v_n\ \{\forall x \forall y_1 \forall y_2 [\varphi(x, y_1, v_1, \ldots, v_n) \wedge \varphi(x, y_2, v_1, \ldots, v_n) \rightarrow y_1 = y_2\}$
$\rightarrow \exists z \forall y [y \in z \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x, y, v_1, \ldots, v_n))]$

$(ZF4')$ $\forall v_1 \ldots \forall v_{n+1} \exists x \forall y [y \in x \leftrightarrow y \in v_{n+1} \wedge \varphi(y, v_1, \ldots, v_n)]$

$(ZF5)$ $\exists x [\varnothing \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)]$